

Déformations d'un empilement granulaire lors de cycles de rotation quasi-statique sous gravité

Stéphanie Deboeuf¹, Olivier Dauchot², Lydie Staron³, Jean-Pierre Vilotte¹ & Anne Mangeney¹

¹ Institut de Physique du Globe de Paris, F-75252 Paris Cedex 5, France
deboeuf@ipgp.jussieu.fr

² Commissariat à l'Énergie Atomique, F-91191 Saclay, France.

³ Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge CB3 0WA, UK.

Résumé :

Nous rapportons les résultats de simulations numériques discrètes d'un empilement granulaire subissant des cycles de rotation quasi-statique dans le champ de gravité. Lorsque l'empilement est amené à proximité de sa limite de stabilité, sa susceptibilité à se déformer et notamment à se densifier augmente. Le phénomène de dilatance apparaissant à l'approche de la déstabilisation permet en effet de plus amples réarrangements pendant toute la durée de la sollicitation, impliquant essentiellement des contacts faibles.

Abstract :

We report the results of discrete numerical simulations of a granular pile undergoing quasi-static tilting cycles in the gravity field. When the granular pile is driven towards its limit of stability, its susceptibility to deform and especially to densify increases. Indeed, the dilatancy phenomenon occurring at the vicinity of the destabilisation allows for large rearrangements over the complete sollicitation, that imply essentially weak contacts.

Mots-clefs :

matériau granulaire ; simulation numérique ; rotation cyclique ; réarrangements ; compaction ; dilatance ; régime métastable ; préparation à l'avalanche

1 Introduction

Lorsqu'un matériau granulaire est incliné dans le champ de gravité, il se met spontanément à couler lorsque la pente de sa surface libre atteint l'angle limite de stabilité (ou angle d'avalanche) θ_a , et l'avalanche ainsi déclenchée fait alors relaxer la pente à l'angle de repos $\theta_r < \theta_a$ [1, 2]. Cette gamme d'angles $[\theta_r; \theta_a]$ caractérise l'hystérésis entre les états statique et coulant du matériau granulaire.

Cet intervalle d'angles $[\theta_r; \theta_a]$ correspond à un régime de métastabilité du matériau granulaire. En effet, une perturbation appliquée à la surface d'un matériau granulaire à l'état statique implique des déplacements dans une zone de plus en plus étendue pour des valeurs de pente $\theta \rightarrow \theta_r$ [3]. En outre, une telle perturbation déclenche une avalanche pour des valeurs $\theta \in [\theta_r; \theta_a]$, et l'amplitude de la perturbation nécessaire diminue avec θ jusqu'à s'annuler pour $\theta = \theta_a$ [4]. De plus, des études numériques [5] et expérimentales [6] rendent compte de l'observation d'instabilités locales apparaissant à l'approche du seuil d'écoulement du matériau granulaire. En particulier, Staron *et al.*[5] ont montré l'apparition accélérée de clusters fragiles au sein du matériau granulaire à partir de θ_r , qui mènent à sa déstabilisation pour $\theta = \theta_a$.

Ces résultats relient la métastabilité d'un matériau granulaire à l'apparition de corrélations spatiales et temporelles à l'approche de l'avalanche, et conduisent à identifier $[\theta_r; \theta_a]$ comme une zone importante pour la préparation à l'avalanche. Dans la suite, on se réfère à cet intervalle métastable par le terme de régime de préparation à l'avalanche. Nous réalisons des simulations numériques discrètes dans lesquelles un empilement granulaire est conduit dans l'intervalle métastable $[\theta_r; \theta_a]$ par rotation dans le champ de gravité. Nous montrons que la réponse en déformations de l'empilement granulaire est fortement

modifiée par le régime de préparation à l'avalanche.

2 Protocole numérique

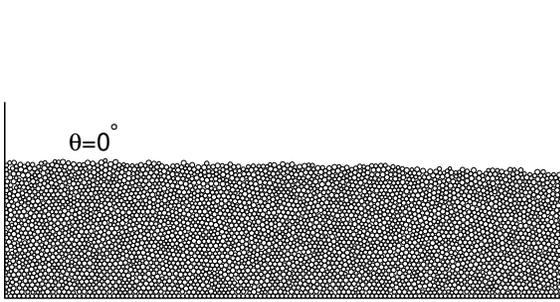


FIG. 1 – Lit granulaire à deux dimensions constitué de 4000 disques incliné de façon cyclique et quasi-statique dans le champ de gravité.

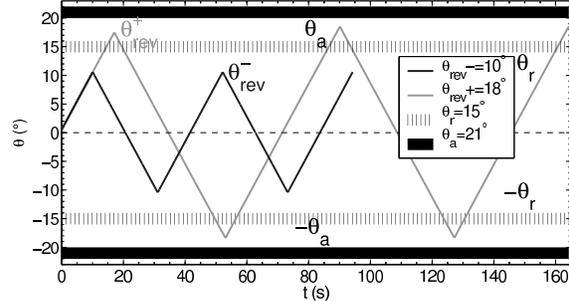


FIG. 2 – Mesure de la pente θ de la surface libre du lit granulaire durant les cycles de rotation ($\theta_{rev}^+ = 18^\circ$, $\theta_{rev}^- = 10^\circ$, $\theta_r \simeq 15^\circ$, $\theta_a \simeq 21^\circ$).

Les simulations numériques discrètes sont réalisées grâce à un algorithme de dynamique des contacts [7]. Dans ce cadre, les particules sont considérées comme parfaitement rigides et leurs collisions sont inélastiques. Elles interagissent entre elles par une loi de frottement de type Coulomb ($\mu = 0.5$).

Le milieu granulaire étudié est représenté sur la figure 1. Il est constitué d'une boîte à deux dimensions remplie de 4000 disques de diamètre moyen D et de polydispersité $(D_{max} - D_{min})/D \simeq 40\%$, de hauteur $\approx 35D$ et de largeur $\approx 120D$. Le lit granulaire est incliné de façon quasi-statique dans le champ de gravité, tel que la pente de sa surface libre θ augmente depuis $\theta = 0^\circ$ jusqu'à une inclinaison maximale $\theta = \theta_{rev}$. Le sens de la rotation est alors inversé, de sorte que l'empilement est ramené à l'horizontale. La rotation est poursuivie jusqu'à ce que la pente atteigne l'inclinaison maximale opposée $-\theta_{rev}$, puis l'empilement est à nouveau ramené à l'horizontale, ... Ce cycle de charge-décharge est répété deux fois successives, comme représenté sur la figure 2. Une expérience complète consiste à réaliser ces cycles pour 50 empilements granulaires différents par la configuration initiale de leurs grains. Nous avons vérifié que les comportements observés étaient reproductibles d'une réalisation à l'autre. La mesure des angles caractéristiques θ_r et θ_a pour les 50 empilements granulaires fournit les valeurs moyennes : $\theta_r \simeq 15^\circ$ et $\theta_a \simeq 21^\circ$.

Afin d'étudier l'influence du régime de préparation à l'avalanche situé dans l'intervalle d'angles $[\theta_r; \theta_a]$ sur la réponse du matériau granulaire, deux valeurs de θ_{rev} sont testées. La plus petite amplitude du cycle θ_{rev}^- est choisie en-dessous du régime métastable : $\theta_{rev}^- = 10^\circ < \theta_r$. La plus grande amplitude θ_{rev}^+ est choisie dans l'intervalle $[\theta_r; \theta_a]$: $\theta_{rev}^+ = 18^\circ \in [\theta_r; \theta_a]$. Nous avons par ailleurs vérifié que θ_{rev}^+ était inférieur au plus petit des angles θ_a mesurés, afin de prévenir la mise en écoulement du matériau granulaire.

3 Déformations du matériau granulaire à l'approche de l'avalanche

Lors de l'entraînement en rotation de l'empilement granulaire, les grains sont forcés de se réarranger si leur position n'est plus stable dans leur nouvel environnement et si les contraintes stériques leur permettent. La déformation volumique du lit granulaire estimée par $\epsilon_V = (V - V_0)/V_0$, à partir du volume de l'empilement V et de son volume initial V_0 , nous renseigne sur l'effet de ces réorganisations locales à l'échelle de l'empilement. La figure 3 représente la déformation volumique en fonction de l'inclinaison du lit granulaire au cours de cycles de charge-décharge à $\theta_{rev}^- = 10^\circ$ et $\theta_{rev}^+ = 18^\circ$. On remarque des variations brutales de la déformation volumique. Les réarrangements ont lieu de façon intermittente. Dans

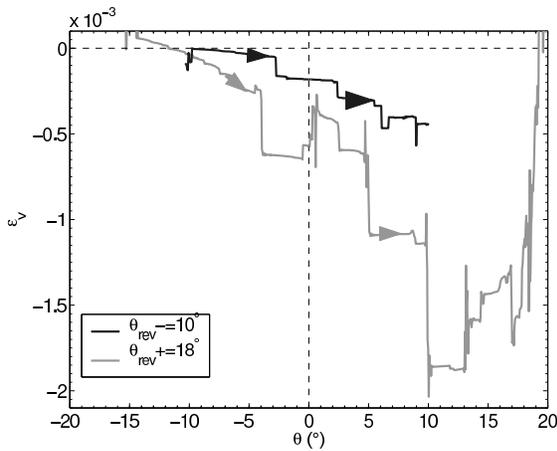


FIG. 3 – Estimation des déformations volumiques d'un lit granulaire en fonction de l'inclinaison pour un cycle à θ_{rev}^- et un cycle à θ_{rev}^+ .

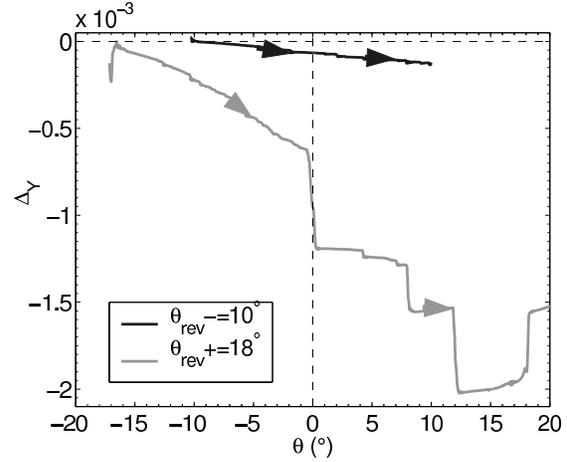


FIG. 4 – Déplacements verticaux du barycentre d'un lit granulaire en fonction de l'inclinaison pour un cycle à θ_{rev}^- et un cycle à θ_{rev}^+ .

un premier temps pour des inclinaisons $\theta \lesssim \theta_r$, ces réarrangements sont essentiellement contractants $-\epsilon_V$ décroît- et conduisent à tasser l'empilement. Le centre de masse du lit granulaire tend en effet à se déplacer vers le bas. C'est ce que montre la figure 4 qui représente $\Delta_Y = (Y - Y_0)/Y_0$, Y étant la position verticale du barycentre du matériau granulaire et Y_0 sa position verticale initiale, l'axe vertical étant ascendant. On remarque à nouveau que les déplacements apparaissent par intermittence. Les grains parviennent à minimiser leur énergie potentielle $-\Delta_Y$ décroît- afin d'atteindre une configuration globale plus stable. À l'inverse, à partir de $\theta \gtrsim \theta_r$, l'empilement devient dilatant, *ie* il augmente son volume : les seuls déplacements possibles localement accroissent l'énergie potentielle de l'empilement granulaire.

L'empilement granulaire exhibe donc une phase contractante suivie d'une phase dilatante. Ce comportement est classique des expériences de cisaillement d'un matériau granulaire dense, car sa déformation n'est possible que si les grains se désimbriquent. C'est le principe de dilatance de Reynolds, qui fait de l'augmentation de volume une condition nécessaire à l'établissement d'un écoulement de surface. Étant donné le caractère intermittent et fluctuant des déformations mesurées dans un empilement granulaire, nous observons par la suite le comportement moyen des 50 empilements granulaires, afin d'étudier plus précisément l'intervalle $[\theta_r; \theta_a]$.

Au cours des cycles successifs, on observe que le lit granulaire se densifie. La figure 5 représente la compacité C moyennée sur 50 empilements granulaires en fonction de la pente de la surface libre au cours des cycles à θ_{rev}^- et θ_{rev}^+ . La compacité représente le ratio du volume effectivement occupé par les grains sur le volume total du lit granulaire. On observe qu'elle croît de 0.785 à 0.788, ce qui représente une augmentation de 0.5%. La consolidation ainsi obtenue dans le cas de sollicitations quasi-statiques s'avère être du même ordre de grandeur (10^{-3}) que celle observée après l'occurrence d'avalanches [8]. La compaction résulte uniquement des déformations causées par les réarrangements, puisque les grains sont indéformables. On remarque que pour les cycles peu amples à θ_{rev}^- , la compaction est monotone : l'empilement se densifie autant en charge qu'en décharge. Au contraire, lorsque l'empilement est emmené à des inclinaisons $\theta \gtrsim \theta_r$ dans le cas des grands cycles à θ_{rev}^+ , celui-ci se dilate. Cette phase de dilatance rend la compaction très efficace : l'empilement granulaire se densifie à un taux deux fois plus élevé s'il a parcouru le régime de préparation à l'avalanche, *ie* l'intervalle $[\theta_r; \theta_a]$, y compris au voisinage de l'horizontale.

La dilatance observée systématiquement dans le régime de préparation à l'avalanche, *ie* pour $\theta \gtrsim \theta_r$, coïncide avec les fortes déformations cisailantes du matériau granulaire. Si on estime la déformation cisailante du lit granulaire d'après $\epsilon_c = (X - X_0)/X_0$, X étant la position du barycentre du matériau

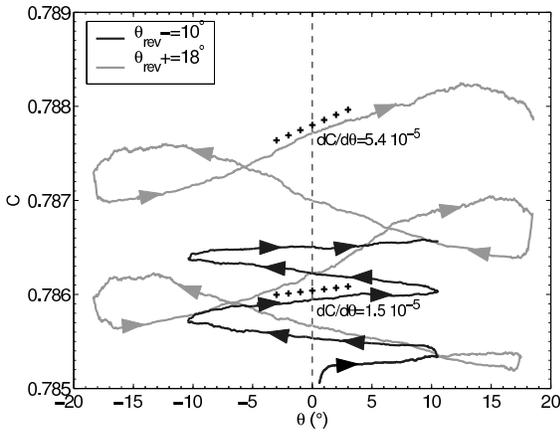


FIG. 5 – Compacité moyennée sur 50 empilements granulaires en fonction de l'inclinaison au cours des cycles à θ_{rev}^- et θ_{rev}^+ .

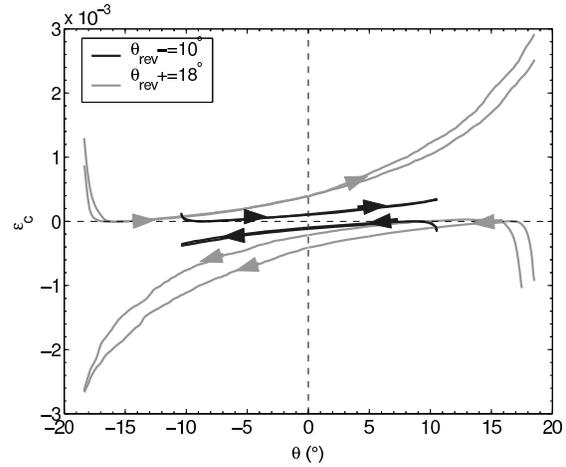


FIG. 6 – Estimation des déformations cisailantes sur 50 empilements granulaires en fonction de l'inclinaison au cours des cycles à θ_{rev}^- et θ_{rev}^+ .

granulaire parallèlement au fond fixe de la boîte et X_0 sa position initiale, on s'aperçoit en effet que ϵ_c augmente significativement lorsque le phénomène de dilatance a lieu. C'est ce que montre la figure 6 qui représente la déformation cisailante moyennée sur 50 empilements granulaires en fonction de l'inclinaison au cours des cycles de rotation à θ_{rev}^- et θ_{rev}^+ . Les cycles à θ_{rev}^- induisent de faibles déformations cisailantes : $|\epsilon_c| < 5.10^{-4}$. Par contre, lorsque le lit granulaire traverse la zone de préparation à l'avalanche et qu'il se dilate, les déformations cisailantes augmentent : $|\epsilon_c| \rightarrow 3.10^{-3}$. On peut penser que c'est la dilatance observée dans le cas des grands cycles à θ_{rev}^+ qui permet au matériau granulaire de se déformer, contrairement au cas des petits cycles à θ_{rev}^- .

Cette aptitude accrue à se réarranger et à se déformer dans le cas des grands cycles à θ_{rev}^+ est visible également sur l'ampleur des instabilités locales apparaissant à l'approche de l'avalanche. L'énergie cinétique aussi bien que la quantité de grains impliqués dans les réarrangements montrent que ces réarrangements sont plus importants dans le cas des plus grands cycles à θ_{rev}^+ , même pour des faibles valeurs de l'inclinaison du lit granulaire. On peut par exemple identifier un grain comme mobile s'il parcourt au moins un déplacement de $D/100$ pendant l'intervalle de temps $\sqrt{D/g}$, g étant l'accélération de la pesanteur. La figure 7 représente la proportion P_{mob} de grains dits mobiles dans 50 empilements granulaires en fonction de l'inclinaison au cours des cycles à θ_{rev}^+ et θ_{rev}^- . On observe que loin du régime de préparation à l'avalanche, une faible proportion de grains est mise en mouvement lors des réarrangements, au maximum 5%. À l'approche de θ_r , on remarque une augmentation significative de la population dite mobile jusqu'à 15%. Les grands cycles ($\theta_{rev}^+ = 18^\circ$) mettent en jeu davantage de grains que les petits cycles ($\theta_{rev}^- = 10^\circ$), même pour de faibles pentes de l'empilement granulaire. Les réarrangements sont d'autant plus importants pendant toute la durée de la sollicitation, que l'empilement s'est auparavant approché de la limite de déstabilisation.

En résumé, le passage de l'empilement granulaire dans la zone de préparation à l'avalanche impose une dilatance qui donne à l'empilement une plus grande mobilité dont on a vu qu'il en résultait une compaction plus efficace. On vérifie ainsi que la compaction d'un empilement granulaire est très dépendante du chemin des sollicitations appliquées. D'autres études [9, 10] ont montré que la compaction est significativement améliorée pour des chargements cycliques avec permutation des directions principales des contraintes, ou bien pour des essais avec rotation continue des directions principales des contraintes.

Enfin, la légère compaction du lit granulaire - diminution du volume $\approx 20V$, V étant le volume moyen d'un grain, par rapport aux 4000 grains de l'empilement - a un effet sur sa limite de stabilité. L'angle d'avalanche θ_a tend à augmenter avec le nombre de cycles - augmentation de 1° pour une compaction de

0.5% après deux cycles à θ_{rev}^+ -, et cette augmentation du seuil d'écoulement est effectivement corrélée au volume de l'empilement granulaire au moment de l'avalanche. Evesque *et al.*[11] ont observé un effet de la densité de l'empilement granulaire, notamment sur l'angle d'avalanche dans le cas d'expériences sur des sables.

4 Contribution des contacts faibles à la déformation du matériau granulaire

La déformation volumique de l'empilement granulaire au cours des cycles de rotation, résulte d'une succession d'instabilités, consistant en des réarrangements du réseau des contacts. Dans le cas du chargement biaxial d'un matériau de grains indéformables, Combe [12] a par exemple observé que la déformation à l'échelle macroscopique consistait en une suite de réarrangements locaux. Alonso et Herrmann [13] ont également observé l'accumulation de déformations plastiques au cours de chargements cycliques d'un matériau granulaire. Sachant que deux populations de contacts -forts et faibles- contribuent à la structure d'un matériau granulaire dense [14, 15], on peut se demander quelle est leur contribution respective à ces réarrangements.

Rappelons qu'un contact est dit fort (resp. faible) s'il transmet une force normale supérieure (resp. inférieure) à la moyenne des forces normales aux contacts. Étant donné que l'empilement granulaire est soumis au champ de gravité, il en résulte un gradient vertical des forces de contact, tel que la moyenne sur les contacts à l'altitude h des forces vérifie : $\langle f \rangle(h) \propto h$. Pour définir l'appartenance d'un contact à l'altitude h au réseau fort ou faible, nous comparons la force normale qu'il transmet à la moyenne sur les contacts à la même altitude h des forces normales.

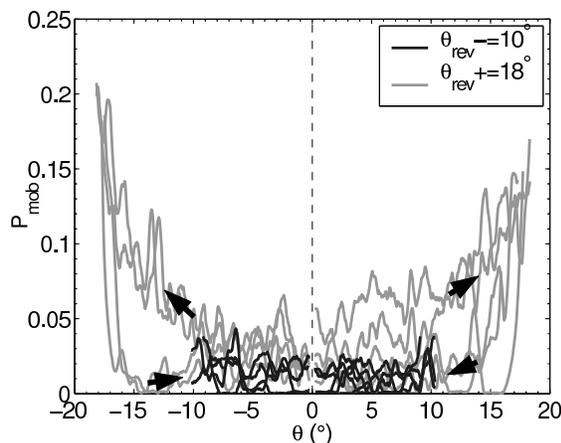


FIG. 7 – Proportion de billes mobiles (voir texte pour la définition) en fonction de l'inclinaison du lit granulaire au cours des cycles à θ_{rev}^- et θ_{rev}^+ .

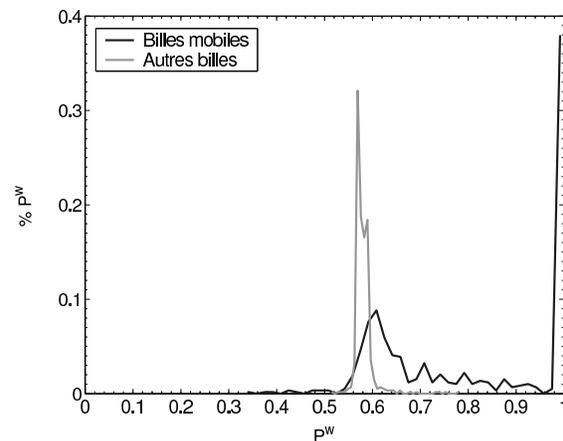


FIG. 8 – Histogrammes du pourcentage P^w de contacts faibles pour les billes mobiles et les autres billes au cours d'un cycle (voir texte).

Nous étudions l'état des contacts -fort ou faible- des grains engagés dans les réarrangements, c'est-à-dire des grains mobiles définis ci-dessus, par comparaison aux autres grains. L'évaluation systématique pour chaque grain de la proportion P^w de ses contacts faibles parmi tous ses contacts, permet une analyse statistique de P^w parmi les grains dits mobiles et les autres grains non mobiles. La figure 8 représente les histogrammes $\%P^w$ de la proportion de contacts faibles P^w pour les grains mobiles et pour les autres grains au cours d'un cycle de charge-décharge. Pour les grains à l'équilibre (dans la limite de notre définition de non mobilité), 60% de leurs contacts appartiennent au réseau faible. Par contre, nous remarquons que la majorité des grains impliqués dans les réarrangements ont tous leurs contacts faibles -100%-. Bien que tout contact, fort ou faible, soit susceptible de glisser à condition que les forces tangentielle f_T et normale f_N satisfassent le critère de Coulomb : $f_T/f_N = \mu$, μ étant le seuil de frottement, ce sont les contacts faibles qui sont surtout impliqués dans les réarrangements.

L'étude numérique de Staron *et al.*[5] a mis en évidence le rôle crucial des contacts au seuil de Coulomb dits contacts critiques, dans les mécanismes de déstabilisation, et a montré que ces contacts critiques étaient essentiellement présents dans le réseau faible. On peut penser que ce sont ces contacts critiques, qui sont impliqués dans les instabilités locales et intermittentes et qui permettent ainsi à l'empilement granulaire de se déformer et notamment de se densifier au cours des cycles de rotation.

5 Conclusions

Nous simulons par dynamique des contacts la rotation cyclique d'un empilement granulaire dans le champ de gravité jusqu'à une inclinaison maximale inférieure à l'angle d'avalanche θ_a , afin d'assurer une réponse quasi-statique du matériau granulaire. En faisant varier l'angle d'inclinaison maximale, nous étudions le régime de préparation à l'avalanche identifié dès l'angle de repos du matériau granulaire θ_r .

Nous observons une réponse en déformations de l'empilement granulaire modifiée par son passage dans l'intervalle $[\theta_r; \theta_a]$. La dilatance ayant lieu dans cet intervalle en raison de la proximité de la déstabilisation permet de plus amples déformations qui perdurent pour de faibles inclinaisons. Ces déformations affectent essentiellement le réseau de contacts faibles. Ces premiers résultats suggèrent une transformation majeure de l'état interne du matériau granulaire dans l'intervalle métastable $[\theta_r; \theta_a]$.

La réponse micro-mécanique de l'empilement granulaire doit être davantage explorée pour évaluer la modification de son état interne induit par le régime de préparation à l'avalanche, et pour mieux comprendre comment la nature bi-phasique -phases forte et faible- du matériau granulaire influence son comportement [16].

Références

- [1] P. Evesque and J. Rajchenbach. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 223(307), 1988.
- [2] H. M. Jaeger, C. Liu, and S. R. Nagel. *Phys. Rev. Lett.*, 62(1), 1989.
- [3] S. Deboeuf, E. M. Bertin, E. Lajeunesse, and Olivier Dauchot. *Eur. Phys. J. B*, 36, 2003.
- [4] A. Daerr and S. Douady. *Nature*, 399, 1999.
- [5] L. Staron, J.-P. Vilotte, and F. Radjai. *Phys. Rev. Lett.*, 89(20), 2002.
- [6] A. Kabla, G. Debregeas, J.-M. di Meglio, and T. J. Senden. soumis, 2004.
- [7] J.-J. Moreau. *European Journal of Mechanics A/Solids*, pages 93–114, 1994.
- [8] G.C. Barker and A. Mehta. *Phys. Rev. E*, 61(6), 2000.
- [9] E. Flavigny and J. Lanier. In *Actes des Journées L. Ménéard, CFMS*, 1995.
- [10] H.A. Joer, J. Lanier, and M. Fahey. *Géotechnique*, 48(5), 1998.
- [11] P. Evesque, D. Fargeix, P. Habib, M.P. Luong, and P. Porion. *Phys. Rev. E*, 47(4), 1993.
- [12] G. Combe. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [13] F. Alonso and H.J. Herrmann. *Phys. Rev. Lett.*, 92(5), 2004.
- [14] F. Radjai, M. Jean, J.J. Moreau, and S. Roux. *Phys. Rev. Lett.*, 77(2), 1996.
- [15] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, and J.-J. Moreau. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1), 1998.
- [16] S. Deboeuf, O. Dauchot, L. Staron, J.-P. Vilotte, and A. Mangeney. en préparation, 2005.