

Analyse multi-échelle de l'état des contraintes dans une pente granulaire évoluant vers la limite de stabilité

Lydie Staron¹, Jean-Pierre Vilotte² & Farhang Radjai³

¹ Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge CB3 0WA, UK
L.Staron@damtp.cam.ac.uk

² Institut de Physique du Globe de Paris, F-75252 Paris Cedex 5, France

³ Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, F-34095 Montpellier Cedex, France

Résumé :

Des simulations numériques de déstabilisation de pentes granulaires sont réalisées. L'évolution de l'état des contraintes des empilements granulaires est analysée aux échelles locales et globales. Nous mettons en évidence une transition peu avant l'avalanche suivant un mécanisme de type percolation. Ces résultats suggèrent une analogie entre instabilité d'avalanche et transition de phase.

Abstract :

Numerical simulations of granular slopes destabilisation are carried out. The evolution of the stress state is analysed both at local and global scale. We show the existence of a transition short before the avalanche following a percolation-like mechanism. These results suggest an analogy between avalanche instability and phase transition.

Mots-clefs :

granulaire, avalanche, simulation numérique, contrainte limite, percolation, métastabilité

1 Introduction

Au delà de la vision moyenne de Coulomb, qui repose sur la définition de propriétés de frottement effectif, la stabilité des pentes granulaires et le déclenchement des avalanches de surface demeurent un phénomène mal compris [1, 2, 3, 4]. En particulier, l'évolution de l'état interne des milieux granulaires à l'approche de la limite de stabilité reste à explorer. Afin d'aborder cet aspect, nous réalisons des expériences numériques de déstabilisation de pentes granulaires à deux dimensions. Alors que les empilements granulaires évoluent vers l'instabilité d'avalanche, nous analysons l'état des contraintes aux échelles locales et globales. Nous montrons que l'approche de la limite de stabilité implique une évolution de type percolation, suggérant une analogie avec un mécanisme de transition de phase. La modification de l'état interne des empilements observés constitue un précurseur important de l'avalanche. Le rôle probable de cette transition dans le comportement métastable des pentes granulaires reste à clarifier.

2 Méthode Numérique

2.1 L'algorithme de dynamique des contacts

Le milieu granulaire étudié est modélisé grâce à l'algorithme de dynamique des contacts appliqué à deux dimensions [5, 6]. Les grains sont circulaires et parfaitement rigides ; ils interagissent au contact par une loi de non-interpénétrabilité et une loi de frottement de Coulomb. Ces deux lois sont représentées Figure 1. La loi de non-interpénétrabilité impose que la force normale N appliquée au contact entre deux grains soit positive uniquement (excluant toute

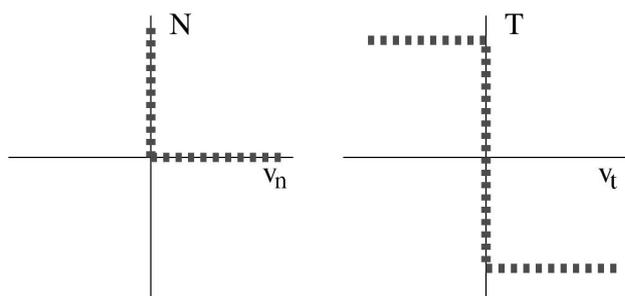


FIG. 1 – Lois de contact : non-interpénétrabilité (gauche) et frottement de Coulomb (droite).

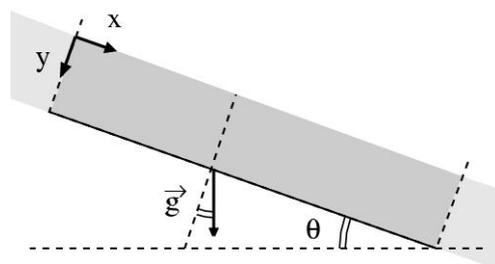


FIG. 2 – Schéma de l'expérience : un empilement bi-périodique est incliné à vitesse constante dans le champ de gravité.

adhésion), et s'annule dès que la vitesse relative normale v_n entre les grains devient positive (excluant toute interaction à distance). La loi de frottement de Coulomb implique que la force tangentielle au contact T soit bornée par le seuil de frottement de Coulomb $T_s = \mu N$, où μ est le coefficient de frottement de contact. La vitesse relative tangentielle v_t des grains au contact est nulle tant que T demeure inférieure à T_s ; réciproquement, un glissement non nul au point de contact implique $T = T_s$. De plus, l'introduction d'un coefficient de restitution Newtonien permet de contrôler la dissipation d'énergie lors des collisions.

Ces lois de contact sont non-régulières ; leur utilisation nécessite un processus itératif qui permet de résoudre les équations de la dynamique pour chaque grain. Quoique simplistes, elles permettent de reproduire très bien la dynamique d'ensemble d'une masse granulaire, et en particulier les effets collectifs induits par le réseau connexe des contacts [7].

2.2 Dispositif « expérimental »

Les simulations présentées ici ont été réalisées avec un coefficient de restitution nul et un coefficient de frottement constant $\mu = 0.5$. L'ordonnement géométrique de l'empilement des grains est considérablement atténué en choisissant leur diamètre d avec une probabilité uniforme dans un intervalle tel que $d_{max}/d_{min} = 1.5$; dans la suite, D désigne le diamètre moyen des grains. Les empilements étudiés sont réalisés par pluviométrie aléatoire des grains sur un fond rugueux. Afin de s'affranchir des effets de bord dus à la présence de parois verticales pour confiner le milieu, les empilements simulés sont *bi-périodiques*, c'est-à-dire infiniment reproduits dans la direction x (voir le schéma 2). La cellule de simulation initiale compte 8000 grains ; sa hauteur est $H \simeq 40D$ et sa largeur $L \simeq 200D$.

Les systèmes sont soumis à une rotation constante de $1^\circ s^{-1}$ dans le champ de gravité, de sorte que l'angle formé par la surface libre avec l'horizontale θ croît de 0 à l'angle d'avalanche θ_c pour lequel l'empilement est déstabilisé et un écoulement de surface apparaît.

3 Évolution de l'État des Contraintes

3.1 Définition du tenseur des contraintes

Afin d'évaluer l'état des contraintes à la fois à l'échelle de l'empilement entier et à l'échelle des grains, le concept de tenseur des moments internes est utilisé [8]. Dans un empilement évoluant de façon quasi-statique, ce tenseur M évalué pour un grain donné p obéit à l'expression

suivante :

$$M_{ij}(p) = \sum_{\alpha \in N_\alpha(p)} r_i^\alpha f_j^\alpha, \quad (1)$$

où i et j sont les directions de l'espace, α désigne les contacts dans lesquels le grain p est impliqué, r est le vecteur point de contact α repéré par rapport au centre du grain p , et f est la force appliquée au point de contact α . Par définition, ce tenseur est additif de sorte que le tenseur des moments évalué pour un volume de grains donné est simplement la somme des tenseurs évalués pour chaque grain individuellement. De plus, le tenseur des moments M par unité de volume tend vers le tenseur des contraintes de Cauchy lorsque le volume V sur lequel il est évalué devient grand. Nous avons alors $M = \sigma V$. Dans la suite, nous évaluerons donc l'état des contraintes de l'empilement en utilisant la définition 1.

3.2 Évolution des contraintes macroscopiques

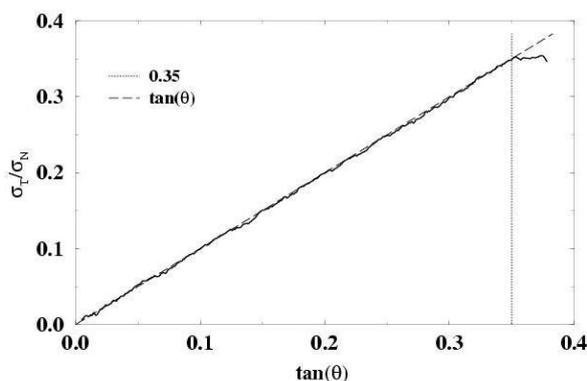


FIG. 3 – Évolution de σ_T/σ_N le long de la surface libre en fonction de $\tan(\theta)$.

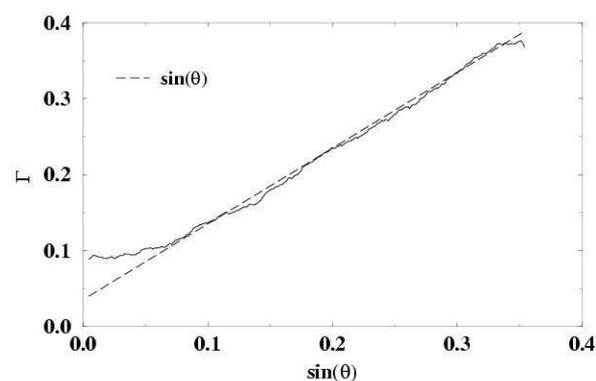


FIG. 4 – Évolution de Γ en fonction de $\sin(\theta)$ (voir texte pour la définition de Γ).

Dans un premier temps, l'état des contraintes est calculé pour l'empilement entier. En particulier, nous évaluons la contrainte normale σ_N et la contrainte tangentielle σ_T le long de la surface libre. L'équilibre des forces le long de la surface libre implique, tant que l'équilibre de l'empilement est préservé :

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_N} = \tan(\theta), \quad (2)$$

où θ est la pente de l'empilement (voir Figure 2). L'évolution du rapport σ_T/σ_N est représentée sur le graphe de la Figure 3 en fonction de $\tan(\theta)$. On observe que l'égalité 2 est parfaitement vérifiée. Le rapport du déviateur sur la pression $\Gamma = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)$, où σ_1 et σ_2 sont les valeurs propres du tenseur des contraintes, est représenté sur le graphe de la Figure 4 en fonction de $\sin(\theta)$. La valeur observée à $\theta = 0$ indique que l'état initial de l'empilement est légèrement anisotrope ; à ce décalage près, on observe $\Gamma \propto \sin(\theta)$. À partir de $\tan(\theta) \simeq 0.35$, c'est-à-dire $\theta \simeq 19.3$, l'accroissement de la contrainte cisailante en réponse à l'augmentation de la pente est interrompue. Le rapport σ_T/σ_N reste à peu près constant, d'où nous déduisons que le processus de rupture de pente et de départ d'avalanche est initié. Nous obtenons pour l'angle d'avalanche la valeur $\theta_c \simeq 19.3$. En suivant l'analyse de stabilité de Coulomb, nous pouvons définir le coefficient de frottement effectif de l'empilement μ_e tel que $\mu_e = \tan(\theta_c) = 0.35$ caractérisant la limite de stabilité. Nous définissons également la contrainte seuil $\Gamma_c = \sin(\theta_c)$ correspondant au maximum de chargement déviatorique acceptable avant rupture de l'empilement.

3.3 Distribution des contraintes locales

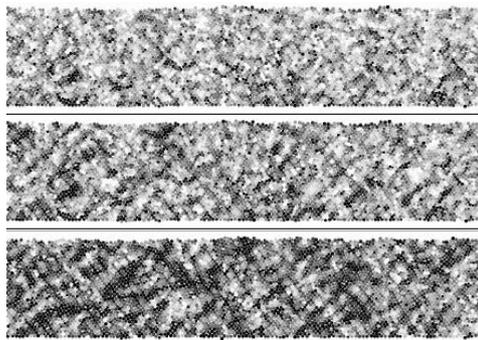


FIG. 5 – Carte des contraintes associées aux grains pour $\theta = 0$, $\theta = 10^\circ$ et $\theta = \theta_c$ (de haut en bas).

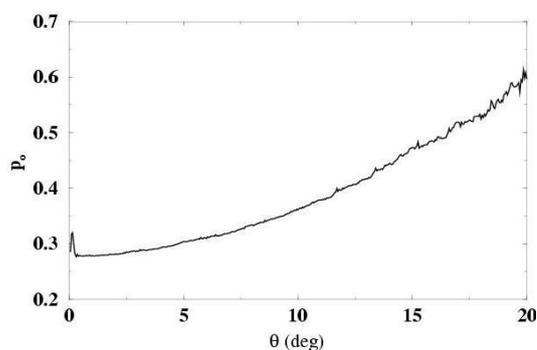


FIG. 6 – Proportion de grains surcontraints en fonction de la pente θ (voir texte pour les définitions).

Afin d'obtenir une image plus complète de la façon dont l'empilement dans son ensemble atteint l'état de contrainte limite Γ_c , nous nous intéressons au tenseur des contraintes des grains. Pour ce faire, nous calculons le tenseur des moments M de chaque grain suivant l'équation 1. Dans la suite nous nous intéressons au rapport des contraintes, nous n'avons donc pas besoin de définir le volume V sur lequel celles-ci sont calculées. Nous déduisons donc le comportement de σ directement à partir de M . Pour chaque grain, le rapport du déviateur sur la pression $\gamma = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)$ est calculé. La Figure 5 représente l'état de l'empilement pour trois valeurs de la pente $\theta = 0$, $\theta = 10^\circ$ et $\theta = \theta_c$; en noir sont représentés les grains tels que $\gamma > 2\Gamma_c$, tandis que les grains tels que $\gamma < 0.05$ sont représentés en blanc. Entre ces deux valeurs coupure, l'échelle de couleur est linéaire. Dans un premier temps, nous voyons dans la distribution des γ la grande hétérogénéité des contraintes locales. Alors que la pente augmente et que l'empilement s'achemine vers la limite de stabilité, les zones de plus fort déviateur croissent et se joignent, de sorte que petit à petit, des zones de plus fort chargement se contruisent.

4 Mécanisme de Percolation à l'Avalanche

Nous nous intéressons aux grains « surcontraints », dont l'état de contrainte a dépassé l'état de contrainte limite macroscopique, c'est-à-dire les grains tels que $\gamma \geq \Gamma_c$. L'évolution de la proportion p_0 de ces grains dans l'empilement en fonction de l'angle de la pente θ est représentée Figure 6. Elle croît de façon monotone et atteint la valeur maximum 0.6 au départ de l'avalanche à $\theta = \theta_c$. L'augmentation de la proportion de grains surcontraints correspond à une structuration particulière de l'empilement, comme observé précédemment. Leur apparition obéit à une distribution spatiale sous forme d'amas, rappelant un mécanisme de type percolation. Cette évolution apparaît clairement sur la Figure 7 qui montre la distribution spatiale des grains surcontraints (représentés en noir) pour $\theta = 0$, $\theta = 10^\circ$ et $\theta = \theta_c$. De manière à préciser l'évolution de l'état de contrainte locale de l'empilement, et de le corrélérer avec l'état de contrainte macroscopique (en particulier à l'initiation de l'avalanche), nous évaluons les corrélations spatiales qui caractérisent la distribution des contraintes. Pour cela, nous calculons pour chaque grain surcontraint le rayon du voisinage ℓ_c tel que dans ce voisinage, le tenseur des contraintes vérifie $(\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2) = \Gamma_c$ (voir Figure 8). Nous pouvons donc, au cours de l'évolution vers la limite de stabilité, calculer le rayon moyen $\langle \ell_c \rangle$ des zones ayant atteint l'état

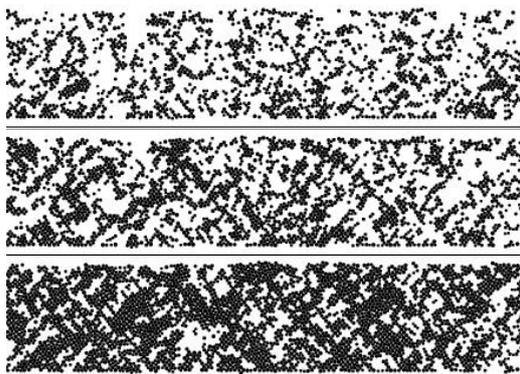


FIG. 7 – Distribution spatiale des grains surcontraints (en noir) pour $\theta = 0$, $\theta = 10$ et $\theta = \theta_c$ (de haut en bas).

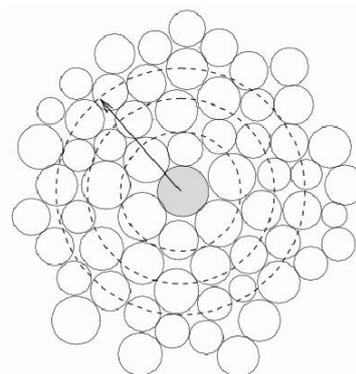


FIG. 8 – Voisinage circulaire de rayon l , centré sur un grain surcontraint, dans lequel le tenseur des contraintes est évalué.

de contrainte limite Γ_c , et surtout leur taille maximum ℓ_c^{max} . L'évolution de ces deux quantités est représentée sur les graphes 9-a et -b respectivement. On observe que $\langle \ell_c \rangle$ augmente d'abord très lentement puis de façon plus marquée à partir de $\theta = 15^\circ$, après quoi $\langle \ell_c \rangle$ oscille autour de la valeur $7D$. L'évolution de ℓ_c^{max} est plus frappante : une nette discontinuité à $\theta = 15^\circ$ amène ℓ_c^{max} à une taille comparable à la taille du système. Ce comportement, qui constitue un important précurseur de la déstabilisation, rappelle de nouveau un mécanisme de percolation ; il est intéressant de remarquer, sur la Figure 6, que la valeur prise par p_0 à $\theta = 15^\circ$ ($p_0 \simeq 0.45$) correspond au seuil de percolation de sites pour des empilements aléatoires à deux dimensions [9]. La figure 10 montre les variations de volume de l'empilement $\epsilon_V = |V - V_0|/V_0$ en fonction de θ , V étant le volume courant et V_0 le volume initial. On observe une phase de contractance suivie d'une phase de dilatance, classiquement observées lors du cisaillement de sables denses. La transition observée à $\theta = 15^\circ$ dans l'évolution des contraintes locales (Figure 9) correspond ici à la transition entre contractance et dilatance, et à l'apparition d'un cisaillement cohérent.

5 Conclusion

Nous avons analysé l'évolution des contraintes dans un empilement granulaire bidimensionnel évoluant vers l'instabilité d'avalanche en utilisant la simulation numérique par dynamique des contacts. Les contraintes sont calculées à la fois à l'échelle des grains et à l'échelle de l'empilement. Leur évolution est étudiée en fonction de la pente de la surface libre θ . Nous mettons en évidence l'existence d'une transition dans l'état des contraintes à $\theta = 15^\circ$, quelques degrés avant la déstabilisation qui se produit à $\theta = \theta_c \simeq 19.3^\circ$. L'intervalle $[15, \theta_c]$ correspond à l'apparition d'une déformation dilatante, et traduit une transformation de l'état du système. Cette transition suit un mécanisme de type percolation et suggère une analogie entre instabilité d'avalanche et transition de phase.

Ces résultats sont en accord avec l'analyse de la mobilisation des forces de frottement à la limite de stabilité [10, 11]. Il est tentant de voir dans le changement d'état observé quelques degrés avant l'angle limite θ_c , et dans la métastabilité des pentes granulaires dans cet intervalle d'angle [12], une même phénoménologie.

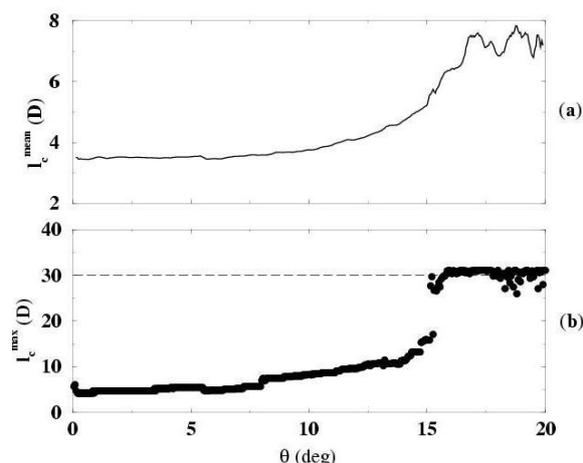


FIG. 9 – Taille moyenne $\langle \ell_c \rangle$ et taille maximum ℓ_c^{max} des zones ayant atteint l'état de contrainte limite Γ_c en fonction de θ .

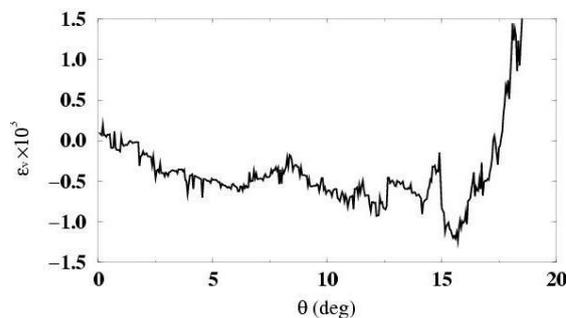


FIG. 10 – Variations du volume de l'empilement $\epsilon_V = |V - V_0|/V_0$ en fonction de θ .

Références

- [1] C.A. Coulomb. Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Acad. Roy. Sci. Math. Phys.*, 7 :343–382, 1773.
- [2] M. Oda, J. Koshini, and S. Nemat-Nasser. Some experimentally based fundamental results on the mechanical behavior of granular materials. *Geotechnique*, 30 :479–495, 1980.
- [3] P.-G. de Gennes. Granular matter : a tentative view. *Reviews of Modern Physics*, 71(2) :S374–S382, 1999.
- [4] F. Darve and F. Laouafa. Instabilities in granular materials and application to landslides. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 5 :627–652, 2000.
- [5] J.-J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, supp.(4) :93–114, 1994.
- [6] M. Jean. *Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterial motions*. Elsevier Science Publishers B.V., 1994.
- [7] F. Radjai. Multicontact dynamics. In H. J. Herrmann, J.-P. Hovi, and S. Luding, editors, *Physics of dry granular media - NATO ASI Series E350*, pages 305–311, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.
- [8] J.J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 233–247, Singapore, 1997. World Scientific.
- [9] H. L. Frisch, E. Sonnenblick, V. A. Vyssotsky, and J. M. Hammersley. Critical percolation probabilities (site problem). *Phys. Rev.*, 124 :1021, 1961.
- [10] L. Staron, J.-P. Vilotte, and F. Radjai. Preavalanche instabilities in a granular pile. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :204302–1, 2002.
- [11] L. Staron, J.-P. Vilotte, and F. Radjai. Multi-scale analysis of the stress state in a granular slope in transition to failure. *cond-mat/0409619*, 2004.
- [12] A. Daerr. *Dynamique des avalanches*. PhD thesis, Université Denis Diderot Paris 7, 2000.