

Pourquoi les spaghetti cassent en 3 morceaux ?

(quand une rupture en entraîne une autre)

Sébastien Neukirch et Basile Audoly

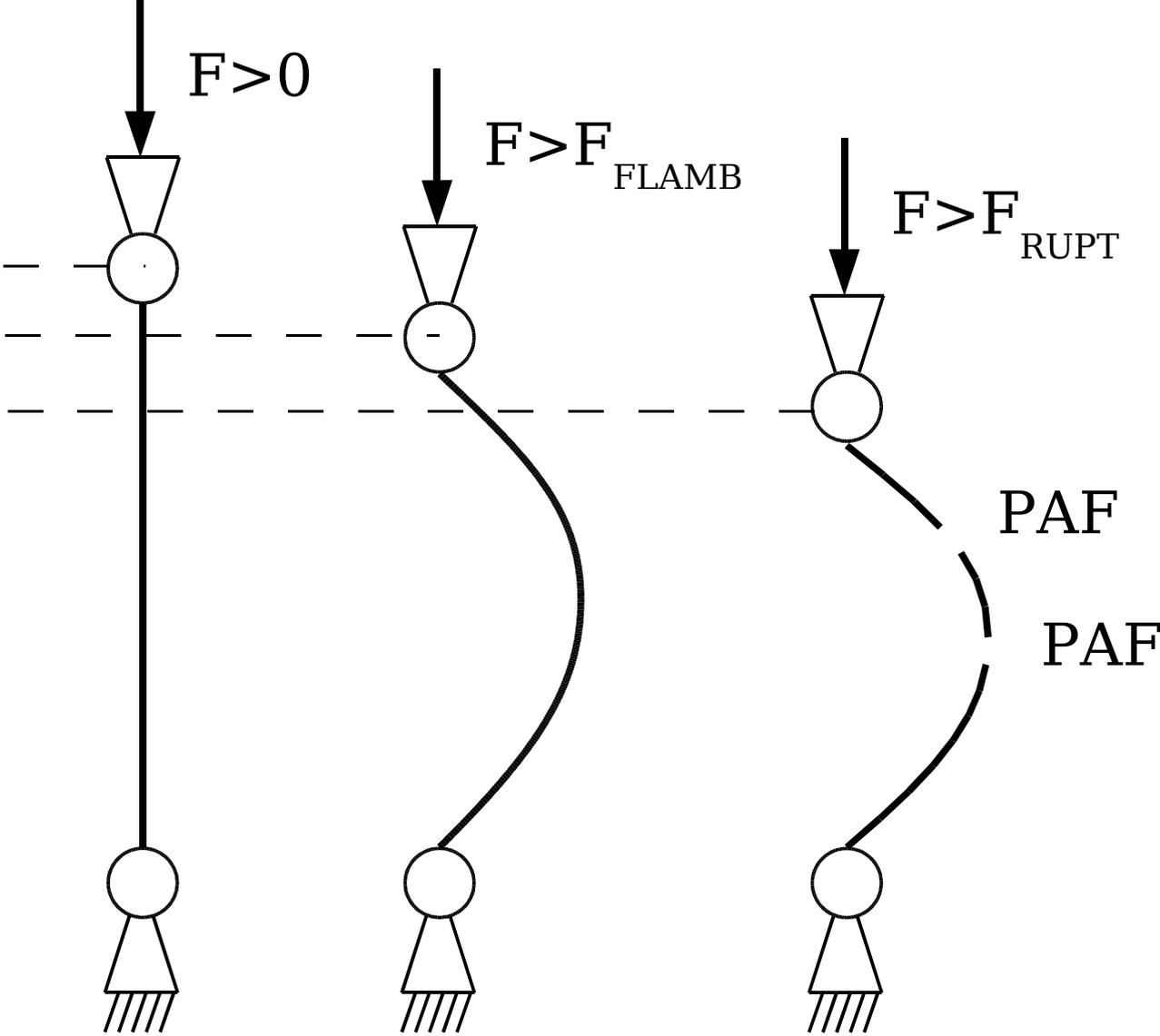
Laboratoire de modélisation en mécanique
CNRS et Université P. et M. Curie

www.lmm.jussieu.fr/spaghetti

expériences avec l'aide de Luc Lebon et Denis Vallet (PMMH-ESPCI)

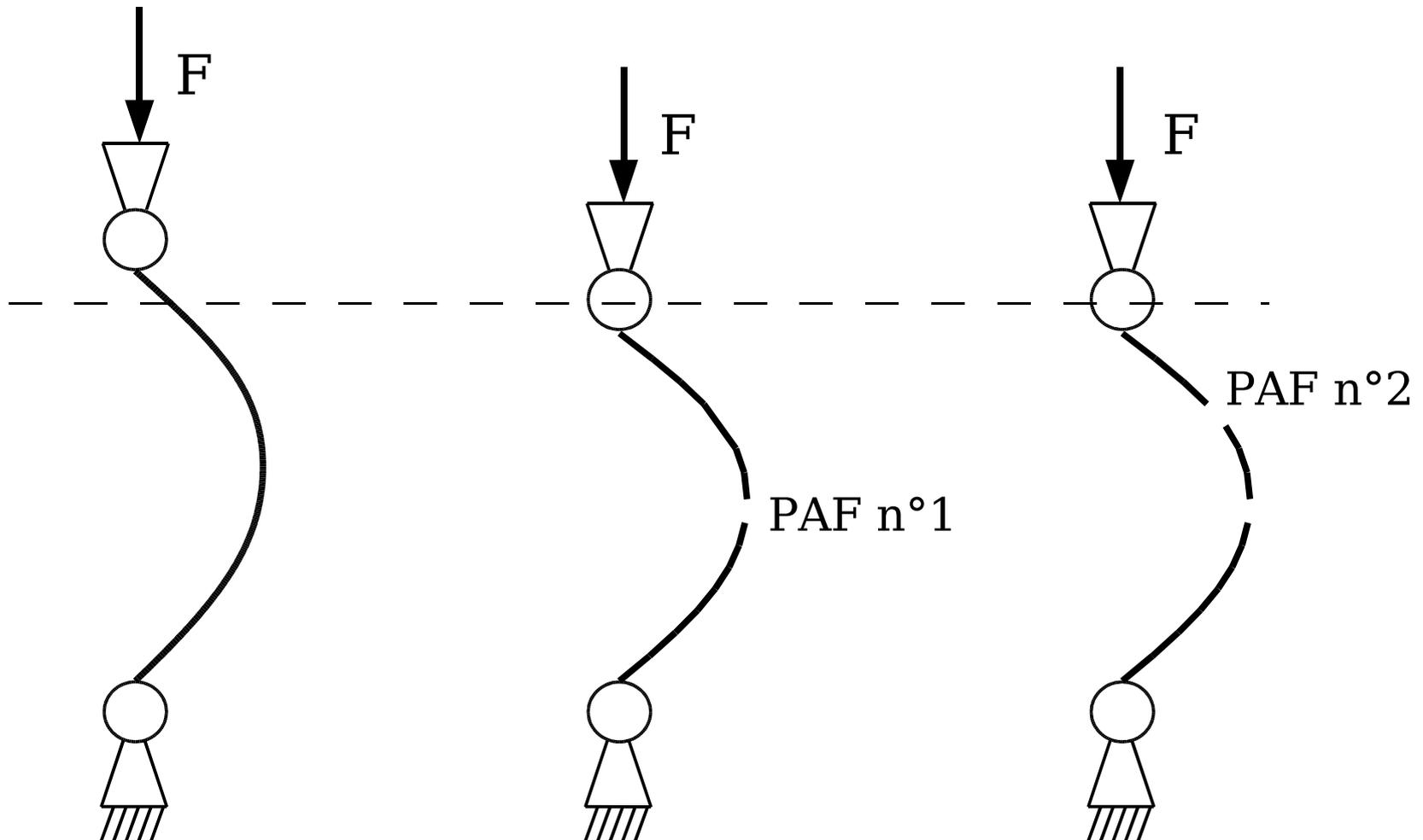
Expérience type

- Problème classique
- Feynman cuisine

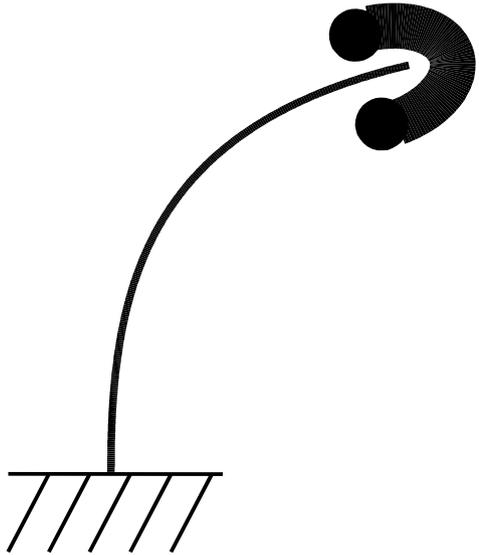


Hypothèses

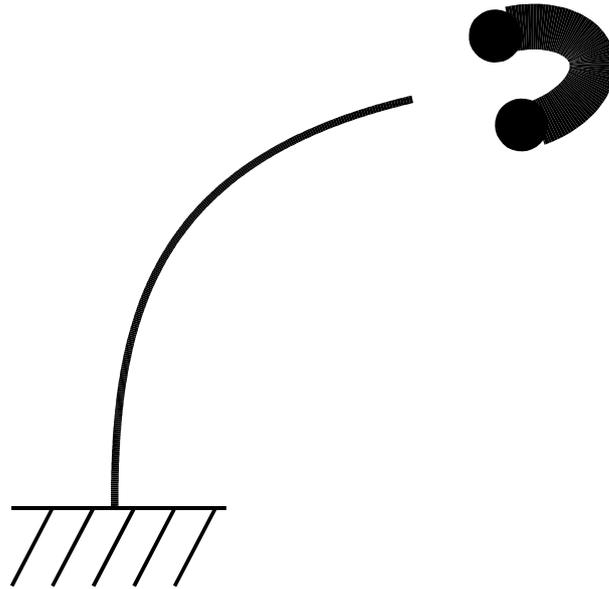
- Ruptures ne sont pas synchrones
- Une rupture entraîne l'autre
- Relâchement courbure induit 2ème rupture (!)



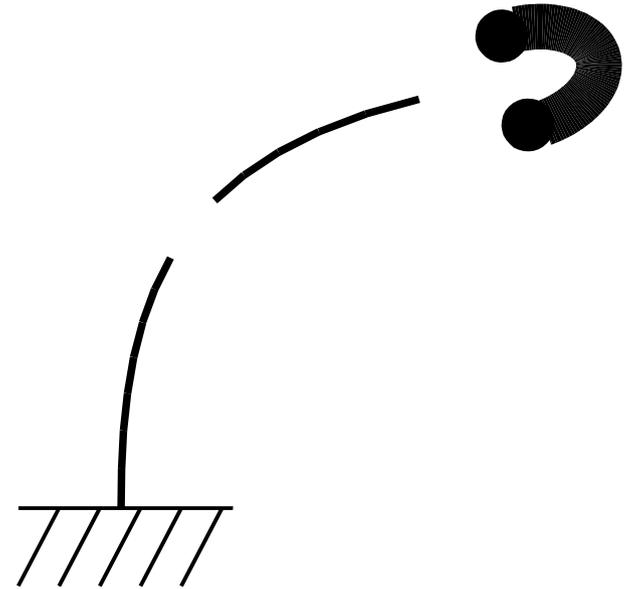
Expérience test : la catapulte à vide



on courbe
proche
limite
rupture



on relâche

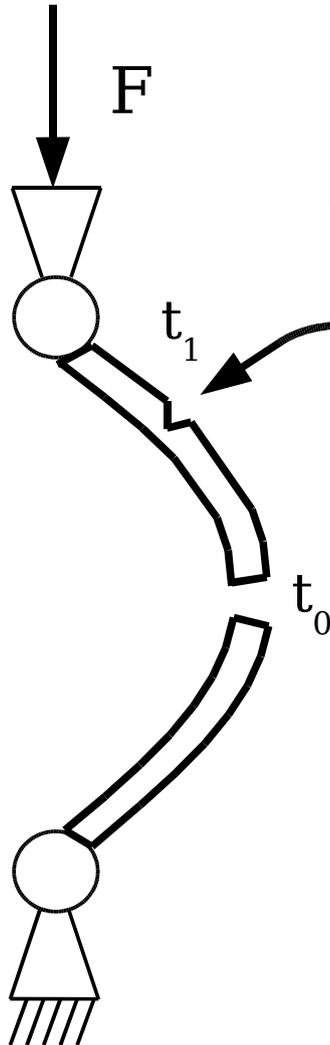
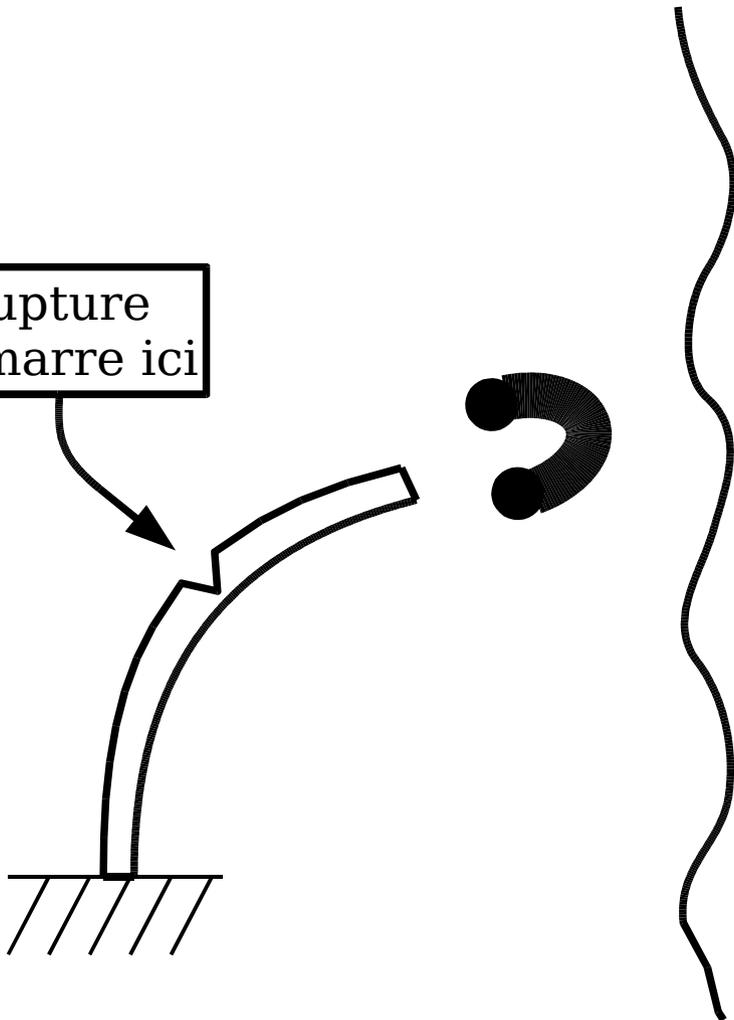


la tige se brise

Ondes de flexion

- video
- onde de sur-courbure
- casse au dessus !

rupture
démontre ici



Période d'oscillation

$$T_{AB} \simeq 0.9 L^2 \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}$$

2ème rupture démarre ici

$$t_1 - t_0 \ll T_{AB}$$

Dynamique d'une tige élastique

- Équations de Kirchhoff (structure élancée, élasticité 1D)

$$\vec{F}' = \rho A \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{M}' + \vec{r}' \times \vec{F} = \rho I (\vec{d}_1 \times \ddot{\vec{d}}_1 + \vec{d}_2 \times \ddot{\vec{d}}_2)$$

$$' \equiv \frac{d}{ds} \quad \text{et} \quad \dot{\cdot} \equiv \frac{d}{dt}$$

A : aire de la section

I : moment d'inertie de la section

F : force interne (moyenne dans section)

M : moment interne (moyenne)

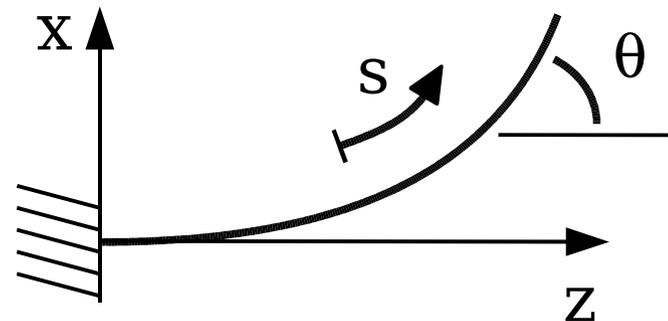
- On linéarise autour de la configuration droite

$$EI \kappa'''' + \rho A \ddot{\kappa} = \rho I \ddot{\kappa}''$$

$M = EI \kappa$: relation de constitution linéaire

E : module de Young

ρA : masse linéique

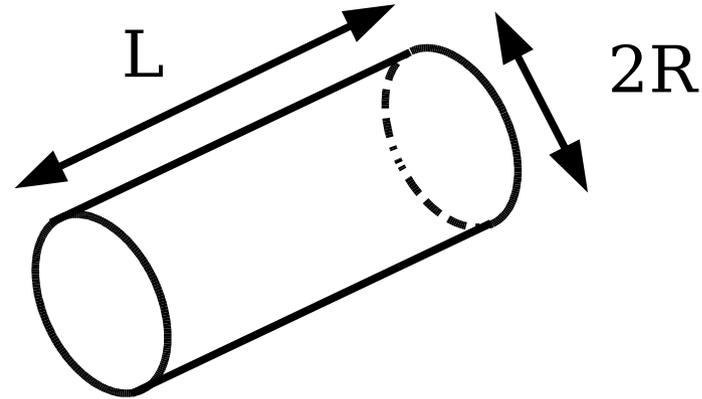


Ordres de grandeur & adimensionnement

- Variables d'espace

$$s = S/L \quad : \quad s \in [0; 1]$$

$$\kappa = K/L \quad \text{et} \quad x = X/L$$



- Variables de temps

élancement : $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} L \sqrt{\frac{A}{I}} = \frac{2L}{R} \simeq 1000$

vitesse du son : $c \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \simeq 1000 \text{ m/s}$

$t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T}{\lambda L/c} \quad : \quad t \in [0; 10/\lambda]$

↘ ~10 ms

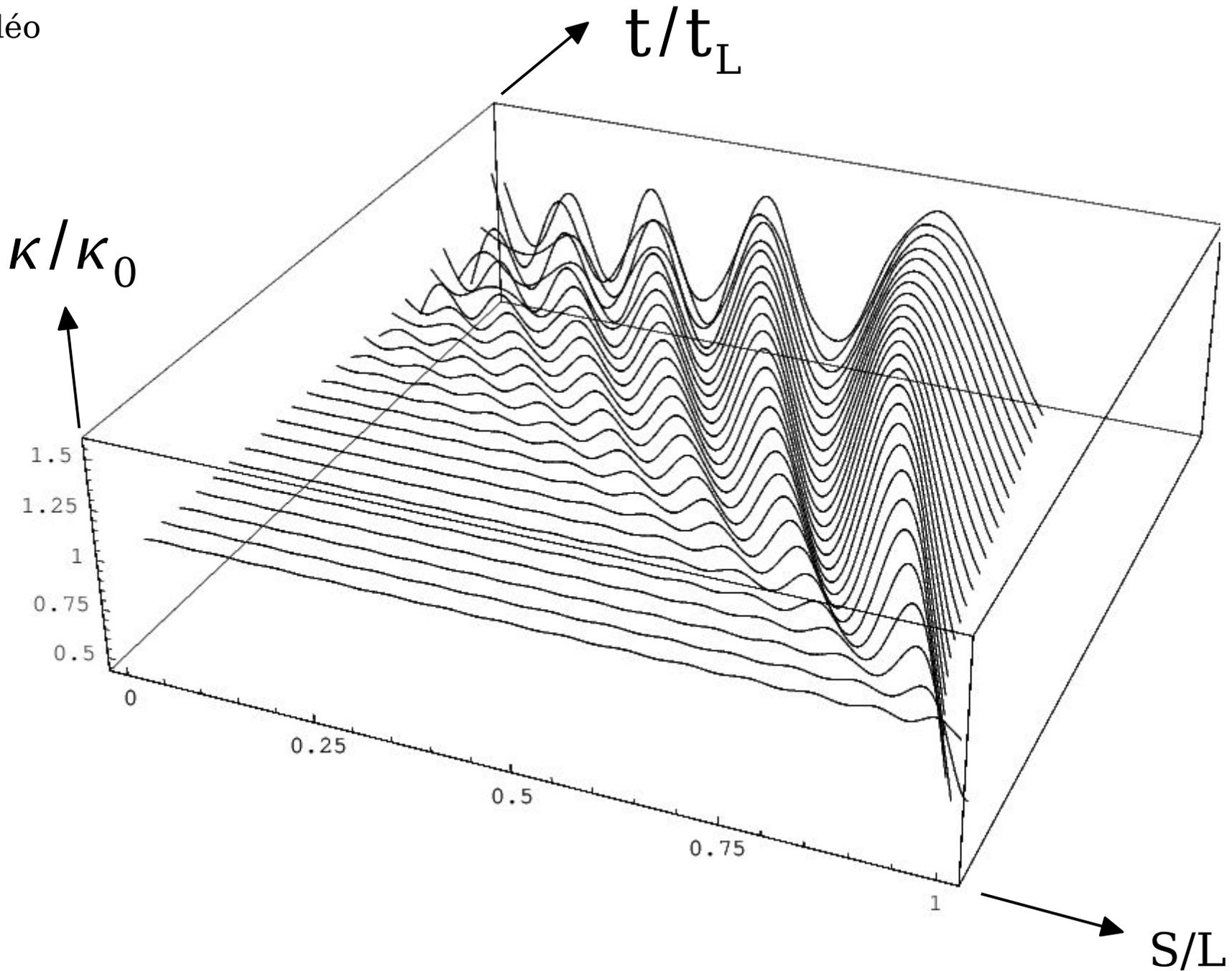
→ $t_L \stackrel{\text{def}}{=} \lambda L/c$: temps (long) que met le son pour traverser λ tiges (~0.25s)

L'équation devient : $\kappa'''' + \ddot{\kappa} = \frac{\ddot{\kappa}'''}{\lambda^2}$

↗ on néglige
inertie en rotation de la section
mvt rapide % flexion

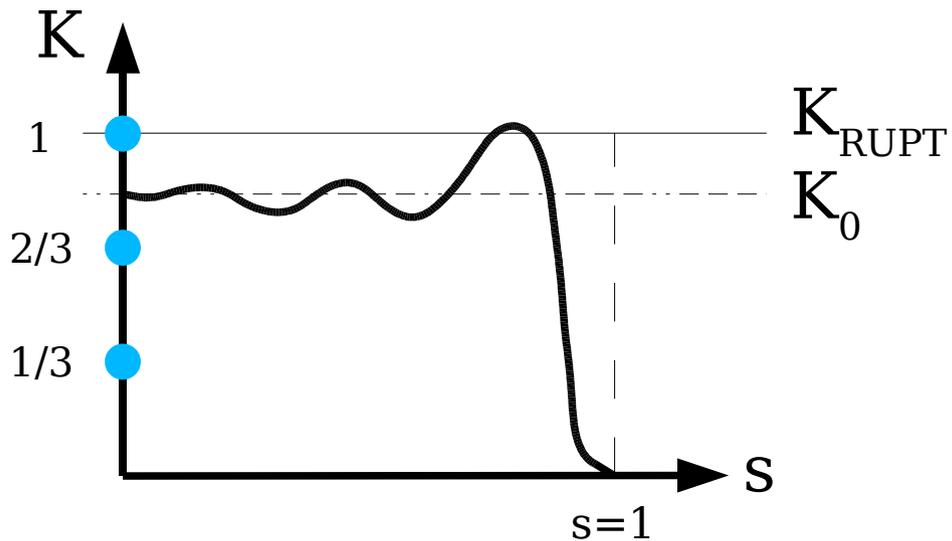
Diagramme spatio-temporel de la solution

+vidéo

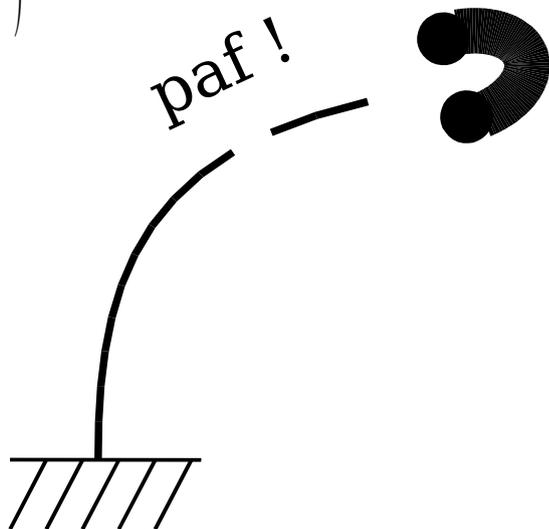


Où la pâte casse-t-elle ?

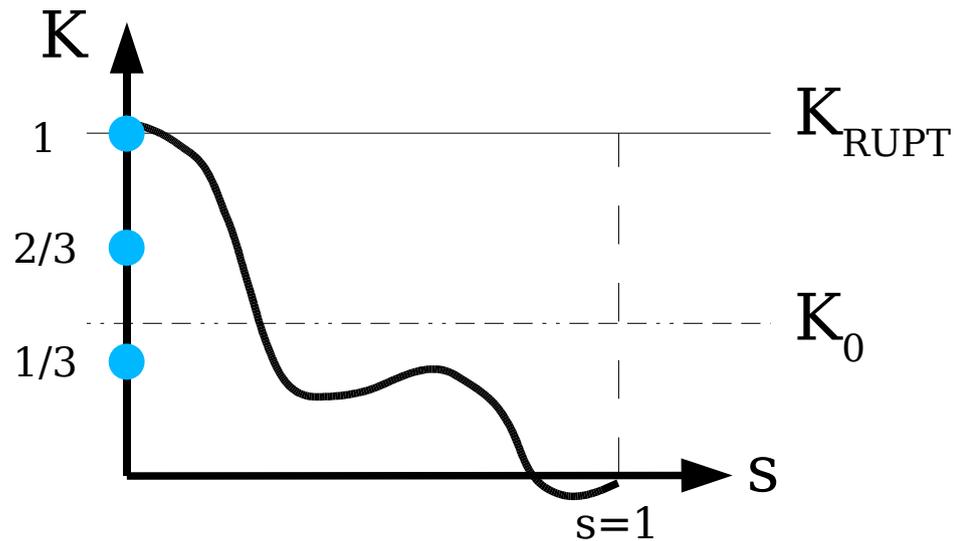
si $\frac{K_{RUPT}}{1.43} < K_0 < K_{RUPT}$



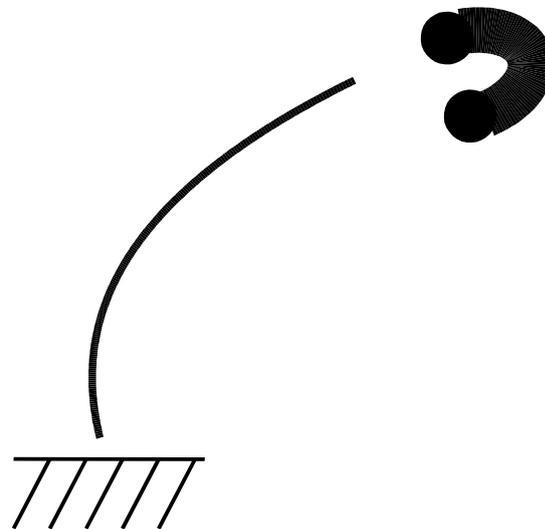
$\left(\frac{1}{1.43} \approx \frac{2}{3}\right)$



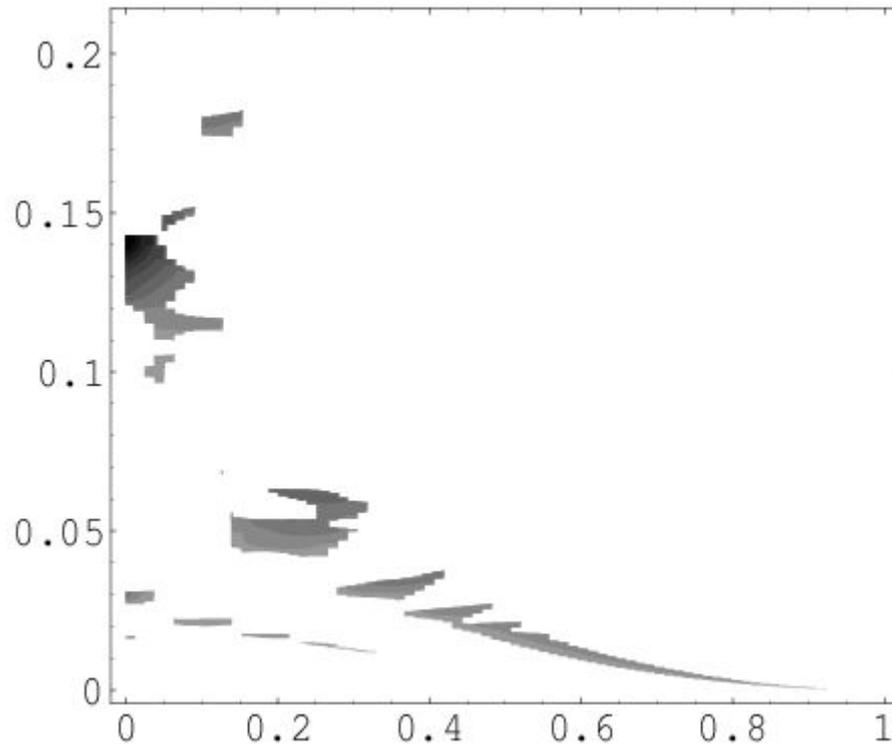
si $\frac{K_{RUPT}}{3} < K_0 < \frac{K_{RUPT}}{1.43}$



paf !



Les records de courbure



un point (s,t) est un :

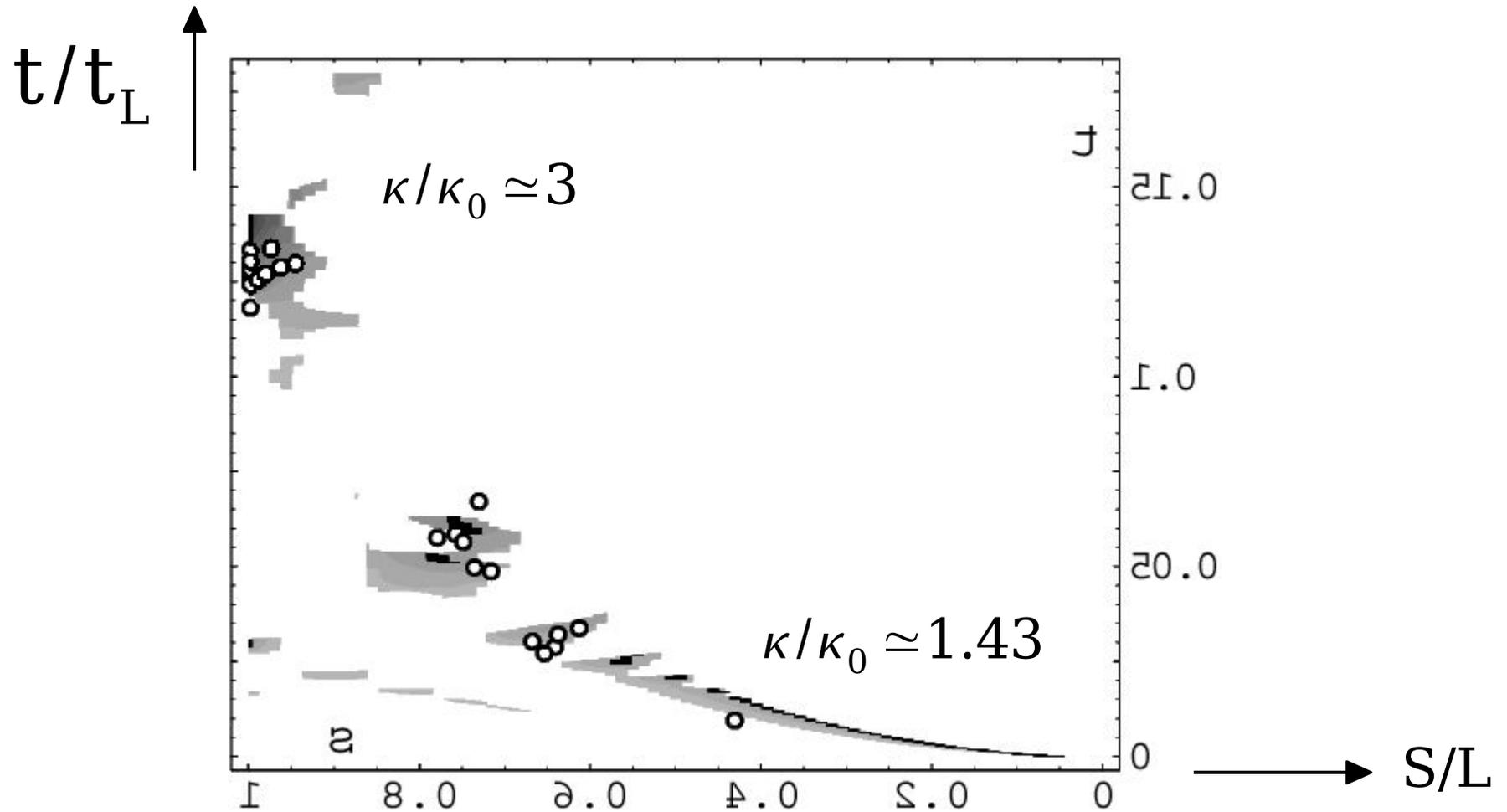
record local : si à s fixée,

$$\kappa(t) \geq \kappa(t'), \forall t' < t$$

record global : si $\forall s'$

$$\kappa(s,t) \geq \kappa(s',t'), \forall t' < t$$

Comparaison théorie / expérience

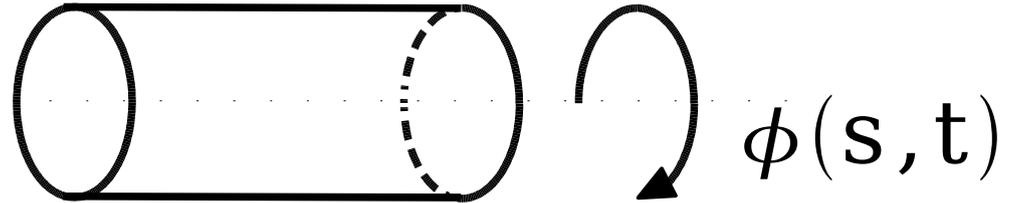


sans paramètre ajustable

Domaine de validité

- Cela marche-t-il avec l'extension ? non : comme ressort
- Avec la torsion ? non : simples ondes progressives de twist

$$\phi''' = \frac{1 + \nu}{c^2} \ddot{\phi}$$



- Autres structures élancées : plaques, coques ?
- Retard à la rupture

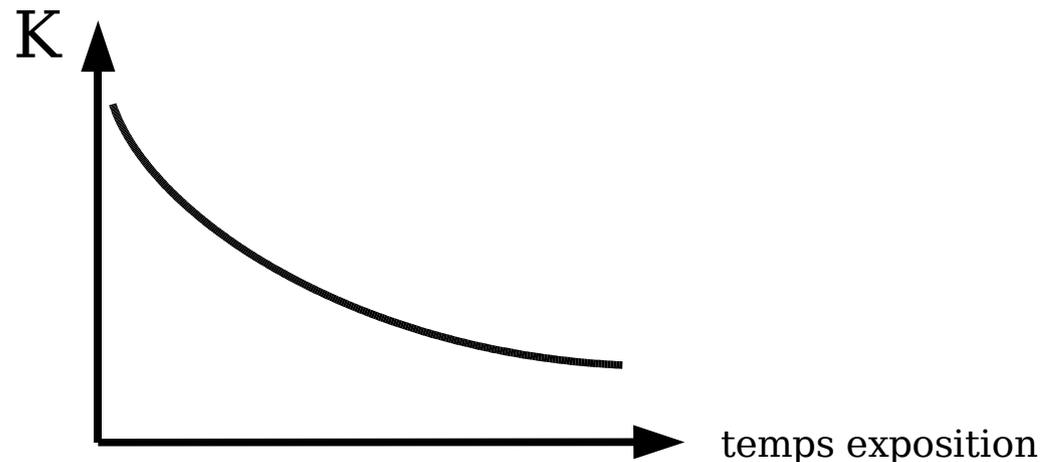
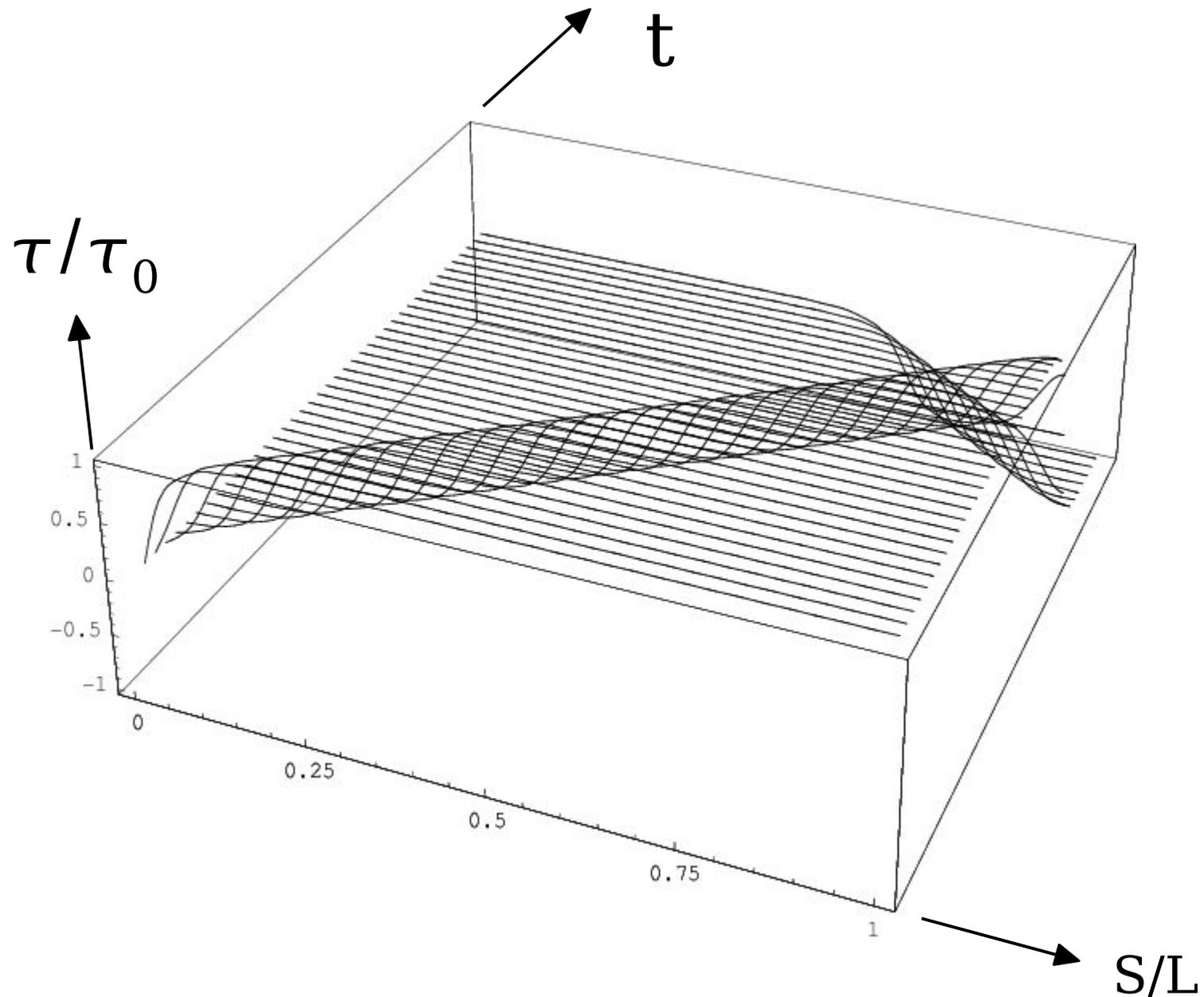


Diagramme spatio-temporel de la solution en twist



Applications : cheminée qui s'écroule



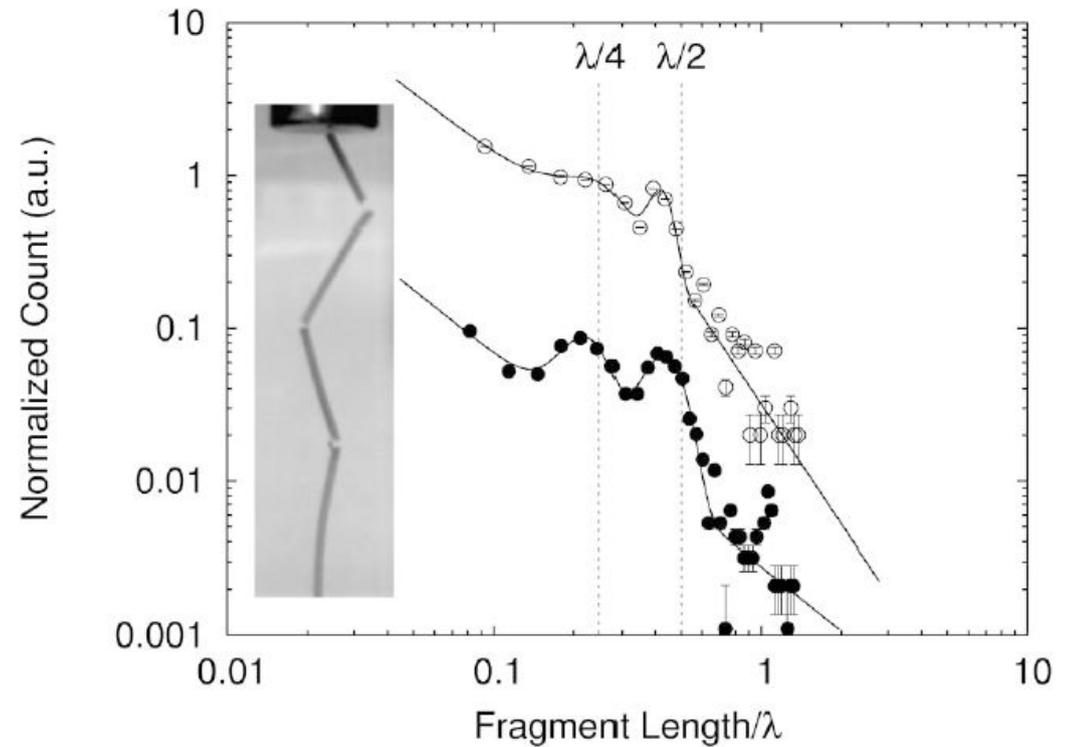
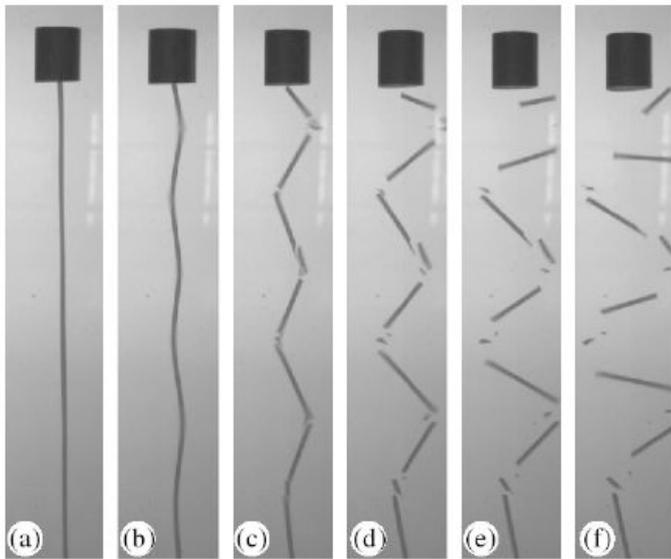
Falling chimney in Glasgow

site web de :

Gabriele Varieschi
Loyola Marymount Univ.
Los Angeles, USA

Applications : impact d'un projectile sur une paroi

distribution de la taille des fragments



J. R. Gladden et al, PRL 94 (2005)

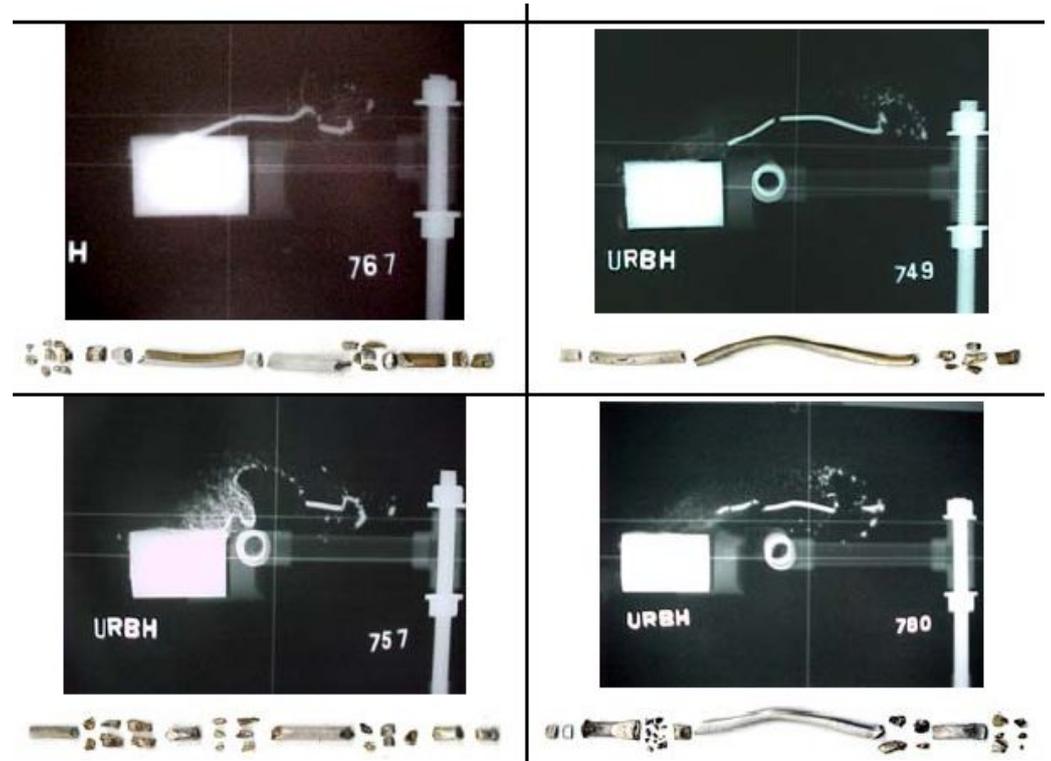
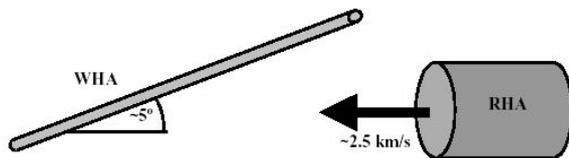
Applications : futur combat system (!)

distribution de la taille des fragments

K. Tarcza, Picatinny Arsenal & Univ Texas Austin, USA

fragmentation d'un obus (tungstène) contre une armure

obus armure



(clichés aux rayons X)