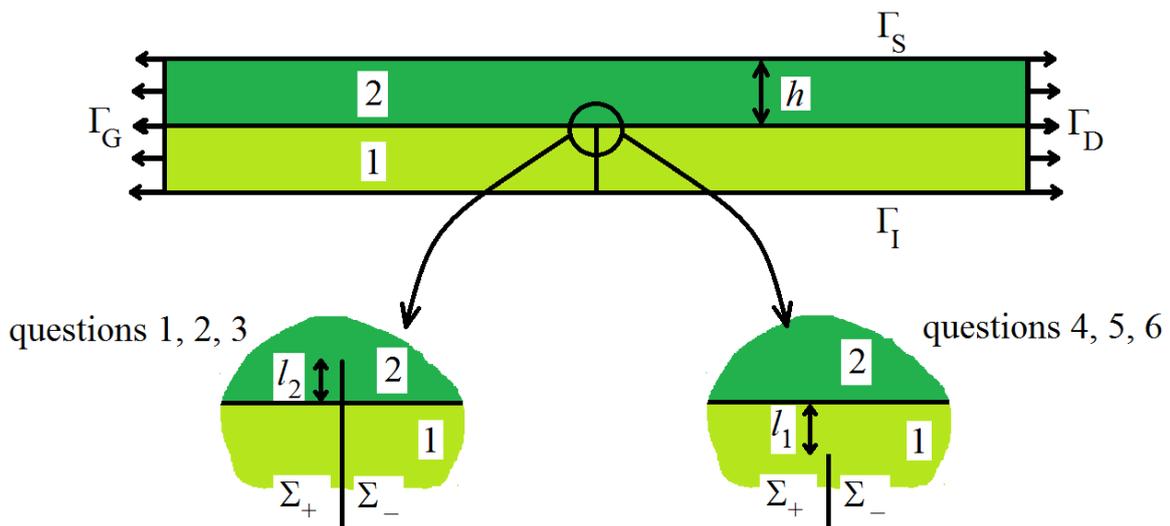


« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 20 novembre 2013

On s'intéresse à la traversée d'une interface par une fissure et on considère l'essai de traction sur bicouche dans l'hypothèse des déformations planes (figure). Les deux matériaux d'épaisseur h sont élastiques, ils ont le même coefficient de Poisson ν et des modules de Young différents, le matériau 2 est plus rigide que le matériau 1 : $E^{(2)} > E^{(1)}$. Les ténacités et résistances en traction des matériaux 1 et 2 sont désignées respectivement par $G_c^{(1)}$, $G_c^{(2)}$, $\sigma_c^{(1)}$ et $\sigma_c^{(2)}$. Une traction de densité f est exercée sur les faces gauche et droite Γ_G et Γ_D de l'éprouvette. Les faces supérieures et inférieures Γ_S et Γ_I sont libres de contraintes. Une fissure (faces Σ_+ et Σ_- libres de contraintes également) se situe dans le matériau 1 avec sa pointe sur l'interface.



- On suppose qu'aucune déviation de fissure le long de l'interface n'est possible (interface forte) et que sous l'effet du chargement croissant la fissure pénètre dans le matériau 2, sa pointe se trouvant maintenant à une distance l_2 de l'interface. On suppose cette distance très petite devant l'épaisseur h des deux couches : $l_2 \ll h$.

1- Décrire la solution de ces deux problèmes élastiques (avant et après pénétration) à l'aide de développements asymptotiques raccordés (compte tenu des symétries du problème un seul mode symétrique est activé). On prendra soin de préciser les équations vérifiées par chacun des termes des développements.

2- Appliquer le critère mixte (contrainte et énergie) afin de déterminer la longueur l_2 et le chargement critique provoquant cette pénétration. Ce chargement sera décrit par le facteur d'intensité généralisé k de la singularité initiale.

3- Calculer le taux de restitution de l'énergie différentiel G^{diff} à la pointe de fissure (singularité classique en pointe de fissure dans le matériau homogène 2). Pour cela, on introduira une longueur δl_2 très petite devant l_2 ($\delta l_2 \ll l_2$) et on considérera les précédents développements asymptotiques (question 1) puis leurs analogues avec cette fois $l_2 + \delta l_2$ comme petit paramètre. En déduire que $G^{\text{diff}} \geq G_c^{(2)}$ et que G^{diff} croît lorsque l_2 augmente. Quelles conséquences en tirer sur l'avancée de la fissure ?

- On revient maintenant un petit peu en arrière dans l'histoire de la fissure, i.e. avant que celle-ci n'atteigne l'interface. La pointe de fissure est située dans le matériau 1 à une petite distance l_1 de l'interface ($l_1 \ll h$). En d'autres termes il subsiste un ligament de largeur l_1 entre la fissure et l'interface.

4- Décrire la solution de ce problème à l'aide développements asymptotiques raccordés, l'état non perturbé restant l'état initialement décrit (la pointe de fissure sur l'interface).

5- Par un procédé identique au précédent, grâce à une petite longueur $\delta l_1 \ll l_1$, calculer le taux de restitution de l'énergie différentiel G^{diff} à la pointe de fissure (singularité classique en pointe de fissure dans le matériau homogène 1).

6- En déduire que G^{diff} décroît et tend vers 0 lorsque la fissure approche de l'interface, i.e. lorsque l_1 diminue. Quelles conséquences en tirer sur l'avancée de la fissure ?

NB : Considérant l'historique de la fissure, il eût été plus logique de commencer par la deuxième partie : la pointe de fissure en deçà de l'interface, puis de continuer par la première : la pointe de fissure au-delà de l'interface. Toutefois la deuxième partie nécessite un peu plus de vigilance que la première dans l'application des formules, c'est la raison pour laquelle nous avons choisi de les traiter dans cet ordre.

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Corrigé, 1^{ère} session, 20 novembre 2013

NB : Les notations ne sont pas rappelées ici, ce sont les notations usuelles du cours.

1- Pour tenir compte de la petite pénétration l_2 dans le matériau 2, le développement extérieur prend la forme

$$\underline{U}^{l_2}(x_1, x_2) = \underline{U}^0(x_1, x_2) + \text{petite correction} \quad (1)$$

Où \underline{U}^0 est solution du problème en l'absence de pénétration de la fissure dans le milieu 2

$$\begin{cases} -\nabla_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}^0 = 0 \text{ dans les milieux 1 et 2} \\ \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{n} = \underline{f} \text{ sur } \Gamma_G \text{ et } \Gamma_D \\ \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_S, \Gamma_I, \Sigma_+ \text{ et } \Sigma_- \\ \underline{\underline{\sigma}}^0 = \mathbf{C}^{(j)} : \nabla_x \underline{U}^0 \text{ dans le milieu } j, j=1,2 \end{cases} \quad (2)$$

\underline{U}^0 admet un développement de Williams au voisinage de la pointe de fissure (localisée sur l'interface)

$$\underline{U}^0(x_1, x_2) = \underline{C} + k r^\lambda \underline{u}(\theta) + \dots \quad (3)$$

Sachant que $E^{(2)} > E^{(1)}$, la singularité est faible : $\lambda > 1/2$.

Après changement de variable (dilatation) $y_j = x_j / l_2$, $\rho = r / l_2$, le développement intérieur s'écrit

$$\underline{U}^{l_2}(x_1, x_2) = \underline{U}^{l_2}(l_2 y_1, l_2 y_2) = \underline{C} + k l_2^\lambda \left[\rho^\lambda \underline{u}(\theta) + \hat{\underline{V}}^1(y_1, y_2) \right] + \dots \quad (4)$$

Où $\hat{\underline{V}}^1$ est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla_y \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^1 = 0 \text{ dans les milieux 1 et 2 (dilatés)} \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^1 \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Sigma_+ \text{ et } \Sigma_- \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^1 \cdot \underline{n} = -\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\rho^\lambda \underline{u}(\theta)) \cdot \underline{n} \text{ sur } F_+ \text{ et } F_- \\ \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^1 = \mathbf{C}^{(j)} \nabla_y \underline{\underline{\hat{V}}}^1 \text{ dans les milieux 1 et 2 (dilatés)} \\ \underline{\underline{\hat{V}}}^1 \text{ décroît vers 0 quand } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (5)$$

2- La fissure propage verticalement dans le matériau 2 et on peut supposer que le mode singulier a été normalisé de telle sorte que

$$\sigma_{11}(r^\lambda \underline{u}(\pi/2)) = r^{\lambda-1} s_{11}(\pi/2) = r^{\lambda-1} \text{ i.e. } s_{11}(\pi/2) = 1 \quad (6)$$

Où l'angle $\pi/2$ représente la direction de propagation. Dans ces conditions

$$l_2 = \frac{G_c^{(2)}}{A} \frac{1}{\sigma_c^{(2)2}} \quad (7)$$

Où

$$A = \Psi(\underline{\underline{\hat{V}}}^1, \rho^\lambda \underline{u}(\theta)) \text{ voir notations du cours} \quad (8)$$

Et

$$k_c = \left(\frac{G_c^{(2)}}{A} \right)^{1-\lambda} \sigma_c^{(2) 2\lambda-1} \quad (9)$$

3- Lorsqu'on utilise $l_2 + \delta l_2$ comme petit paramètre, le développement intérieur devient

$$\underline{\underline{U}}^{l_2 + \delta l_2}(x_1, x_2) = \underline{\underline{C}} + k (l_2 + \delta l_2)^\lambda \left[\rho'^\lambda \underline{u}(\theta) + \underline{\underline{\hat{V}}}^1(y'_1, y'_2) \right] + \dots \quad (10)$$

Où $y'_j = x_j / (l_2 + \delta l_2)$ et $\rho' = r / (l_2 + \delta l_2)$. Il faut noter que dans les deux cas la longueur de fissure adimensionnée est 1 et qu'en conséquence la fonction $\underline{\underline{\hat{V}}}^1$ est la même.

On va maintenant calculer $-\delta W^P = W^P(l_2) - W^P(l_2 + \delta l_2)$

$$\begin{aligned} -\delta W^P &= W^P(l_2) - W^P(l_2 + \delta l_2) \\ &= W^P(l_2) - W^P(0) + W^P(0) - W^P(l_2 + \delta l_2) \\ &= A k^2 (l_2 + \delta l_2)^{2\lambda} - A k^2 l_2^{2\lambda} \end{aligned} \quad (11)$$

C'est le même coefficient A qui intervient comme conséquence de la remarque précédente. Donc

$$\begin{aligned}
G^{\text{diff}} &= \lim_{\delta l_2 \rightarrow 0} - \frac{\delta W^P}{\delta l_2} = Ak^2 \lim_{\delta l_2 \rightarrow 0} \frac{(l_2 + \delta l_2)^{2\lambda} - l_2^{2\lambda}}{\delta l_2} \\
&= Ak^2 \frac{d l_2^{2\lambda}}{d l_2} = 2\lambda Ak^2 l_2^{2\lambda-1}
\end{aligned} \tag{12}$$

Sachant que $\lambda > 1/2$, on voit immédiatement d'après (12) que G^{diff} croît quand l_2 croît ($2\lambda - 1 > 0$). D'autre part, lorsque (7) et (9) sont vérifiés

$$G^{\text{inc}} = Ak^2 l_2^{2\lambda-1} = G_c^{(2)} \tag{13}$$

Donc $G^{\text{diff}} > G^{\text{inc}} = G_c^{(2)}$ ($2\lambda > 1$). Si la fissure se réamorce dans le matériau 2 avec la longueur l_2 alors la fissure continue à croître au-delà de cette valeur, l_2 n'est pas une longueur d'arrêt.

4- Le développement extérieur (1)-(2) et le développement de Williams (3) sont inchangés (après avoir pris soin de remplacer formellement l_2 par l_1). Le développement intérieur conserve la même forme générale

$$\underline{U}^h(x_1, x_2) = \underline{U}^h(l_1 y_1'', l_1 y_2'') = \underline{C} + k l_1^\lambda \left[\rho''^\lambda \underline{u}(\theta) + \underline{\hat{V}}^1(y_1'', y_2'') \right] + \dots \tag{14}$$

Où $y_j'' = x_j / l_1$ et $\rho'' = r / l_1$. La fonction $\underline{\hat{V}}^1$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\nabla_{\underline{y}} \cdot \underline{\tilde{\sigma}}^1 = 0 \text{ dans les milieux 1 et 2 (dilatés)} \\
\underline{\tilde{\sigma}}^1 \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \Sigma_+ \text{ et } \Sigma_- \\
\left[\left[\underline{\hat{V}}^1 \right] \right] = - \left[\left[\rho^\lambda \underline{u}(\theta) \right] \right] \text{ à travers le ligament L} \\
\left[\left[\underline{\tilde{\sigma}}^1 \cdot \underline{n} \right] \right] = 0 \text{ à travers le ligament L} \\
\underline{\tilde{\sigma}}^1 = \mathbf{C}^{(j)} \nabla_{\underline{y}''} \underline{\hat{V}}^1 \text{ dans les milieux 1 et 2 (dilatés)} \\
\underline{\hat{V}}^1 \text{ décroît vers 0 quand } \rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \rightarrow \infty
\end{array} \right. \tag{15}$$

La différence principale avec la question 1 réside dans les conditions de saut (le saut est représenté par le crochet $\left[\left[\right] \right]$ qui désigne une discontinuité) sur le ligament L qui remplacent les conditions sur F_+ et F_- . C'est une conséquence de la superposition (14), en effet le champ singulier $\rho^\lambda \underline{u}(\theta)$ est discontinu à travers la fissure (qui s'étend jusqu'à l'interface dans le domaine non perturbé) et donc à travers le ligament alors que la solution \underline{U}^h doit être continue.

5- Il faut considérer deux ligaments de longueur respective l_1 et $l_1 - \delta l_1$. En utilisant le même raisonnement qu'à la question 3, on aboutit alors à un résultat tout à fait analogue

$$G^{\text{diff}} = 2\lambda k^2 l_1^{2\lambda-1} \quad (16)$$

6- Conséquence de (16) $G^{\text{diff}} \rightarrow 0$ quand $l_1 \rightarrow 0$ ($2\lambda - 1 > 0$). Ceci signifie que quel que soit le chargement k on peut toujours trouver une largeur de ligament $l_1 > 0$ telle que $G^{\text{diff}} < G_c^{(1)}$ et donc que la fissure s'arrête. En d'autres termes, lors d'une avancée quasi-statique la fissure ne peut pas atteindre l'interface pour occuper la position initialement décrite comme étant l'état non perturbé.

Evidemment cela ne signifie pas que l'interface constitue un obstacle infranchissable mais il faut alors, comme dans l'étude de l'amorçage au fond d'une entaille en V, considérer la possibilité d'une avancée discontinue de la fissure (cf : Leguillon D., Martin E. (2013). The strengthening effect caused by an elastic contrast – Part I: the bimaterial case, *Int. J. Fract.*, 179(1), 157-167).

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 21 novembre 2012

On considère une structure composée de deux plaques faites d'un même matériau et assemblées par collage (Figure 1). La plaque inférieure est fissurée jusqu'à l'interface, l'extrémité de la fissure notée O sert d'origine aux coordonnées cartésiennes x_1, x_2 et polaires r, θ . L'ensemble est soumis à une traction horizontale $\sigma_H > 0$ et une compression verticale $\sigma_V < 0$. Le problème est traité sous l'hypothèse des déformations planes.

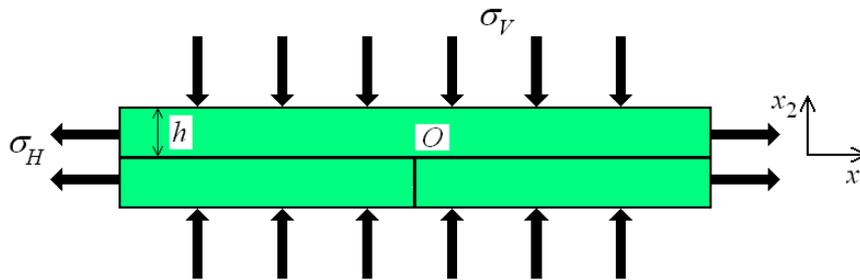


Figure 1.

1) On décompose le chargement en deux : (i) $\sigma_H > 0$ et $\sigma_V = 0$ et (ii) $\sigma_H = 0$ et $\sigma_V < 0$. Ecrire dans les deux cas les développements de Williams à deux termes (*) en pointe de fissure en faisant apparaître à travers les FIC(**) $K_I^{(H)}$, $K_I^{(V)}$, $T^{(H)}$ et $T^{(V)}$ la dépendance aux deux paramètres de chargement σ_H et σ_V .

En déduire le développement de Williams du problème complet.

On considère maintenant une petite déviation de la fissure principale le long de la ligne de collage sur une longueur l (Figure 2). Cette longueur est supposée petite devant les dimensions de la structure et donc en particulier devant l'épaisseur h des deux substrats : $l \ll h$. L'extrémité de l'extension de fissure est notée O' , les coordonnées issues de ce point sont respectivement x'_1, x'_2 et r', θ' .

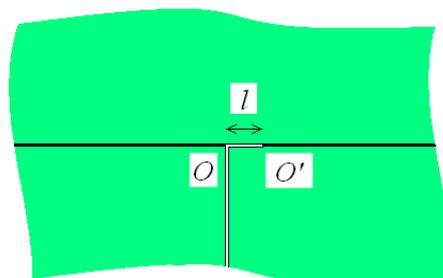


Figure 2.

(*) Outre une constante, les différentes fonctions susceptibles d'intervenir sont : le mode I $\sqrt{r}u_I(\theta)$ et le T-stress $rt_I(\theta)$ (on rappelle que ce dernier vérifie $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$, $\sigma_{22} = 1$).

(**) FIC : facteur d'Intensité des Contraintes.

2) Ecrire les développements asymptotiques raccordés permettant de décrire la solution du problème mécanique précédent (i.e. chargements σ_H et σ_V) en présence de la petite déviation de longueur l . Ceux-ci devront faire intervenir les deux termes principaux mis en évidence dans la question 1, le mode I et le T-stress.

3) En déduire l'expression des FIC K'_I et K'_{II} associés aux modes I et II (*) en pointe O' de la fissure déviée en fonction des deux paramètres de chargement σ_H et σ_V (à travers les FIC du développement de Williams de la question 1).

4) Montrer que, selon les chargements, le FIC K'_I peut s'annuler, déterminer la longueur de fissure correspondante. Comment interpréter le fait que K'_I devient négatif ?

5) Quelles sont les modifications (**) à apporter si les deux parties composant la structure sont maintenant faites de matériaux élastiquement différents (modules de Young différents $E_{(1)} \neq E_{(2)}$, pour simplifier on suppose que les coefficients de Poisson sont égaux $\nu_{(1)} = \nu_{(2)}$) (voir Figure 3) ?

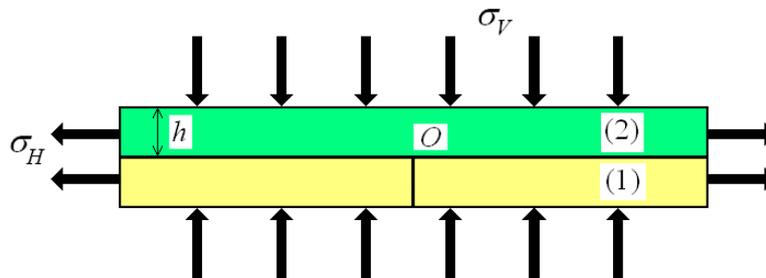


Figure 3.

(*) Les modes I et II sont notés $\sqrt{r'}u_I(\theta')$ et $\sqrt{r'}u_{II}(\theta')$.

(**) Le terme lié au T-stress existe toujours mais a des propriétés légèrement différentes

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0 ; \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 1 ; \sigma_{11}^{(2)} = \text{Cte} \neq 0$$

« Singularités, développements asymptotiques ... »
Examen, 1^{ère} session, 21 novembre 2012

Corrigé

1)

La structure est élastiquement homogène.

(i) $\sigma_H > 0$ et $\sigma_V = 0$, le développement de Williams s'écrit (compte tenu des symétries qui éliminent le mode II antisymétrique et sans mentionner la rotation de corps rigide)

$$\begin{aligned} \underline{U}^{(H)}(r, \theta) &= \underline{U}(0, 0) + K_I^{(H)} \sqrt{r} \underline{u}_I(\theta) + T^{(H)} r \underline{t}(\theta) + \dots \\ \text{avec } K_I^{(H)} &= a \sigma_H \text{ et } T^{(H)} = b \sigma_H \end{aligned} \quad (1)$$

$a > 0$ (évident) et $b > 0$ (moins évident mais ne joue pas un rôle important dans la suite) sont les FIC associés au mode I et au T-stress pour une traction horizontale unité.

(ii) $\sigma_H = 0$ et $\sigma_V < 0$, le développement de Williams s'écrit (pour les mêmes raisons que ci-dessus)

$$\begin{aligned} \underline{U}^{(V)}(r, \theta) &= \underline{U}(0, 0) + K_I^{(V)} \sqrt{r} \underline{u}_I(\theta) + T^{(V)} r \underline{t}(\theta) + \dots \\ \text{avec } K_I^{(V)} &= 0 \text{ et } T^{(V)} = \sigma_V \end{aligned} \quad (2)$$

Dans un matériau homogène, en présence d'un effort parallèle à la fissure, celle-ci ne s'ouvre pas ($K_I^{(V)} = 0$) et compte tenu des propriétés du mode $r \underline{t}(\theta)$, $T^{(V)} = \sigma_V$. En regroupant les deux développements, il vient

$$\underline{U}(r, \theta) = \underline{U}^{(H)}(r, \theta) + \underline{U}^{(V)}(r, \theta) = \underline{U}(0, 0) + a \sigma_H \sqrt{r} \underline{u}_I(\theta) + (b \sigma_H + \sigma_V) r \underline{t}(\theta) + \dots \quad (3)$$

2)

Développement extérieur de la solution $\underline{U}^l(x_1, x_2)$ (l'indice supérieur l indique que la solution dépend de la longueur d'extension l)

$$\underline{U}^l(x_1, x_2) = \underline{U}^0(x_1, x_2) + \text{termes correcteurs} \quad (4)$$

Où $\underline{U}^0(x_1, x_2) = \underline{U}(x_1, x_2)$ étudié en question 1.

Développement intérieur : après dilatation des variables $y_i = x_i / l$, $\rho = r / l$, il vient

$$\begin{aligned} \underline{U}^l(x_1, x_2) &= \underline{U}^l(l y_1, l y_2) \\ &= \underline{U}(0, 0) + a \sigma_H \sqrt{l} \left[\sqrt{\rho} \underline{u}_I(\theta) + \hat{V}^1(y_1, y_2) \right] + (b \sigma_H + \sigma_V) l \left[\rho \underline{t}(\theta) + \hat{V}^2(y_1, y_2) \right] + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

On renvoie au cours pour préciser les problèmes dont sont solutions $\underline{\hat{V}}^1(y_1, y_2)$ et $\underline{\hat{V}}^2(y_1, y_2)$.

3)

Les fonctions $\underline{\hat{V}}^1(y_1, y_2)$ et $\underline{\hat{V}}^2(y_1, y_2)$ sont solutions d'un problème d'élasticité sur le domaine intérieur, elles possèdent donc les singularités de pointe de fissure en O' (coordonnées $x_1 = l, x_2 = 0$ ou $y_1 = 1, y_2 = 0$) et le développement de Williams s'écrit au voisinage de ce point

$$\begin{cases} \underline{\hat{V}}^1(y_1, y_2) = \underline{\hat{V}}^1(1, 0) + \kappa_{I1} \sqrt{\rho'} \underline{u}_I(\theta') + \kappa_{II1} \sqrt{\rho'} \underline{u}_{II}(\theta') + \dots \\ \underline{\hat{V}}^2(y_1, y_2) = \underline{\hat{V}}^2(1, 0) + \kappa_{I2} \sqrt{\rho'} \underline{u}_I(\theta') + \kappa_{II2} \sqrt{\rho'} \underline{u}_{II}(\theta') + \dots \end{cases} \quad (6)$$

Les coefficients κ_{I1} , κ_{II1} , κ_{I2} et κ_{II2} sont des FIC adimensionnels. Si on reporte (6) dans (5), il vient (en ne gardant que les termes d'intérêt)

$$\begin{aligned} \underline{U}^I(x_1, x_2) = \dots + [a\sigma_H \kappa_{I1} \sqrt{l} + (b\sigma_H + \sigma_V) \kappa_{I2} l] \sqrt{\rho'} \underline{u}_I(\theta') \\ + [a\sigma_H \kappa_{II1} \sqrt{l} + (b\sigma_H + \sigma_V) \kappa_{II2} l] \sqrt{\rho'} \underline{u}_{II}(\theta') + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Après changement de variable inverse $r' = \rho' l$ il vient

$$\begin{aligned} \underline{U}^I(x_1, x_2) = \dots + [a\sigma_H \kappa_{I1} + (b\sigma_H + \sigma_V) \kappa_{I2} \sqrt{l}] \sqrt{r'} \underline{u}_I(\theta') \\ + [a\sigma_H \kappa_{II1} + (b\sigma_H + \sigma_V) \kappa_{II2} \sqrt{l}] \sqrt{r'} \underline{u}_{II}(\theta') + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

D'où

$$K'_I = a\sigma_H \kappa_{I1} + (b\sigma_H + \sigma_V) \kappa_{I2} \sqrt{l} \quad \text{et} \quad K'_{II} = a\sigma_H \kappa_{II1} + (b\sigma_H + \sigma_V) \kappa_{II2} \sqrt{l} \quad (9)$$

4)

Les coefficients κ_{I1} et κ_{I2} sont positifs (évident quand on étudie les problèmes en $\underline{\hat{V}}^1$ et $\underline{\hat{V}}^2$), le FIC K'_I peut donc s'annuler si l est assez grand (tout en restant petit par rapport à h pour rester dans le cadre des développements asymptotiques) et si $b\sigma_H + \sigma_V < 0$, i.e. $|\sigma_V| > b\sigma_H$. La distance à laquelle la fissure se referme est définie par

$$l = \left(\frac{a\sigma_H \kappa_{I1}}{(b\sigma_H + \sigma_V) \kappa_{I2}} \right)^2 \quad (10)$$

Au-delà de cette longueur $K'_l < 0$, il y a recouvrement des lèvres de la fissure et le problème n'est plus correctement posé, il faut ajouter une condition unilatérale de contact entre les faces de la fissure.

5)

En présence de 2 matériaux, le mode I doit être remplacé par un mode singulier $r^\lambda \underline{u}_1(\theta)$ où $\lambda > 1/2$ si $E^{(2)} > E^{(1)}$ et $\lambda < 1/2$ si $E^{(2)} < E^{(1)}$. Le T-stress prend une forme légèrement différente (mais qui ne modifie pas l'allure globale des résultats) et les autres des propriétés restent vraies (y compris l'élimination par symétrie du mode antisymétrique $r^\lambda \underline{u}_2(\theta)$). Le développement de Williams (3) s'écrit

$$\underline{U}(r, \theta) = \underline{U}^{(H)}(r, \theta) + \underline{U}^{(V)}(r, \theta) = \underline{U}(0, 0) + \tilde{a} \sigma_H r^\lambda \underline{u}_1(\theta) + (\tilde{b} \sigma_H + \sigma_V) r \underline{t}(\theta) + \dots \quad (11)$$

La forme du développement extérieur (4) reste inchangée et le développement intérieur (5) devient

$$\begin{aligned} \underline{U}'(x_1, x_2) &= \underline{U}'(ly_1, ly_2) \\ &= \underline{U}(0, 0) + \tilde{a} \sigma_H l^\lambda \left[\rho^\lambda \underline{u}_1(\theta) + \underline{\hat{W}}^1(y_1, y_2) \right] + (\tilde{b} \sigma_H + \sigma_V) l \left[\rho \underline{t}(\theta) + \underline{\hat{W}}^2(y_1, y_2) \right] + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

La fissure déviée est maintenant une fissure d'interface et la singularité de pointe de fissure fait appel à des exposants complexes de la forme $1/2 \pm i\varepsilon$. La partie imaginaire ε dépend du contraste élastique entre les matériaux. Les développements de Williams prennent la forme particulière suivante

$$\begin{cases} \underline{\hat{V}}^1(y_1, y_2) = \underline{\hat{V}}^1(1, 0) + \kappa_1 \rho^{1/2+i\varepsilon} \underline{u}(\theta') + \text{conjugué} + \dots \\ \underline{\hat{V}}^2(y_1, y_2) = \underline{\hat{V}}^2(1, 0) + \kappa_2 \rho^{1/2+i\varepsilon} \underline{u}(\theta') + \text{conjugué} + \dots \end{cases} \quad (13)$$

Où κ_1 , κ_2 et la fonction $\underline{u}(\theta')$ sont complexes. Finalement il vient

$$K' = \tilde{a} \sigma_H \kappa_1 l^{\lambda-1/2-i\varepsilon} + (\tilde{b} \sigma_H + \sigma_V) \kappa_2 l^{1/2-i\varepsilon} \quad (14)$$

Où K' représente le FIC (complexe) de la singularité $r^{1/2+i\varepsilon} \underline{u}(\theta')$. On remarque que selon que λ est plus grand ou plus petit que $1/2$ la limite de K' quand $l \rightarrow 0$ est nulle ou au contraire indéfinie.

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 12 décembre 2011

Une observation microscopique après usinage sur une éprouvette entaillée en V ($L=150 \text{ mm}^*$, $H=90 \text{ mm}$, $h=H/2$, $\omega=90^\circ$) a révélé la présence d'un défaut à proximité du fond d'entaille O . Ce défaut a sensiblement la forme d'un V, sa profondeur d est de quelques centaines de microns et l'ouverture ω' d'environ 30° . Le fond est repéré par le point O' , il est localisé à une distance de l'ordre de d du fond d'entaille O (pour fixer les idées $OO'=d\sqrt{2}$ par exemple). L'éprouvette est chargée en traction symétrique (i.e. s'exerçant verticalement, voir Figure 1). Les coordonnées cartésiennes et polaires issues du point O sont notées respectivement x_1, x_2 et r, θ , celles issues de O' sont notées de façon identique avec prime. La même règle sera adoptée pour toutes les variables et tous les termes intervenant dans les équations. Exemple : l'exposant de la singularité en O est λ et celui en O' est λ' .

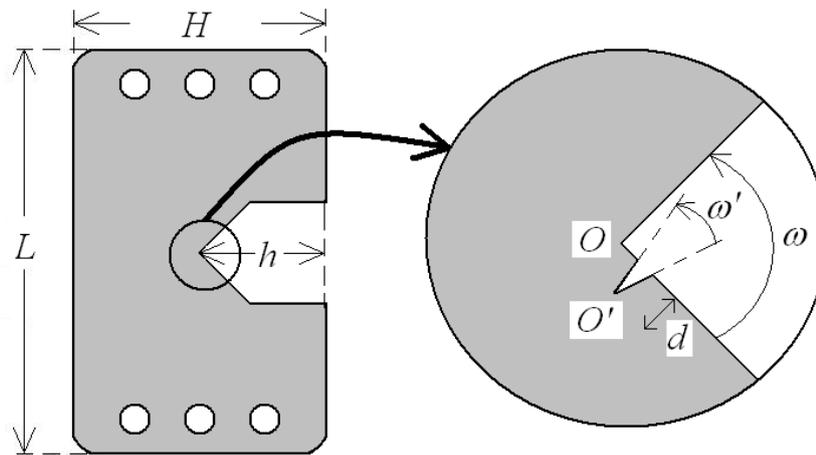


Figure 1. Schéma de l'éprouvette et vue agrandie du fond d'entaille.

- 1) Décrire la solution élastique du problème à l'aide de développements asymptotiques raccordés.
- 2) Le facteur d'intensité généralisé k de la singularité située en O (exposant λ) est évidemment affecté par la présence du défaut. On note k^0 le facteur d'intensité généralisé de cette même singularité en l'absence de défaut. Exprimer une relation entre k^0 et k .
- 3) Le facteur d'intensité généralisé de la singularité située en O' (exposant λ') est noté k' . Exprimer k' en fonction de k^0 et d .
- 4) On suppose que le critère double présenté pendant le cours s'applique en O et O' , c'est-à-dire que les longueurs d'amorçages sont petites devant d (quelques microns ou dizaines de microns). Ecrire les conditions d'amorçage en O et de non amorçage en O' . En déduire une condition sur d pour que l'amorçage se produise quand même en O et non sur le défaut.

NB : Prendre soin dans chaque question de préciser dans le détail de quoi dépendent chaque terme introduit dans les relations : dépendance ou non par rapport à ω , à ω' et à d .

* les longueurs sont données à titre purement indicatif

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 12 décembre 2011 – Corrigé

Corrigé

1) La solution générale \underline{U}^d dépend de ω , ω' et d . Le développement extérieur, avec d pour petit paramètre, prend la forme classique

$$\underline{U}^d(x_1, x_2) = \underline{U}^0(x_1, x_2) + \dots \quad (15)$$

Où \underline{U}^0 dépend de ω seulement et est solution du problème d'élasticité linéaire posé sur une structure sans défaut, i.e. $d=0$ (figure 1 à gauche). Ce terme peut être décrit à l'aide du développement de Williams à proximité du point O

$$\underline{U}^0(x_1, x_2) = \underline{U}^0(O) + k^0 r^\lambda \underline{u}(\theta) + \dots \quad (16)$$

Où les coordonnées cartésiennes et polaires sont mélangées sans ambiguïté, k^0 , λ et \underline{u} dépendent de ω . Le chargement global étant symétrique, il n'est pas nécessaire de prendre en compte le second terme singulier.

Le développement intérieur prend la forme suivante (voir cours)

$$\underline{U}^d(x_1, x_2) = \underline{U}^d(dy_1, dy_2) = \underline{U}^0(O) + k^0 d^\lambda \left[\rho^\lambda \underline{u}(\theta) + \hat{V}(y_1, y_2) \right] + \dots \quad (17)$$

avec $y_i = x_i / d$ et $\rho = r / d$

Ici \hat{V} dépend de ω et ω' mais pas de d . La dépendance en d est explicite dans (3).

2) On peut décomposer \hat{V} en série de Williams au voisinage de O

$$\hat{V}(y_1, y_2) = \hat{V}(O) + \kappa \rho^\lambda \underline{u}(\theta) + \dots \quad (18)$$

Le coefficient sans dimension κ dépend comme \hat{V} de ω et ω' . D'où on déduit, en insérant (4) dans (3) et en réécrivant tout dans les variables physiques r et θ (ou x_1 et x_2)

$$k = \kappa k^0 \quad (19)$$

3) La décomposition de \hat{V} en série de Williams au voisinage de O' donne

$$\hat{V}(y'_1, y'_2) = \hat{V}(O') + \kappa' \rho'^{\lambda'} \underline{v}(\theta') + \dots \quad (20)$$

Le coefficient sans dimension κ' dépend lui aussi de ω et ω' mais pas de d , λ' et ν dépendent de ω' . En procédant comme précédemment, i.e. en revenant aux variables physiques r' et θ' (ou x'_1 et x'_2), on déduit

$$k' = \kappa' d^{\lambda-\lambda'} k^0 \quad (21)$$

Remarquons que $1/2 < \lambda' < \lambda < 1$ car $\pi/2 < \omega' < \omega < \pi$.

4) Le critère d'amorçage en O s'écrit

$$k = \kappa k^0 \geq \left(\frac{G_c}{A(\omega)} \right)^{1-\lambda} \sigma_c^{2\lambda-1} \quad (22)$$

Où le coefficient A est fonction de ω (voir cours) et où G_c et σ_c désignent respectivement la ténacité et la résistance en traction du matériau.

La condition de non amorçage en O' s'écrit

$$k' = \kappa' d^{\lambda-\lambda'} k^0 \leq \left(\frac{G_c}{A(\omega')} \right)^{1-\lambda'} \sigma_c^{2\lambda'-1} \quad (23)$$

Où le coefficient A est fonction de ω' maintenant (voir cours).

En reprenant ces deux dernières inégalités et en éliminant k^0 on déduit

$$d \leq D \frac{G_c}{\sigma_c^2} \quad \text{avec} \quad D^{\lambda-\lambda'} = \frac{\kappa}{\kappa'} \frac{A(\omega)^{1-\lambda}}{A(\omega')^{1-\lambda'}} \quad (24)$$

Où la constante D dépend de ω et ω' par tous les paramètres intervenant dans son expression.

Remarque : En toute rigueur, il eût été nécessaire de prendre en compte le deuxième terme singulier dans les développements de Williams (4) et (6), la présence du défaut rompant les symétries initialement présentes.

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 7 février 2011

Pour tester l'adhérence de l'assemblage des matériaux 1 ($E_1=70$ GPa, $\nu_1=0.3$) et 2 ($E_2=7$ GPa, $\nu_2=0.3$) on réalise un essai de flexion 3-point (figure 1(a)). L'exposant de la première singularité au point O est $\lambda=0.67$, l'exposant de la suivante est très voisin de 1.

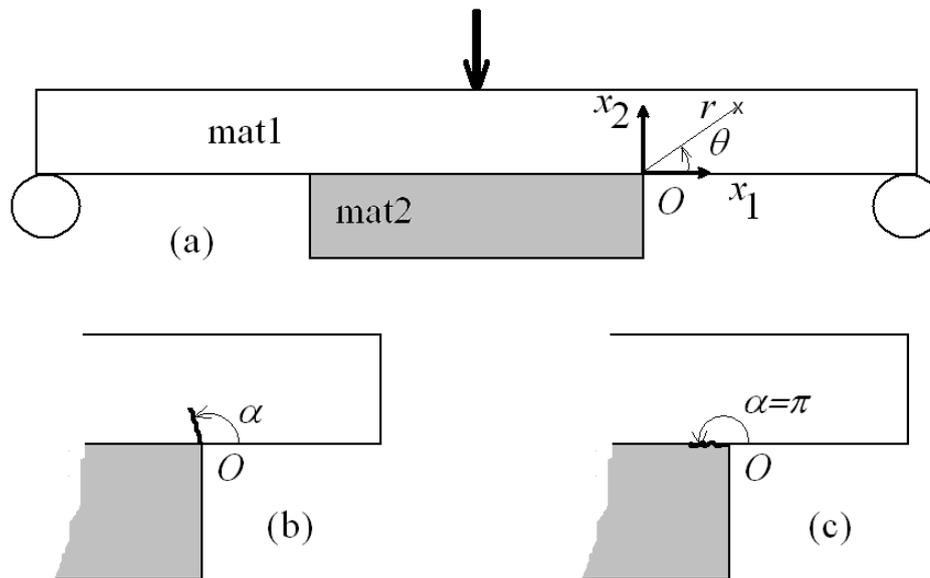


Figure 1. (a) Essai de flexion 3-point, (b) amorçage d'une fissure dans le matériau 1, (c) amorçage d'une fissure le long de l'interface.

On va d'abord étudier la possibilité d'une rupture du matériau 1 (figure 1(b)). On suppose l'existence d'une courte fissure de longueur l_1 faisant un angle α avec l'axe horizontal et on se place dans le cadre de l'élasticité plane.

- 1) Décrire la solution du problème ainsi posé à l'aide de développements asymptotiques raccordés (en précisant de quels problèmes sont solutions les différents termes introduits).

On rappelle que le critère mixte (Leguillon 2002) s'écrit sous la forme

$$k \geq k_c = \left(\frac{G_{1c}}{A(\alpha)} \right)^{1-\lambda} \left(\frac{\sigma_{1c}}{s(\alpha)} \right)^{2\lambda-1}$$

Pour une fissure dans la direction α . Les fonctions $A(\theta)$ et $s(\theta)$ sont représentées en figure 2. Les constantes G_{1c} et σ_{1c} désignent respectivement la ténacité et la résistance en traction du matériau 1.

- 2) Rappeler comment sont obtenues les fonctions $A(\theta)$ et $s(\theta)$.
- 3) En déduire l'angle de branchement effectif α_l de la fissure (justifier la réponse).

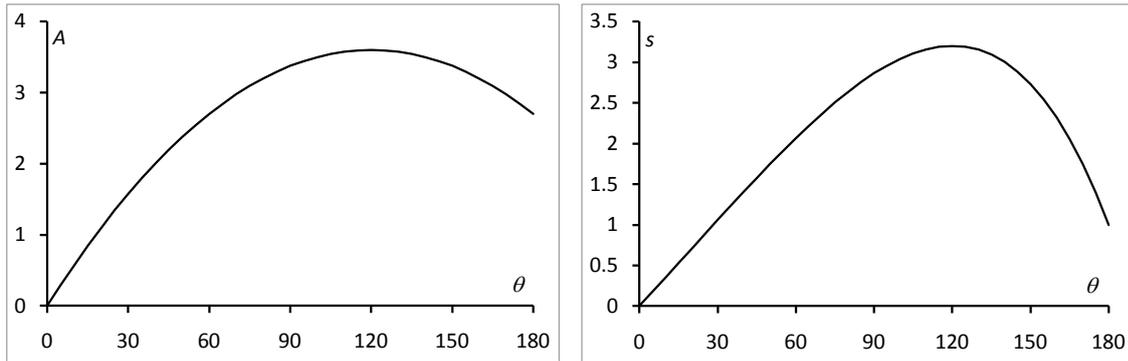


Figure 2. Les fonctions $A(\theta)$ et $s(\theta)$.

On va maintenant étudier la compétition entre la rupture du matériau 1 (questions précédentes) et la rupture de l'interface en supposant une courte fissure de délaminage de longueur l_2 (figure 1(c)).

- 4) Ecrire les développements asymptotiques raccordés correspondants (en précisant encore une fois de quels problèmes sont solutions les différents termes introduits).
- 5) Dédire du critère mixte une relation entre la ténacité G_{ic} et la résistance en traction σ_{ic} de l'interface d'une part et G_{Ic} et σ_{Ic} d'autre part, telle que la rupture de l'interface soit favorisée.

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 7 février 2011 - Corrigé

Corrigé

Je ne reprendrai pas le raisonnement qui permet d'établir les développements asymptotiques extérieurs et intérieurs, on le retrouve dans le cours, mais mettrai simplement en évidence les termes dépendant de α .

- 1) Développement extérieur

$$\begin{aligned} \underline{U}^{l_1}(x_1, x_2, \alpha) &= \underline{U}^0(x_1, x_2) + f_1(l_1, \alpha) \underline{U}^1(x_1, x_2) + \dots \\ \underline{U}^0(x_1, x_2) &= \underline{U}^0(O) + kr^\lambda \underline{u}(\theta) + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Où \underline{U}^0 est solution du problème posé sur le domaine extérieur avec $l_1=0$.

Développement intérieur

$$\underline{U}^{l_1}(x_1, x_2, \alpha) = \underline{U}^{l_1}(l_1 y_1, l_1 y_2, \alpha) = \underline{U}^0(O) + kl_1^\lambda \left[\rho^\lambda \underline{u}(\theta) + \hat{V}^1(y_1, y_2, \alpha) \right] + \dots \quad (2)$$

- 2)

$$A(\alpha) = \Psi \left(\hat{V}^1(y_1, y_2, \alpha), \rho^\lambda \underline{u}(\theta) \right) \quad (3)$$

D'après (1)

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2) = kr^{\lambda-1} \underline{\underline{s}}(\theta) + \dots \quad \underline{\underline{s}}(\theta) = \begin{pmatrix} s_{rr}(\theta) & s_{r\theta}(\theta) \\ s_{r\theta}(\theta) & s_{\theta\theta}(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow s(\alpha) = s_{\theta\theta}(\alpha) \quad (4)$$

- 3) L'angle α_1 est caractérisé par

$$A(\alpha_1)^{1-\lambda} s(\alpha_1)^{2\lambda-1} \geq A(\alpha)^{1-\lambda} s(\alpha)^{2\lambda-1} \quad \forall \alpha \in [0, \pi] \quad (5)$$

D'où $\alpha=120^\circ$.

- 4) On reprend (1) et (2) en remplaçant l_1 par l_2 et α par π .
- 5) Critère mixte appliqué au délaminage

$$k \geq k_{ic} = \left(\frac{G_{ic}}{A(\pi)} \right)^{1-\lambda} \left(\frac{\sigma_{ic}}{s(\pi)} \right)^{2\lambda-1} \quad (6)$$

Critère mixte appliqué à la non déviation

$$k \leq k_{1c} = \left(\frac{G_{1c}}{A(\alpha_1)} \right)^{1-\lambda} \left(\frac{\sigma_{1c}}{s(\alpha_1)} \right)^{2\lambda-1} \quad (7)$$

D'où

$$\frac{G_{ic}}{G_{1c}} \leq \frac{A(\pi)}{A(\alpha_1)} \left(\frac{s(\pi) \sigma_{1c}}{s(\alpha_1) \sigma_{ic}} \right)^{\frac{2\lambda-1}{1-\lambda}} \quad (8)$$

$A(\pi)=2.7, A(\alpha_1)=3.6, s(\pi)=1, s(\alpha_1)=3.2, 2\lambda-1/1-\lambda \approx 1$

$$G_{ic} \sigma_{ic} \leq 0.23 \sigma_{1c} G_{1c} \quad (9)$$

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 8 février 2010

On considère une éprouvette entaillée en V sous chargement de traction (figure 1) avec une amorce de fissure de longueur ℓ petite devant la profondeur de l'entaille et toutes les autres dimensions de l'éprouvette. En l'absence de fissure, l'entaille génère deux singularités centrées en O (le fond de l'entaille), la première $\lambda_1 = 0.545$ est associée à un mode symétrique (par rapport à la bissectrice de l'angle formant l'entaille) et la seconde $\lambda_2 = 0.906$ à un mode antisymétrique.

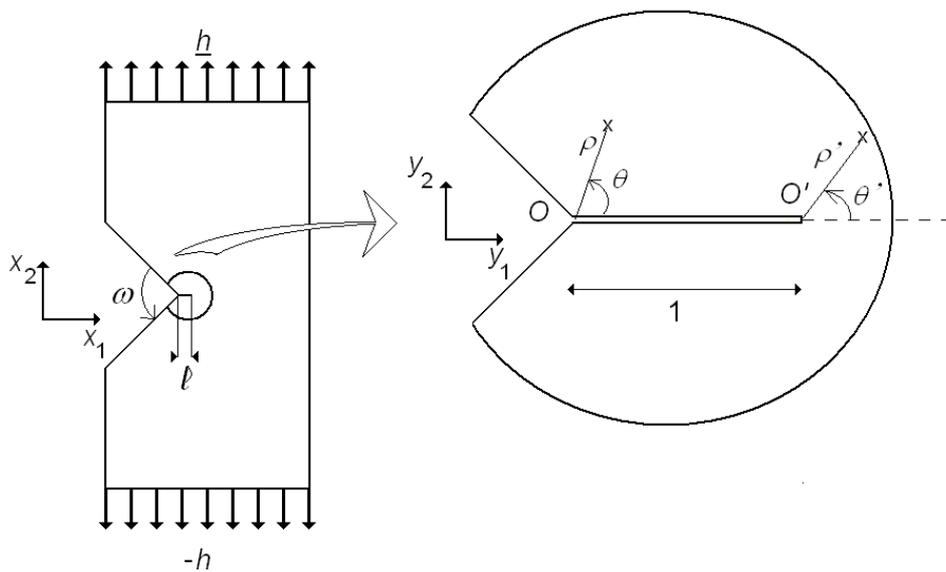


Figure 1

- 1) Ecrire les équations du problème ainsi posé dans le cadre de l'élasticité linéaire, plane. Puis écrire les développements asymptotiques raccordés permettant de décrire cette situation. On se limitera au premier terme du développement extérieur et aux deux premiers termes du développement intérieur. On précisera les équations locales dont sont solutions chacun des termes de ces développements.
- 2) Donner l'expression du facteur d'intensité des contraintes K_I du mode I à la pointe de fissure O' en fonction de la longueur ℓ , de λ_1 et du facteur d'intensité généralisé k_1 de cette singularité.

Pour modéliser une forme d'endommagement préalable à la rupture on va utiliser le modèle de zone cohésive de Dugdale (1960). On suppose qu'une densité de forces de rappel constante et égale à σ_c s'exerce sur les deux faces de la fissure (figure 2) tant que l'ouverture δ n'excède pas une valeur critique δ_c . Le chargement mécanique h ouvre la fissure alors que

les forces cohésives tendent à la refermer. Les contraintes sont écrêtées, la composante σ_{22} du tenseur des contraintes ne peut dépasser σ_c . On suppose de plus que le chargement est tel que l'ouverture en O reste inférieure à la valeur limite δ_c .

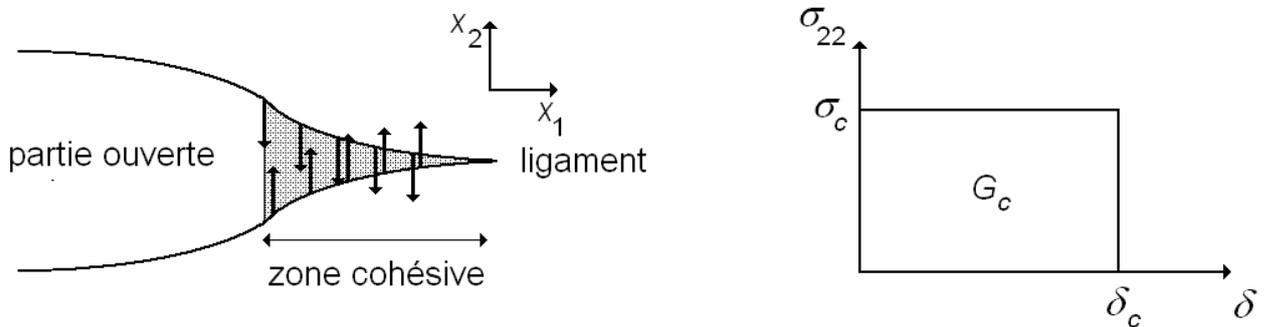


Figure 2

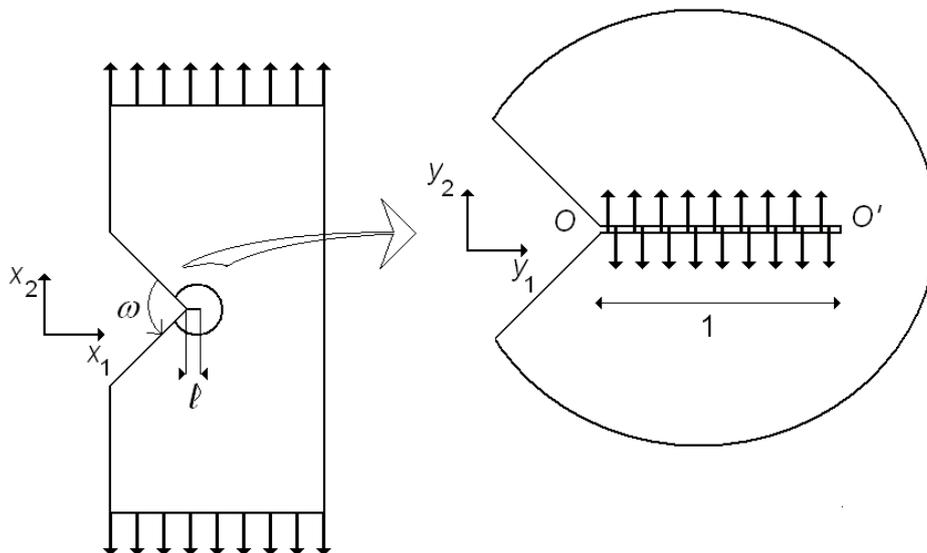


Figure 3

- 3) Ecrire les équations du problème ainsi posé. Le développement extérieur défini en 1) est-il modifié ?
- 4) Appliquer le changement de variable $y_i = x_i / \ell$ et écrire les équations du problème dans ce système de variables adimensionnelles. On emploiera notamment le gradient ∇_y par rapport à y et on apportera un soin particulier dans l'écriture des conditions sur les bords de la fissure (figure 3).
- 5) Utiliser un principe de superposition pour modifier le développement intérieur de la question 1.
- 6) Donner l'expression du facteur d'intensité des contraintes K_I^Z du mode I à la pointe de fissure O' en fonction de la longueur ℓ , de λ_1 , du facteur d'intensité généralisé k_1 et de σ_c .
- 7) En déduire une équation donnant la longueur ℓ de la zone cohésive en s'appuyant sur la propriété d'écrêtement des contraintes.

PAS DE CORRIGE DISPONIBLE

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 2 février 2009

On considère un bicouche élastique d'épaisseur $2e$, entaillé et soumis à une flexion 4-points symétrique (figure 1). Les modules de Young et coefficients de Poisson des deux matériaux sont respectivement E_1, ν et E_2, ν .

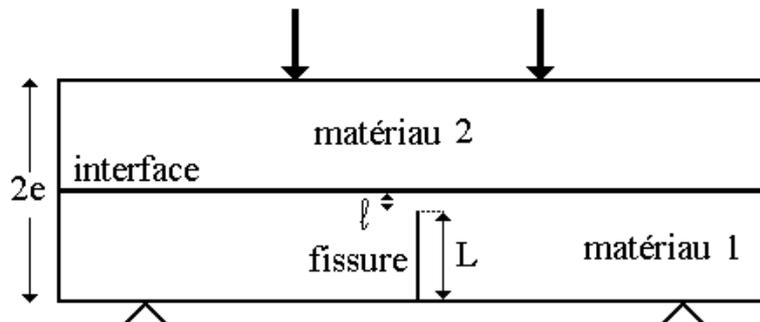


Figure 1

L'extrémité de la fissure de longueur $L < e$ est située à une distance ℓ (supposée petite devant e et L) de l'interface.

- 1) Décrire la solution de ce problème à l'aide de développements asymptotiques raccordés où ℓ est le petit paramètre.
- 2) Donner l'expression du facteur d'intensité K_I du mode I à la pointe de la fissure en fonction de ℓ . En déduire le comportement de la fissure sous chargement monotone croissant lorsque la fissure approche de l'interface.
- 3) Qu'y a-t-il à modifier si $L > e$ (figure 2) ?

➔ On rappelle que lorsque la pointe fissure touche l'interface ($\ell = 0$, $L = e$), le champ singulier en pointe de fissure est caractérisé par un exposant réel λ tel que : $\lambda < 1/2$ si $E_1 > E_2$, $\lambda = 1/2$ si $E_1 = E_2$ et $\lambda > 1/2$ si $E_1 < E_2$. Compte tenu des symétries, on peut considérer que sa multiplicité est simple.

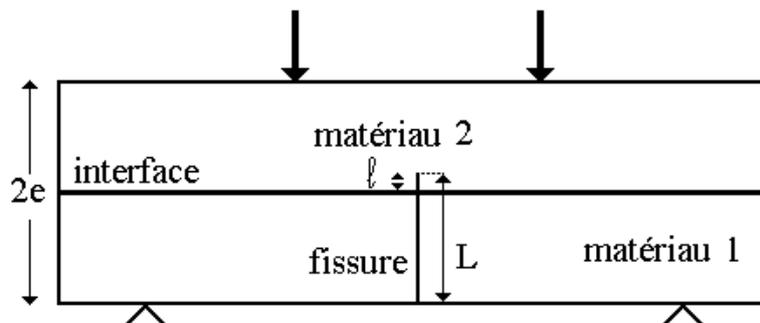


Figure 2

« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 2 février 2009 - Corrigé

Corrigé

On considère un bicouche élastique d'épaisseur $2e$, entaillé et soumis à une flexion 4-points symétrique (figure 1). Les modules de Young et coefficients de Poisson des deux matériaux sont respectivement E_1, ν et E_2, ν .

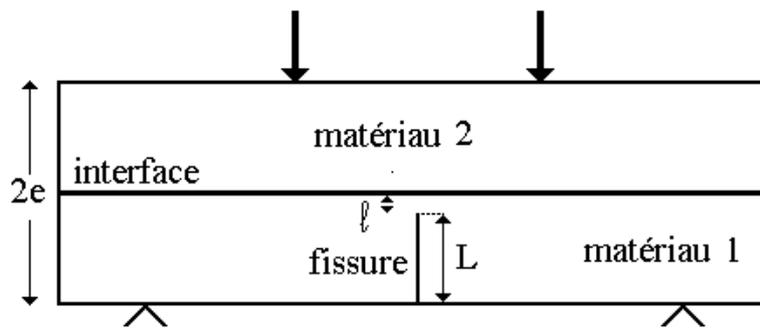


Figure 1

L'extrémité de la fissure de longueur $L < e$ est située à une distance ℓ (supposée petite devant e et L) de l'interface.

- 4) Décrire la solution de ce problème à l'aide de développements asymptotiques raccordés où ℓ est le petit paramètre.

Dans le cadre des développements asymptotiques raccordés par rapport au petit paramètre ℓ , le développement extérieur prend la forme :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}^0(x_1, x_2) + \text{petite correction}$$

Où \underline{U}^ℓ est la solution du problème posé en figure 1 (l'index ℓ rappelle la dépendance en ℓ) et où \underline{U}^0 est solution du problème non perturbé, i.e. $\ell = 0$ (voir figure 3).

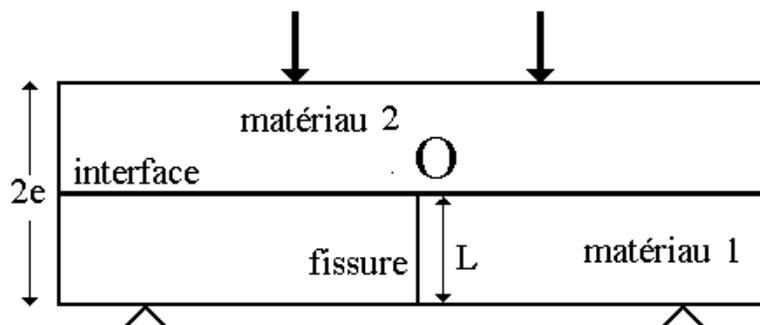


Figure 3

Dans ces conditions \underline{U}^0 se développe au voisinage de la pointe de fissure O (qui touche l'interface) en :

$$\underline{U}^0(x_1, x_2) = \underline{U}^0(O) + kr^\lambda \underline{u}(\theta) + \dots$$

(voir remarque \rightarrow et le cours pour les notations, r et θ sont les coordonnées polaires issues de O).

Le développement intérieur est obtenu après changement de variable (dilatation) $y_i = x_i / \ell$:

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}^\ell(\ell y_1, \ell y_2) = F_0(\ell) \underline{V}^0(y_1, y_2) + F_1(\ell) \underline{V}^1(y_1, y_2) + \dots$$

Les conditions de raccordement entre développement extérieur et développement intérieur aboutissent finalement à (voir cours) :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}^\ell(\ell y_1, \ell y_2) = \underline{U}^0(O) + k\ell^\lambda \left[\rho^\lambda \underline{u}(\theta) + \underline{W}^1(y_1, y_2) \right] + \dots$$

Où $\rho = r / \ell$ et où \underline{W}^1 est solution d'un problème bien posé sur le domaine intérieur non borné (figure 4).

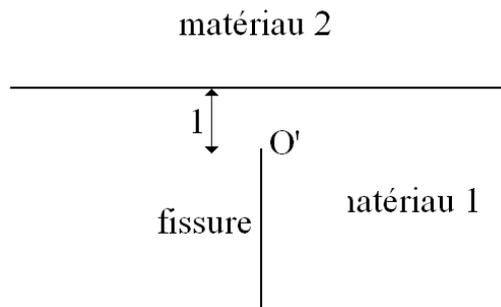


Figure 4

- 5) Donner l'expression du facteur d'intensité K_I du mode I à la pointe de la fissure en fonction de ℓ . En déduire le comportement de la fissure sous chargement monotone croissant lorsque la fissure approche de l'interface.

La fonction \underline{W}^1 est solution d'un problème d'élasticité posé sur le domaine intérieur décrit par la figure 4. Elle possède donc en O' la singularité classique de pointe de fissure et se développe dans un voisinage de ce point en :

$$\underline{W}^1(y_1, y_2) = \underline{W}^1(O') + \kappa \rho^{1/2} \underline{u}_I(\theta') + \dots$$

Ici ρ' et θ' sont les coordonnées polaires issues de O' . Si on reporte ce développement dans le développement intérieur, il vient :

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \underline{U}^\ell(\ell y_1, \ell y_2) = \underline{U}^0(O) + k\ell^\lambda \left[\rho^\lambda \underline{u}(\theta) + \underline{W}^1(O') + \kappa_I \rho^{1/2} \underline{u}_I(\theta') + \dots \right] + \dots$$

En revenant aux coordonnées physiques, on en déduit finalement

$$\underline{U}^\ell(x_1, x_2) = \dots + k\kappa_I \ell^{\lambda-1/2} r^{1/2} \underline{u}_I(\theta') + \dots$$

Où $r' = \ell \rho'$. Ici le facteur d'intensité κ_I est indépendant du chargement tout comme \underline{W}^1 d'où il est extrait. On en déduit donc :

$$K_I = k \kappa_I \ell^{\lambda-1/2}$$

Si $\lambda > 1/2$ alors $K_I \searrow 0$ quand $\ell \searrow 0$ (la pointe de fissure s'approche de l'interface) et donc, d'après le critère d'Irwin, il faut augmenter le chargement pour que la fissure propage et elle ne pourra a priori pas atteindre l'interface. La fissure est stable. Au contraire si $\lambda < 1/2$ alors $K_I \nearrow \infty$ quand $\ell \searrow 0$ et à chargement donné la fissure accélère, elle est instable. Si $\lambda = 1/2$, l'interface n'a pas d'influence la fissure propage dans un milieu élastiquement homogène.

6) Qu'y a-t-il à modifier si $L > e$ (figure 2) ?

Par rapport au raisonnement précédent, seul le domaine intérieur est modifié (figure 5). Le seul changement intervenant dans les calculs concerne donc la fonction \underline{W}^1 .

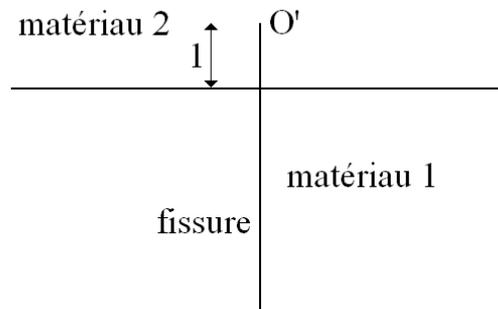
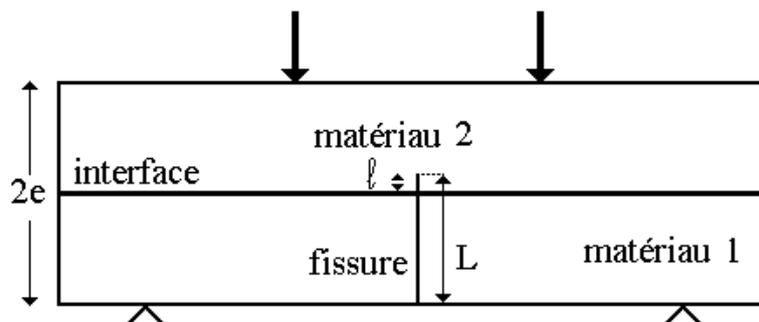


Figure 5

Dans le comportement de la fissure il faut maintenant considérer le cas $\ell \nearrow$ (la pointe de fissure s'éloigne de l'interface). Si $\lambda > 1/2$ alors $K_I \nearrow$ quand $\ell \nearrow$ et donc, toujours d'après le critère d'Irwin, la fissure accélère, elle est instable. Au contraire si $\lambda < 1/2$ alors $K_I \searrow$ quand $\ell \nearrow$ Il faut donc augmenter le chargement pour propager la fissure, la fissure est stable. Si $\lambda = 1/2$, l'interface n'a pas d'influence la fissure propage dans un milieu élastiquement homogène.

➔ On rappelle que lorsque la pointe fissure touche l'interface ($\ell = 0$, $L = e$), le champ singulier en pointe de fissure est caractérisé par un exposant réel λ tel que : $\lambda < 1/2$ si $E_1 > E_2$, $\lambda = 1/2$ si $E_1 = E_2$ et $\lambda > 1/2$ si $E_1 < E_2$. Compte tenu des symétries, on peut considérer que sa multiplicité est simple.



« Singularités, développements asymptotiques ... »
 Examen, 1^{ère} session, 15 février 2008

Une éprouvette CT entaillée en V est sollicitée en cisaillement pur (figure 1), des déplacements horizontaux de signes contraires lui sont appliqués (essai Arcan).

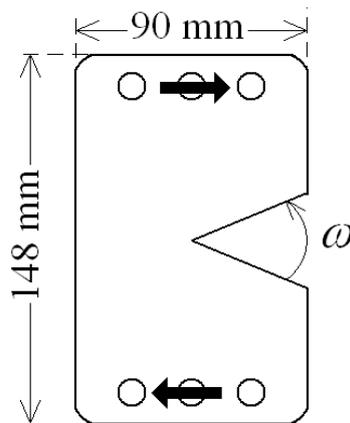


Figure 1 : éprouvette CT.

- 1) Ecrivez le développement de la solution élastique au voisinage du fond d'entaille. Notez que les deux premiers exposants singuliers sont présentés en figure 2 en fonction de l'ouverture ω . Le premier exposant λ_1 correspond à un mode symétrique (par rapport à la bissectrice du V) et le second λ_2 à un mode antisymétrique. Justifiez vos choix. Que peut-on conclure lorsque l'ouverture ω dépasse 105° ?

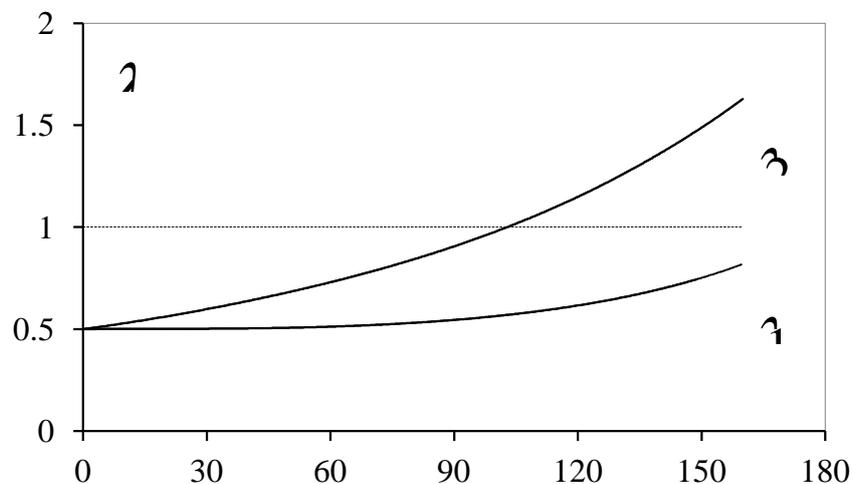


Figure 2 : exposants singuliers.

On considère maintenant une petite fissure de longueur ℓ partant du fond d'entaille et faisant un angle α avec la bissectrice du V (figure 3).

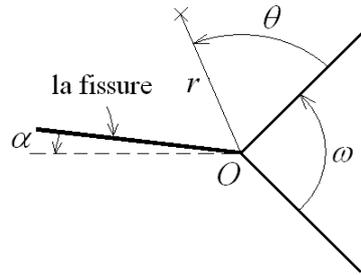


Figure 3 : angles.

- 2) Ecrivez des développements asymptotiques raccordés décrivant la solution du problème élastique en présence de la petite fissure et donnez (sans démonstration) la forme générale du critère permettant de prédire l'amorçage de la rupture. Précisez bien les termes qui dépendent de la direction α prise par la fissure.

Le coefficient géométrique A intervenant dans l'expression du taux de restitution d'énergie et la fonction angulaire de la composante orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ du second mode (λ_2) sont illustrés respectivement sur les figures 4 et 5 pour $\omega = 90^\circ$, en fonction de l'angle de déviation α .

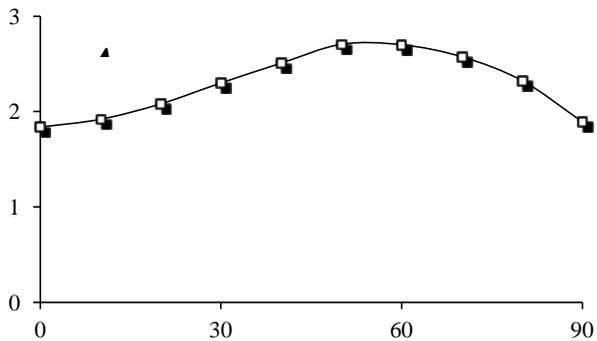


Figure 4 : Coefficient A

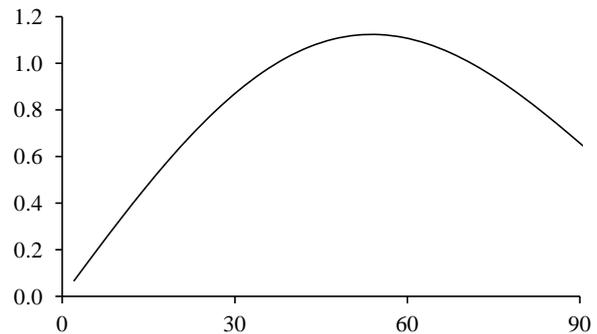


Figure 5 : composante orthoradiale

- 3) Déduisez la direction α_c prise par la fissure dans ce cas.
- 4) Déduisez des développements asymptotiques raccordés précédents une expression du facteur d'intensité de contraintes k_I du mode I (ouverture) en pointe de fissure, en fonction de la longueur ℓ de la fissure.

PAS DE CORRIGE DISPONIBLE