

Modélisation numérique de rubans en éléments de haut degré

Raphaël Charrondière¹, Florence Bertails-Descoubes¹, Sébastien Neukirch²

¹ Univ. Grenoble Alpes, Inria, CNRS, Grenoble INP, LJK, France, {raphael.charrondiere,florence.descoubes}@inria.fr

² Sorbonne Université, CNRS, UMR 7190, Institut Jean le Rond d'Alembert, Paris, France

Résumé — Nous proposons un modèle numérique robuste et efficace pour calculer les états d'équilibre stable d'un ruban naturellement plat ou courbé. Notre discrétisation spatiale se base sur des éléments à courbure normale linéaire et torsion géodésique quadratique en l'abscisse curviligne, qui permettent une grande richesse de représentation cinématique tout en garantissant l'inextensibilité parfaite du ruban. Les équilibres stables sont calculés par minimisation des énergies de gravité et d'élasticité du ruban, sous contrainte de développabilité.

Mots clés — structure élancée, surface développable, éléments finis, optimisation sous contrainte

1 Introduction

Depuis les nappes de câbles jusqu'aux accessoires de mode en passant par les mèches de cheveux en anglaise, les structures en forme de bande souple, communément appelées *rubans*, sont largement présentes dans notre quotidien. Si l'étude mécanique des rubans a vu le jour dans les années 1960 [1], on assiste récemment à un regain d'intérêt pour comprendre et modéliser ces structures [2].

Formellement, un ruban est une surface développable dont l'épaisseur reste négligeable devant la largeur, cette dernière étant elle-même négligeable devant la longueur. Nous nous limitons ici au cas d'une géométrie rectangulaire avec une épaisseur fixe. La développabilité implique que chaque déformation du ruban est isométrique, c'est à dire que la surface ne peut pas être étirée ni cisailée : elle se déforme par flexion pure. Par ailleurs, quel que soit l'état du ruban, sa surface est réglée, c'est à dire qu'elle est l'union de segments de longueur non-nulle appelés *règles*. C'est cette caractérisation qui est souvent utilisée, comme dans [2, 3].

Si le nombre de modèles numériques pour les tiges élastiques a littéralement explosé ces dernières années [4], à notre connaissance très peu de codes de calcul ont été en revanche conçus spécifiquement pour les rubans. Une exception est le simulateur dynamique de ruban proposé dans [5], qui s'appuie sur une discrétisation nodale de la surface du ruban. Ce modèle requiert un nombre d'éléments d'autant plus grand que la surface est courbe, rendant son utilisation peu efficace dans le cas d'un ruban fortement bouclé. Par ailleurs, l'inextensibilité du ruban doit être prise en compte par le biais de contraintes supplémentaires, qui sont non-linéaires. Notre approche, pour l'instant statique, se base sur une modélisation discrète très différente : en choisissant des degrés de liberté en courbures au lieu de positions, nous pouvons capturer précisément la géométrie du ruban, et ce pour une courbure naturelle arbitraire. Ce choix de discrétisation nous permet également de garantir l'inextensibilité du ruban de manière exacte.

Contribution Notre modèle numérique se base sur le modèle théorique présenté en [2], brièvement rappelé en section 2, qui fait le rapprochement entre le modèle historique de ruban de Wunderlich [1] et le modèle classique de tige élastique de Kirchhoff [4]. Nous tirons ainsi parti des méthodes numériques mises au point précédemment dans notre équipe pour simuler des tiges élastiques parfaitement inextensibles [6]. En particulier, nous choisissons d'utiliser la *courbure matérielle* du ruban comme degré de liberté de notre système, de manière à garantir l'inextensibilité du ruban de manière intrinsèque. En utilisant une discrétisation d'ordre élevé,

similaire à la discrétisation en morceaux de clothoïdes¹ 3D utilisée pour les tiges [6], la surface du ruban est, au contraire des modèles nodaux, nécessairement lisse et inextensible, et ce indépendamment de la résolution choisie. Une difficulté consiste néanmoins à reconstruire de manière précise la géométrie du ruban à partir des degrés de liberté en courbure. En nous inspirant des travaux sur la tige discrétisée en super-clothoïde [6], nous montrons que nous pouvons utiliser une intégration de la ligne médiane du ruban par séries entières, tout en contrôlant finement l’erreur numérique (section 3). En ajoutant une grandeur supplémentaire, nous pouvons de plus spécifier la direction des règles passant par chaque point de la ligne médiane et ainsi reconstituer la surface du ruban avec une excellente précision. Finalement, une dernière difficulté consiste à assurer le non-croisement des règles durant la déformation du ruban et ainsi garantir la développabilité du ruban. Nous traitons cette condition comme contrainte de notre problème de recherche d’équilibres stables. Grâce à la dérivation analytique du Hessien de notre énergie de ruban, couplée à une méthode de minimisation par points intérieurs [7], notre problème peut être résolu en quelques secondes sur une machine standard, et ce pour une large gamme de paramètres (section 4). Finalement, nous montrons que notre code se compare favorablement à une méthode de tir standard, et nous mettons de plus en évidence une différence de comportement notable entre tige et ruban, ce qui confirme l’utilité de concevoir des modèles numériques dédiés aux rubans (section 5).

2 Ruban de Wunderlich paramétré en courbures

Le modèle de ruban de Sadowsky [8] présente une énergie potentielle 1D obtenue par réduction dimensionnelle lorsque $h \ll w \ll L$, où h est l’épaisseur, w la largeur, et L la longueur du ruban, en imposant la développabilité de la surface moyenne de la structure. Le modèle de Wunderlich [1] est une généralisation du modèle de Sadowsky aux cas où w devient du même ordre que L .

Nous reprenons ici la description du modèle de ruban de Wunderlich, tel que formulé dans [2]. Ce modèle est à notre connaissance le seul modèle 1D réaliste pour une structure élancée lorsque la section a un grand rapport d’aspect, $h \ll w$. Il est plus réaliste qu’un modèle de tige [9] où la torsion n’est pas contrainte par l’aspect développable. Nous montrons ici comment exploiter numériquement cette énergie 1D, sans utiliser les outils existants d’auto-différentiation, de manière à atteindre une précision contrôlée pour un coût calcul minimum.

Paramétrisation géométrique de base Un ruban est une coque développable, inextensible, d’épaisseur constante h . Nous notons $r : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la ligne médiane du ruban, paramétrée par l’abscisse curviligne $s \in [0, L]$, où L est la longueur du ruban. Le repère matériel $\mathcal{R} : [0, L] \rightarrow \mathcal{SO}_3$ décrit localement la surface autour de la ligne médiane. En tout point s , on note $\mathcal{R}_x(s)$, $\mathcal{R}_y(s)$ et $\mathcal{R}_z(s)$ les trois vecteurs colonne de la matrice de rotation $\mathcal{R}(s)$. Géométriquement, la composante \mathcal{R}_z représente la tangente à la ligne médiane, \mathcal{R}_y la normale à la surface, tandis que $\mathcal{R}_x = \mathcal{R}_y \times \mathcal{R}_z$ est imposé par la structure de \mathcal{SO}_3 .

La direction de la règle passant par $r(s)$ appartient forcément au plan $(\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_z)$ puisque \mathcal{R}_y est normal à la surface. L’angle formé entre la règle et \mathcal{R}_x est donné par $\theta = \arctan(\eta)$, où $\eta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ est la grandeur que nous utiliserons par la suite pour repérer les règles. La fonction $\phi : (s, v) \in [0, L] \times \mathcal{S} \mapsto r(s) + v(\mathcal{R}_x + \eta(s)\mathcal{R}_z)$ décrit alors la surface du ruban. L’ensemble $\mathcal{S} \in \mathbb{R}$ est précisé ci-dessous. La figure 1 illustre cette paramétrisation.

Le choix de η comme variable plutôt que l’angle θ peut sembler a priori contre-intuitif, d’autant que dans les zones où le ruban est plat, η n’est pas défini de manière unique. Cependant, dans le cadre des rubans rectangulaires, cette grandeur permet d’exprimer l’ensemble \mathcal{S} facilement, comme expliqué ci-après. Prenons une règle quelconque $\mathcal{L}(s) = \{r(s) + v(\mathcal{R}_y + \eta(s)\mathcal{R}_x); v \in \mathcal{S}\}$, et déformons le ruban de manière isométrique pour l’aplatir. Notons l’image des anciennes valeurs en surlignant par une barre. On obtient $\bar{\mathcal{L}}(s) = \{\bar{r}(s) + v(\bar{\mathcal{R}}_y + \eta(s)\bar{\mathcal{R}}_x); v \in \mathcal{S}\}$, le projeté de la règle est tracé en bleu (voir figure 2, à gauche). On peut décomposer la direction de la règle

1. Une clothoïde est une courbe dont la courbure varie linéairement avec l’abscisse curviligne.

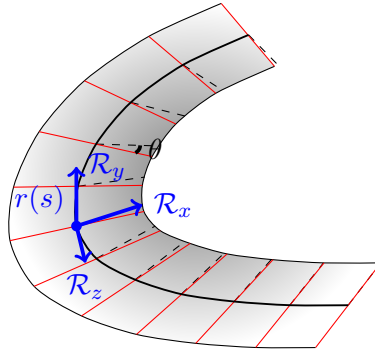


FIGURE 1 – Paramétrisation du ruban, avec sa ligne médiane r (en gras). Au point $r(s)$, le repère matériel \mathcal{R} est représenté en bleu. On a tracé quelques règles en rouge avec la direction de \mathcal{R}_y en pointillé. On note $\tan \theta = \eta$.

en vert selon les composantes de \mathcal{R} . Le point en extrémité du ruban $r(s)_+$ correspond alors à $\phi(s, \frac{w}{2})$ où w est la largeur du ruban. En ce point, on a donc $v = \frac{w}{2}$, et on en déduit $\mathcal{S} = [-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]$, qui est indépendant de s .

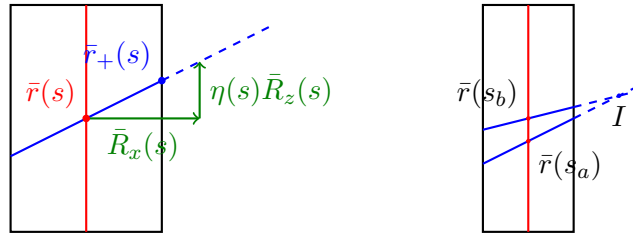


FIGURE 2 – À gauche, paramétrisation du ruban par η . À droite, illustration d'un point singulier. Aux points sur la ligne médiane d'abscisse linéaire s_a et s_b passent une règle, on les dessine en bleu sur la configuration à plat. Ces droites ne peuvent pas se croiser à l'intérieur du ruban.

Les règles d'une surface développable ne s'intersectent pas, comme illustré sur la figure 2, à droite, où l'on a représenté à nouveau la configuration plane. Quand le point I touche le bord du ruban, la surface entre les deux règles est un cône de sommet I . On appelle I point de singularité, il ne peut pas appartenir dans la surface. Pour s'en convaincre le lecteur peut prendre une feuille de papier, courber les bords jusqu'à former un cône, et essayer de faire rentrer le sommet à l'intérieur de la feuille; à moins de déchirer la feuille, cela s'avère impossible. Cette contrainte de développabilité se formule de la manière suivante,

$$\forall s \in [0, L] \quad |\eta'(s)| < \frac{2}{w}. \quad (1)$$

Paramétrisation en courbures Au lieu d'utiliser directement la paramétrisation (r, \mathcal{R}, η) décrite ci-dessus, notre idée est d'utiliser les courbures et la torsion du ruban comme variables principales de notre modèle, afin d'en garantir l'inextensibilité de manière intrinsèque. Il nous faut donc définir précisément ces grandeurs et établir leur lien avec la géométrie (r, \mathcal{R}, η) du ruban.

La relation d'inextensibilité de la ligne moyenne, $r'(s) = \mathcal{R}_z(s)$, permet d'écrire $r(s) = r(0) + \int_{t=0}^s \mathcal{R}_z(t) dt$. Par ailleurs, la structure de \mathcal{SO}_3 implique l'existence d'un vecteur de Darboux $d(s) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{R}'(s) = [d(s)]_{\times} \mathcal{R}$. L'opérateur $[\cdot]_{\times} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{A}_3$ transforme le produit vectoriel en opération matricielle $u \times v = [u]_{\times} v$, où \mathcal{A}_3 est l'ensemble des matrices réelles antisymétriques de taille 3. Il est cependant plus aisé d'utiliser directement les courbures en transformant cette relation par $\mathcal{R}'(s) = \mathcal{R}[\omega(s)]_{\times}$ où $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ est le *vecteur courbure*, dont les composantes sont, dans l'ordre, la courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique. D'une

part, la nature développable du ruban impose une invariance de la courbure géodésique, ce qui signifie que l'on a, pour un ruban rectangulaire, $\omega_2 = 0$. D'autre part, la développabilité implique une courbure de Gauss nulle, ce qui s'écrit $\omega_3 = \eta\omega_1$. Le lecteur peut trouver des preuves mathématiques de ces différentes relations dans [2].

Problème général de reconstruction géométrique En fixant $r(0) = p_0$ et $\mathcal{R}(0) = \mathcal{F}_0$, nous obtenons au final deux problèmes d'intégration (l'un pour le repère, l'autre pour la ligne médiane) qui vérifient les conditions de Cauchy,

$$\mathcal{P} = \begin{cases} (r(0), \mathcal{R}(0)) = (p_0, \mathcal{F}_0) \\ \mathcal{R}'(s) = \mathcal{R}(s)[\omega(s)]_{\times} \\ r'(s) = R(s)e_z, \end{cases}$$

où $e_z = (0, 0, 1)^T$ est le troisième vecteur de la base canonique. Ces deux problèmes possèdent donc une unique solution. Cependant, à part dans des cas très particuliers (courbure constante par exemple), la solution ne possède en général pas d'expression en *forme close*, c'est à dire représentable par un nombre fini d'opérations élémentaires. Dans le cas où la courbure est une fonction polynomiale de s , on peut néanmoins montrer que la solution est analytique, c'est à dire qu'elle admet un développement en série entière [6]. Dans la section 3, nous montrons alors comment adapter la méthode d'intégration en séries entières mise au point dans [6] au cas des rubans.

Énergies Notre objectif est de calculer les configurations d'équilibre stables du ruban. Nous procédons donc par minimisation de son énergie mécanique totale. Nous prenons deux énergies en compte : l'énergie élastique du ruban et l'énergie de gravité. Nous ne considérons pas le contact du ruban avec un autre objet, ni avec lui-même.

En suivant [2], l'énergie élastique de Wunderlich pour un ruban rectangulaire de courbure normale naturelle $\kappa_r(s)$ s'écrit

$$E_{\mathcal{W}} = \frac{Dw}{2} \int_0^L \left[\omega_1^2 (1 + \eta^2)^2 \frac{1}{w\eta'} \ln \left(\frac{1 + \frac{\eta'w}{2}}{1 - \frac{\eta'w}{2}} \right) - 2\kappa_r \omega_1 (1 + \nu\eta^2) \right] ds, \quad (2)$$

où ν est le coefficient de Poisson, Y le module d'Young, $D = \frac{Yh^3}{12(1-\nu^2)}$, et où $\eta'(s) = \frac{d\eta}{ds}$ désigne la dérivée spatiale de η .

L'énergie potentielle de pesanteur est définie de manière classique,

$$E_{\mathcal{P}} = - \int_0^L \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \rho \langle \phi(s, v), \mathcal{G} \rangle da(s, v), \quad (3)$$

où ρ est la masse surfacique du ruban, $\mathcal{G} = -ge_z$ avec g la constante gravitationnelle, et $da(s, v) = (1 + \nu\eta)dvds$ l'élément d'intégration sur la surface du ruban.

On remarque rapidement que l'énergie mécanique totale du ruban n'est pas convexe par rapport à nos variables. Sa minimisation sera donc complexe, la plupart des algorithmes d'optimisation (dont la méthode de Newton) perdant leurs bonnes propriétés de convergence dans le cas non-convexe. Par ailleurs, une autre difficulté provient du terme en logarithme dans l'énergie de Wunderlich, qui diverge dès que la contrainte (1) est active. Il nous faudra donc d'une part prendre en compte cette contrainte dans la minimisation de l'énergie, et d'autre part construire un cas-limite pour l'énergie de Wunderlich dans le cas d'activation de la contrainte. En section 4, nous présentons une méthode de résolution permettant de traiter l'ensemble de ces problèmes de façon robuste et efficace.

3 Cinématique discrète

Degrés de liberté Nous proposons dans notre modèle d'utiliser η et ω_1 comme degrés de liberté. Ce choix permet, via les relations $\omega_3 = \eta\omega_1$ et $\omega_2 = 0$, de calculer $\omega = (\omega_1, 0, \eta\omega_1)$ pour toutes valeurs de η et ω_1 . À noter qu'en revanche, le choix de ω_1 et ω_3 n'aurait pas permis de définir numériquement η lorsque ω_1 est proche de zéro.

Fonctions de forme linéaires et quadratiques Nous découpons le ruban en p morceaux de longueurs ℓ_i , $i \in \{1..p\}$, et cherchons à approcher nos fonctions η et ω_1 par des fonctions construites à partir d'un nombre fini de degrés de liberté. Contrairement aux modèles de tiges paramétrés en courbures [10, 6], prendre nos variables constantes par morceaux ne permet pas d'obtenir une géométrie lisse (dérivable au moins une fois) pour le ruban : en effet, si la fonction η n'est pas une fonction continue, alors le ruban n'est même pas continu aux points de discontinuité. Afin de garantir une surface suffisamment lisse, nous optons donc pour des fonctions η et ω_1 continues et *linéaires* par morceaux. En conséquence, la torsion géodésique $\omega_3 = \eta\omega_1$ prend la forme d'une fonction *quadratique* par morceaux.

La difficulté de notre nouveau problème de Cauchy approché est, de manière analogue à [6], qu'il ne présente pas de solution en forme close, à cause de nos éléments d'ordre supérieur à 1. Le recours à une méthode d'intégration numérique est donc nécessaire, avec le risque de transformer cette étape cruciale de construction de nos éléments en étape coûteuse. Heureusement, une méthode très efficace d'intégration, basée sur les séries entières, a été déployée dans [6]. Nous montrons que cette méthode s'adapte parfaitement à notre problème de cinématique discrète de ruban.

Intégration numérique par séries entières Si le vecteur courbure ω est développable en série entière (ce qui est le cas sur chaque morceau car nous avons choisi des éléments polynomiaux), alors r et \mathcal{R} le sont aussi. Pour un morceau donné, nous notons $\omega_1(s) = as + b$ et $\eta(s) = ns + m$, avec $a, b, n, m \in \mathbb{R}$. Nous pouvons alors écrire le vecteur courbure comme un polynôme de degré 2, $\omega(s) = \lambda_0 + \lambda_1 s + \lambda_2 s^2$, avec $\lambda_0 = (b, 0, mb)^T$, $\lambda_1 = (a, 0, nb + ma)^T$, $\lambda_2 = (0, 0, na)^T$. En développant r et \mathcal{R} sous forme de séries entières $r = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n s^n$, $\mathcal{R} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n s^n$, on obtient

$$\begin{cases} r_0 = p_0, \mathcal{R}(0) = \mathcal{F}_0 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} n R_n s^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n s^n [\omega(s)]_{\times} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} r_n s^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n R_n s^{n-1} e_z. \end{cases} \quad (4)$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, notre problème de Darboux revient à résoudre les récurrences suivantes,

$$\begin{cases} r_0 = p_0 \\ \mathcal{R}_0 = \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 [\lambda_0]_{\times} \\ \mathcal{R}_2 = \frac{1}{2} \left(\mathcal{R}_1 [\lambda_0]_{\times} + \mathcal{R}_0 [\lambda_1]_{\times} \right) \\ \forall n \geq 3, \mathcal{R}_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^2 \mathcal{R}_{n-1-k} [\lambda_k]_{\times} \right) \\ \forall n > 0, r_n = \frac{1}{n} \mathcal{R}_{n-1} e_z. \end{cases} \quad (5)$$

À la différence de [6] dans le cas des tiges, nous obtenons ici une récurrence à trois termes pour le repère matériel (au lieu de deux). Néanmoins, la structure du problème reste similaire. En particulier, ce type de série a l'avantage de présenter une convergence du reste très rapide, et ce pour un ordre n relativement faible. En pratique, il suffit donc de sommer un nombre restreint de termes (au plus une centaine) pour évaluer les séries de manière précise. Cependant, si l'on somme naïvement les différents termes de ces séries en utilisant le calcul flottant, on se rend compte rapidement d'une perte drastique de précision. Ce problème est connu sous le nom de *compensation catastrophique*.

Compensation catastrophique et contrôle de l'erreur Les problèmes de perte de précision apparaissent lorsque l'on somme des valeurs d'ordre de grandeur très différents, et de signes opposés. Dans les ordinateurs actuels, un réel est représenté par une mantisse m , un exposant n et un signe $s = \pm 1$, la valeur du réel est alors $s \times 1, m \times 2^n$ où la virgule est la même que celle que l'on utilise pour écrire la partie décimale d'un nombre (sauf qu'ici elle est écrite en binaire). Pour des calculs en double flottants, la mantisse est de taille 52 bits, donc par exemple, lorsqu'on effectue la somme $1 + 10^{16}$, on obtient 10^{16} (phénomène d'*absorption*). Ce qui est problématique,

c'est que si maintenant on retranche 10^{16} à la somme initiale, on trouve 0 au lieu de 1, soit une perte de précision de 100%! Nos séries entières ont des termes qui deviennent rapidement très grands en norme, avant de devenir très petits. De plus, les termes à sommer sont des matrices avec des coefficients de signe positif ou négatif (produits par des matrices antisymétriques). En conséquence, tous les ingrédients sont réunis pour rencontrer le problème de compensation catastrophique.

Dans [6], il est expliqué comment borner les facteurs de la série $\mathcal{R}_n s^n$ pour conserver la précision numérique. Si l'on veut par exemple avoir une précision fixe à $2^{-26} \approx 1.5 \cdot 10^{-8}$, nous devons nous assurer que la plus grande valeur de $\|\mathcal{R}_n s^n\|$ soit bornée par $2^{26} \approx 5 \cdot 10^7$. Cela nous fournit un rayon de convergence numérique. La théorie nous montre que plus la courbure est grande, plus le rayon est petit. Dans le cas des rubans, il est également aisé de borner $\|\mathcal{R}_n s^n\|$ en fonction de la somme des normes des facteurs du polynôme de la courbure. En revanche, utiliser un degré de polynôme de la courbure trop élevé réduirait le rayon de convergence numérique. Pour cette raison, nous nous sommes limités pour l'instant à des éléments d'ordre 2.

4 Minimisation de l'énergie d'un ruban sous gravité

Il faut maintenant calculer l'énergie potentielle totale correspondant à notre choix de cinématique pour le ruban. Rappelons que sur chaque morceau du ruban, η et ω_1 sont des polynômes d'ordre 1 en s , que l'on écrit $\omega_1(s) = as + b$ et $\eta(s) = ns + m$.

En développant les formes données dans la section 2, l'énergie élastique de Wunderlich (2) devient alors

$$E_{\mathcal{W}} = \frac{Dw}{2} [H(n)P(a, b, n, m) - Q(a, b, n, m)]$$

$$\text{avec } H(n) = \frac{1}{nw} \ln \left(\frac{1 + \frac{nw}{2}}{1 - \frac{nw}{2}} \right),$$

$$P(a, b, n, m) = \int_0^L (as + b)^2 [1 + (ns + m)^2]^2 ds,$$

$$Q(a, b, n, m) = \int_0^L 2\kappa_r(as + b) (1 + (ns + m)^2) ds.$$

La seule difficulté ici est le traitement de H qui n'est pas défini si $n = \pm \frac{2}{w}$. Notre contrainte de développabilité (1) doit en théorie nous permettre d'éviter d'atteindre ces bornes. Néanmoins, si l'on s'en approche trop, des problèmes numériques apparaissent. Dans ce cas, nous utilisons le développement de Taylor $H(n) = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{nw}{2}\right)^2 + o(n^3)$. Nous basculons vers ce développement dès que $|\frac{nw}{2}| < 10^{-5}$, valeur choisie expérimentalement pour une double précision.

La longueur du ruban étant très supérieure à sa largeur, nous approchons l'énergie potentielle de pesanteur (3) en concentrant la masse sur la ligne médiane, $E_G \approx \int_0^L w\rho(r(s), \mathcal{G}) ds$. Cette intégrale peut être calculée à partir des séries entières $E_G = \left\langle \sum_{k=0}^{+\infty} E_k s^k, \mathcal{G} \right\rangle$.

Lors de la procédure de minimisation, nous faisons appel au gradient et au Hessien de l'énergie. Dans notre modèle, le coût de calcul du gradient augmente quadratiquement avec le nombre de morceaux du ruban, et celui du Hessien de manière cubique. Les algorithmes d'approximation et de correction du Hessien (L-BFGS par exemple) ne donnant pas la performance voulue, nous optons pour un calcul direct du Hessien, ce qui diminue le temps de convergence d'un facteur de 300. La non-convexité de notre énergie, couplée à la présence de bornes sur les variables et à la divergence de l'énergie en cas de violation de ces bornes, nous imposent de choisir un algorithme un peu plus évolué que l'algorithme de Newton-Raphson couplé avec des recherches linéaires. Aussi, nous utilisons une méthode de point intérieur, implémentée dans la bibliothèque libre IPOPT [7], pour effectuer notre minimisation non-linéaire sous contraintes. Grâce à notre implémentation exacte du Hessien, cette méthode nous fournit un état d'équilibre stable en quelques secondes de calcul seulement, pour un ruban discrétisé en une vingtaine d'éléments.

5 Résultats

Pour tester notre modèle, nous simulons une anglaise, c'est-à-dire un ruban recourbé plusieurs fois sur lui-même et qui pend sous son poids propre. Nous considérons un ruban élastique de taille $w = 1$ cm par $L = 50$ cm, de masse surfacique 100 g/m², de courbure normale naturelle 60 m⁻¹ (soit 5 tours du ruban sur lui-même au repos), de coefficient de Poisson $\nu = 0.5$ et de rigidité de flexion $D = 0.0002$ N.m². Numériquement, la structure est divisée en 20 morceaux, et le premier itéré est choisi comme parfaitement plat et horizontal. La convergence est atteinte après 36 itérations en 2.1 secondes. Le résultat est présenté en figure 3, ainsi que dans la vidéo d'accompagnement.

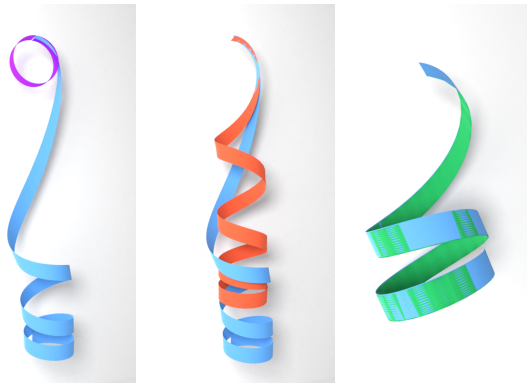


FIGURE 3 – À gauche, un ruban dans sa forme naturelle (violet), et soumis à la gravité (bleu). Au centre, ce même ruban (bleu) est comparé à un modèle de tige à section rectangulaire (orange). À droite, comparaison entre notre méthode (bleu) et une méthode de tir (vert).

Ensuite nous considérons le même ruban, dont nous faisons varier la longueur totale L de 1 cm à 50 cm. Nous montrons sur la figure 4 quelques étapes caractéristiques de cette expérience. Le lecteur peut aussi voir l'évolution du ruban dans la vidéo d'accompagnement. À petite longueur, l'énergie élastique domine et le ruban adopte une forme proche de sa courbure naturelle. Ensuite, à partir de 5 cm, la gravité n'est plus négligeable, mais la torsion géodésique reste élevée et le ruban se déplie mais reste dans le plan. Finalement à partir de 29 cm le ruban bascule hors du plan, et la torsion apparaît.

Comparaison au modèle des tiges Il est habituel d'utiliser un modèle de tige à section rectangulaire pour simuler un ruban. Néanmoins il a été montré que le modèle de ruban génère des configurations statiques qui peuvent être très différentes de celles engendrées par un modèle de tige [9, 11]. La différence majeure entre les deux modèles provient de la courbure géodésique qui n'est pas uniforme dans le cas des tiges. Nous comparons la configuration statique de ruban obtenue en figure 3 avec la configuration statique obtenue avec un modèle de tige. Pour cette comparaison, nous utilisons le modèle de tige discrétisée par super-clothoïde [6]. L'énergie de gravité est la même dans les deux cas, seule l'énergie élastique varie. La matrice de rigidité pour une tige à section rectangulaire est $K = \text{diag}(YI_1, YI_2, \frac{Y}{2(1+\nu)}J)$ où $I_1 = \frac{h^3w}{12}$, $I_2 = \frac{hw^3}{12}$, et $J = J_0 \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{h}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tanh \frac{(2k+1)\pi w}{2h}}{(2k+1)^5} \right]$ avec $J_0 = \frac{1}{3}wh^3$ [12]. Cette série étant en $O\left(\frac{1}{k^5}\right)$, elle a une excellente vitesse de convergence : avec moins de 10 termes, la précision numérique est celle de la machine. De manière à recalculer la rigidité de courbure YI_1 du modèle de tige sur son équivalent pour les rubans Dw , nous multiplions YI_1 par $\frac{1}{1-\nu^2}$. Les deux modèles ont alors la même rigidité par rapport à la flexion normale. Nous reprenons les paramètres physiques de la section précédente ($L = 50$ cm, $w = 1$ cm, etc.) et comparons en figure 3, au milieu, les modèles de tige (en orange) et de ruban (en bleu). De même nous comparons ces deux modèles sur l'expérience de variation de longueur totale, voir figure 4. Nous remarquons que les deux modèles coïncident parfaitement au départ, et s'écartent l'un de l'autre dès que la torsion apparaît.

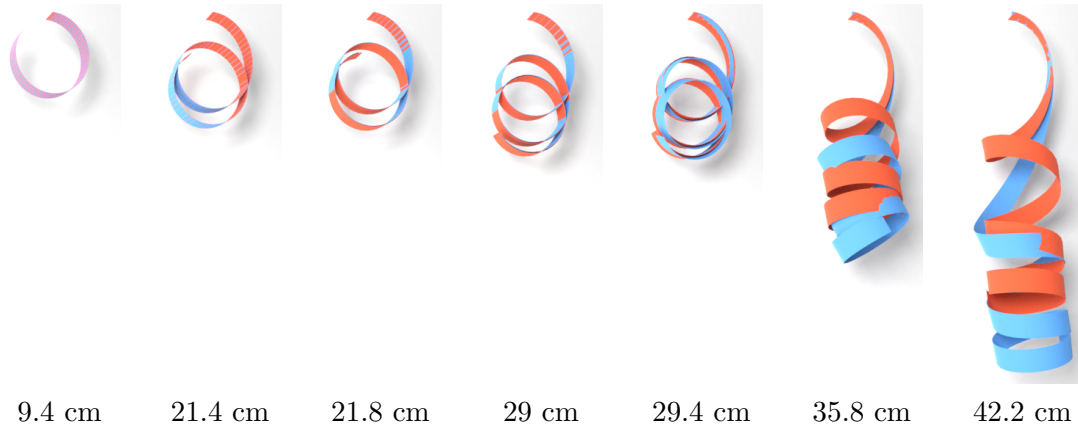


FIGURE 4 – Comparaison des équilibres engendrés par le modèle des rubans (en bleu) et celui des tiges (en orange) pour des longueurs de structure croissantes.

Comparaison à une méthode de tir Pour valider notre modèle, nous l’avons comparé à une méthode numérique alternative. Nous avons ainsi implémenté une méthode de tir, inspirée de [11], qui permet de résoudre le problème au bord posé sur les équations différentielles régissant la statique des rubans avec courbure naturelle. Nous choisissons un ruban élastique de $w = 1.5$ cm par $L = 50$ cm, de courbure normale naturelle 30 m^{-1} , de masse surfacique 15 g/m^2 , de coefficient de Poisson $\nu = 0.5$ et de rigidité de flexion $D = 0.0002 \text{ N.m}^2$. Les deux résultats présentés sur la figure 3 à droite sont quasiment identiques, ce qui valide nos résultats. À noter que contrairement à la méthode de tir qui peine à converger dès que la courbure naturelle du ruban est élevée, notre nouveau modèle converge en quelques secondes seulement, quelle que soit la courbure naturelle imposée.

Références

- [1] W. Wunderlich. Über ein abwickelbares Möbiusband. *Monatshefte für Mathematik*, 66(3) :276–289, June 1962.
- [2] Marcelo A. Dias and Basile Audoly. “Wunderlich, Meet Kirchhoff” : A General and Unified Description of Elastic Ribbons and Thin Rods. *Journal of Elasticity*, 119(1) :49–66, April 2015.
- [3] E. L. Starostin and G. H. M. van der Heijden. The shape of a Möbius strip. *Nature Materials*, 6 :563, July 2007.
- [4] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and Geometry : from hair curls to the nonlinear response of shells*. Oxford University Press, 2010.
- [5] Zherong Pan, Jin Huang, and Hujun Bao. Modelling Developable Ribbons Using Ruling Bending Coordinates. *Computing Research Repository*, abs/1603.04060, 2016.
- [6] R. Casati and F. Bertails-Descoubes. Super Space Clothoids. *ACM Transactions on Graphics*, 32(4), July 2013.
- [7] Andreas Wächter and Lorenz T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106(1) :25–57, 2006.
- [8] Denis F. Hinz and Eliot Fried. Translation of Michael Sadowsky’s Paper “The Differential Equations of the Möbius Band”. *Journal of Elasticity*, 119(1) :19–22, 2015.
- [9] Basile Audoly and Keith A. Seffen. Buckling of Naturally Curved Elastic Strips : The Ribbon Model Makes a Difference. *Journal of Elasticity*, 119(1) :293–320, April 2015.
- [10] F. Bertails, B. Audoly, M.-P. Cani, B. Querleux, F. Leroy, and J.-L. Lévêque. Super-Helices for Predicting the Dynamics of Natural Hair. *ACM Transactions on Graphics*, 25 :1180–1187, 2006.
- [11] Derek E. Moulton, Paul Grandgeorge, and Sébastien Neukirch. Stable elastic knots with no self-contact. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 116 :33–53, 2018.
- [12] A. I. Lurie and A. Belyaev. *Theory of Elasticity*. Foundations of Engineering Mechanics.