

---

# Simulation de la migration d'une dune sous un vent cisailé constant

Sébastien PEARRON

Laboratoire de Modélisation en Mécanique,  
UMR CNRS 7607, Boîte 162,  
Université Paris 6, 75252 Paris France

# Plan de la présentation

---

- Introduction

# Plan de la présentation

---

- Introduction
- Théorie
  - Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe
  - Linéarisation des équations
  - Évolution de la dune

# Plan de la présentation

---

- Introduction
- Théorie
  - Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe
  - Linéarisation des équations
  - Évolution de la dune
- Résultats numériques
  - Équations linéarisées et un sol dur
  - Équations linéarisées et un sol érodable
  - Équations non linéarisées et un sol dur
  - Équation linéarisées avec  $V$  très grand

# Plan de la présentation

---

- Introduction
  - Théorie
    - Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe
    - Linéarisation des équations
    - Évolution de la dune
  - Résultats numériques
    - Équations linéarisées et un sol dur
    - Équations linéarisées et un sol érodable
    - Équations non linéarisées et un sol dur
    - Équation linéarisées avec  $V$  très grand
  - Ouvertures
    - Comparaison avec le code Castem
    - Ouverture sur la résolution en trois dimensions
-

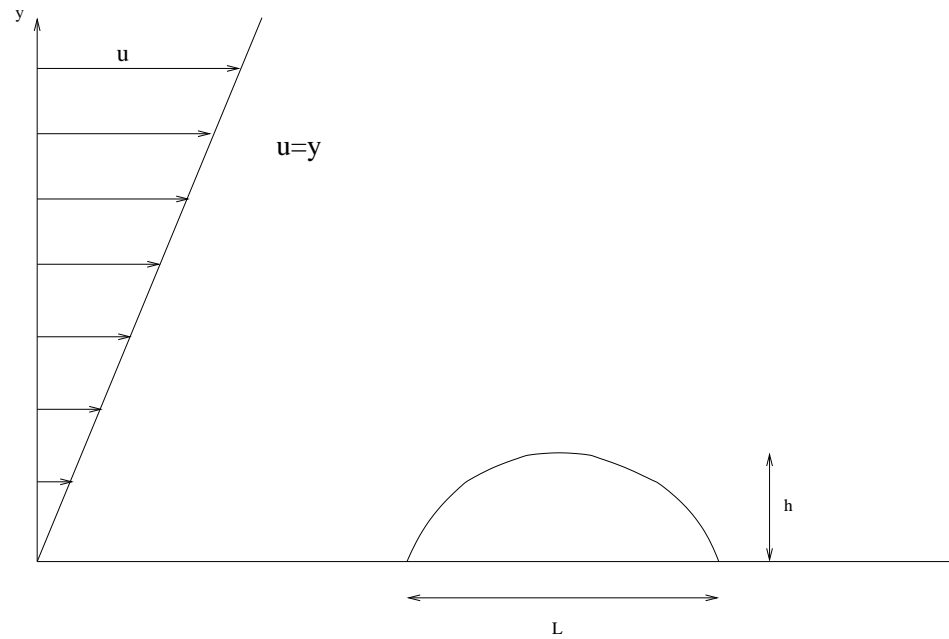
# Plan de la présentation

---

- Introduction
- Théorie
  - Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe
  - Linéarisation des équations
  - Évolution de la dune
- Résultats numériques
  - Équations linéarisées et un sol dur
  - Équations linéarisées et un sol érodable
  - Équations non linéarisées et un sol dur
  - Équation linéarisées avec  $V$  très grand
- Ouvertures
  - Comparaison avec le code Castem
  - Ouverture sur la résolution en trois dimensions
- Conclusion

# Introduction

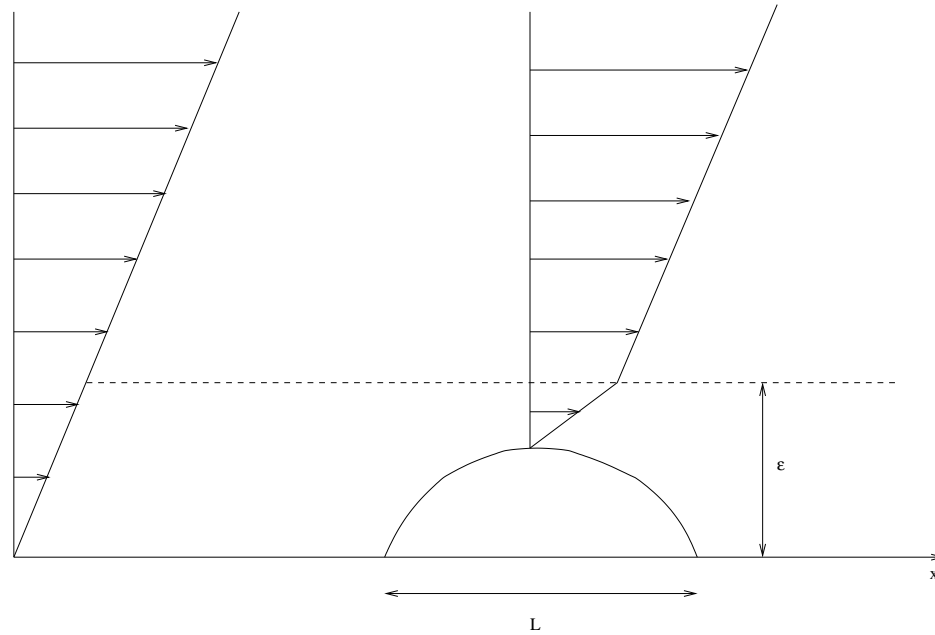
---



- Écoulement cisailé
- Hypothèses
  - Écoulement laminaire
  - Fluide visqueux à Reynolds infini
  - Écoulement stationnaire

# Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe

On utilise les équations de Navier-Stokes stationnaires que l'on adimensionne.



## Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe

---

On obtient alors le système:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}$$

## Calcul de l'écoulement autour d'une bosse fixe

---

Les conditions limites sont:

À la paroi, il y a adhérence.

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y} = f(\tilde{x})) = 0, \quad \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = f(\tilde{x})) = 0,$$

En amont de la bosse, l'écoulement est cisailé:

$$\tilde{u}(\tilde{x} \rightarrow -\infty, \tilde{y}) = \tilde{y}, \quad \tilde{v}(\tilde{x} \rightarrow -\infty, \tilde{y}) = 0.$$

Loin en haut de la bosse, on a:  $\tilde{u} = \tilde{y}$  donc

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y} \rightarrow \infty) \rightarrow \tilde{y}$$

## Linéarisation des équations

---

Sur une petite hauteur la vitesse est considérée linéaire. On considère une bosse de hauteur faible  $\eta$  ( $\eta \ll \varepsilon$ ).

$$\tilde{u} = \tilde{y} + \eta\tilde{u}_1$$

$$\tilde{v} = \eta\tilde{v}_1$$

Le frottement pariétal  $\tau$  vaut alors:

$$\tilde{\tau} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 1 + \eta\tilde{\tau}_1$$

On aboutit à:

$$FT[\tau] = (3Ai(0))(-ik)^{1/3} FT[f]$$

# Équations d'évolution de la dune

---

Conservation de la masse de la dune:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$$

# Équations d'évolution de la dune

---

Conservation de la masse de la dune:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

Relation entre  $q$  et  $\tau$

$$q = \varpi(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x})$$

# Équations d'évolution de la dune

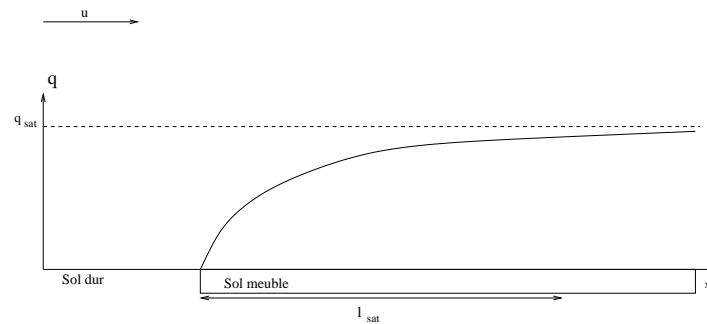
Conservation de la masse de la dune:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$$

Relation entre  $q$  et  $\tau$

$$q = \varpi (\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x})$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q_{sat} - q}{l_{sat}}$$



# Équations d'évolution de la dune

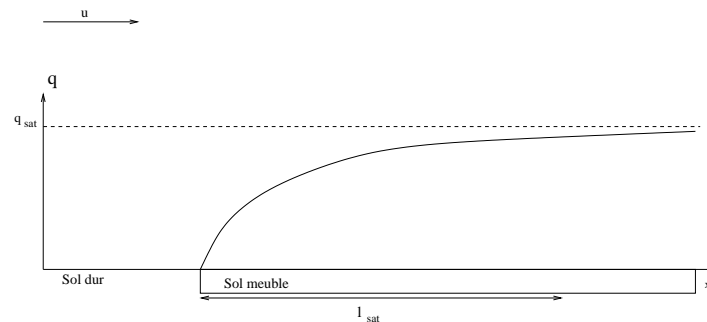
Conservation de la masse de la dune:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

Relation entre  $q$  et  $\tau$

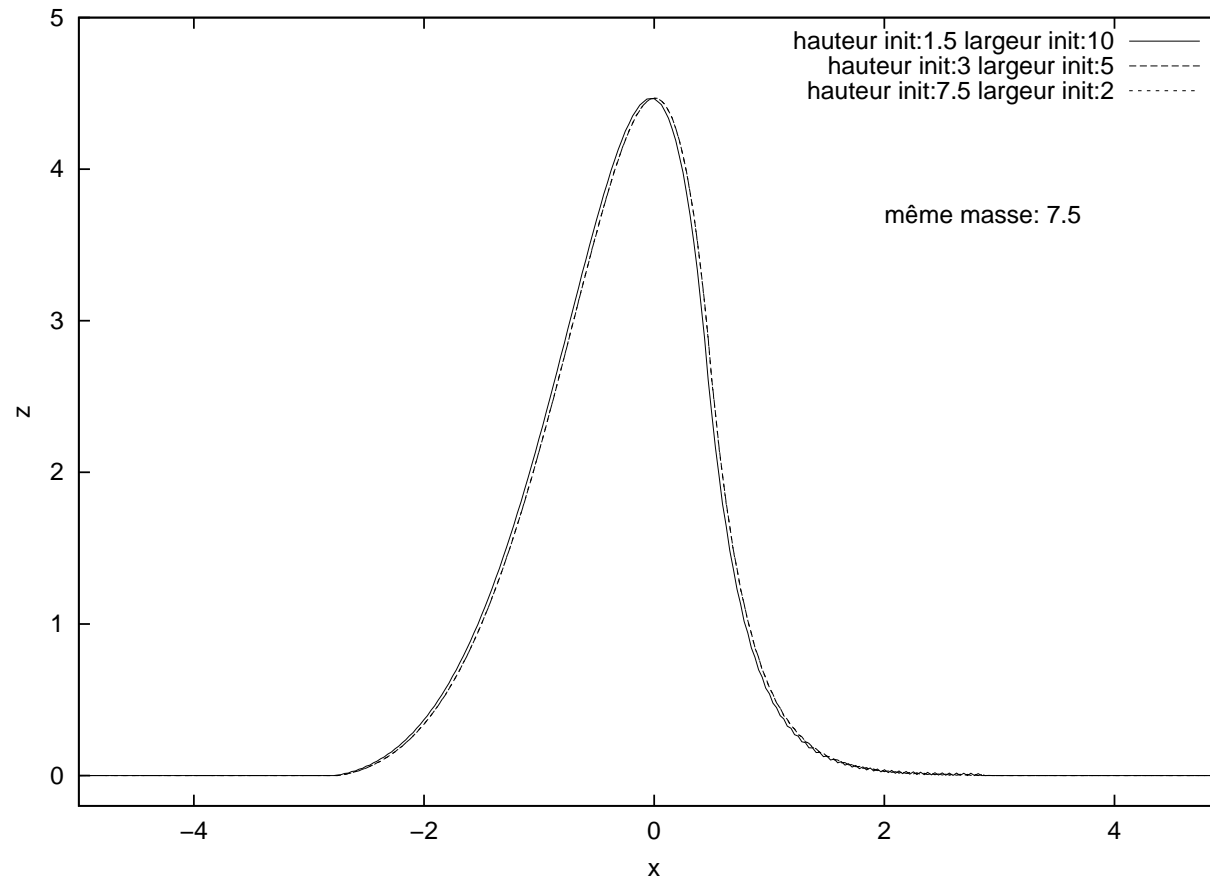
$$q = \varpi \left( \tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q_{sat} - q}{l_{sat}}$$



$$\frac{\partial q}{\partial x} + Vq = V\varpi \left( \tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

# Autosimilarité



Pour une même masse initiale, même forme finale.

## Autosimilarité

---

On considère l'équation

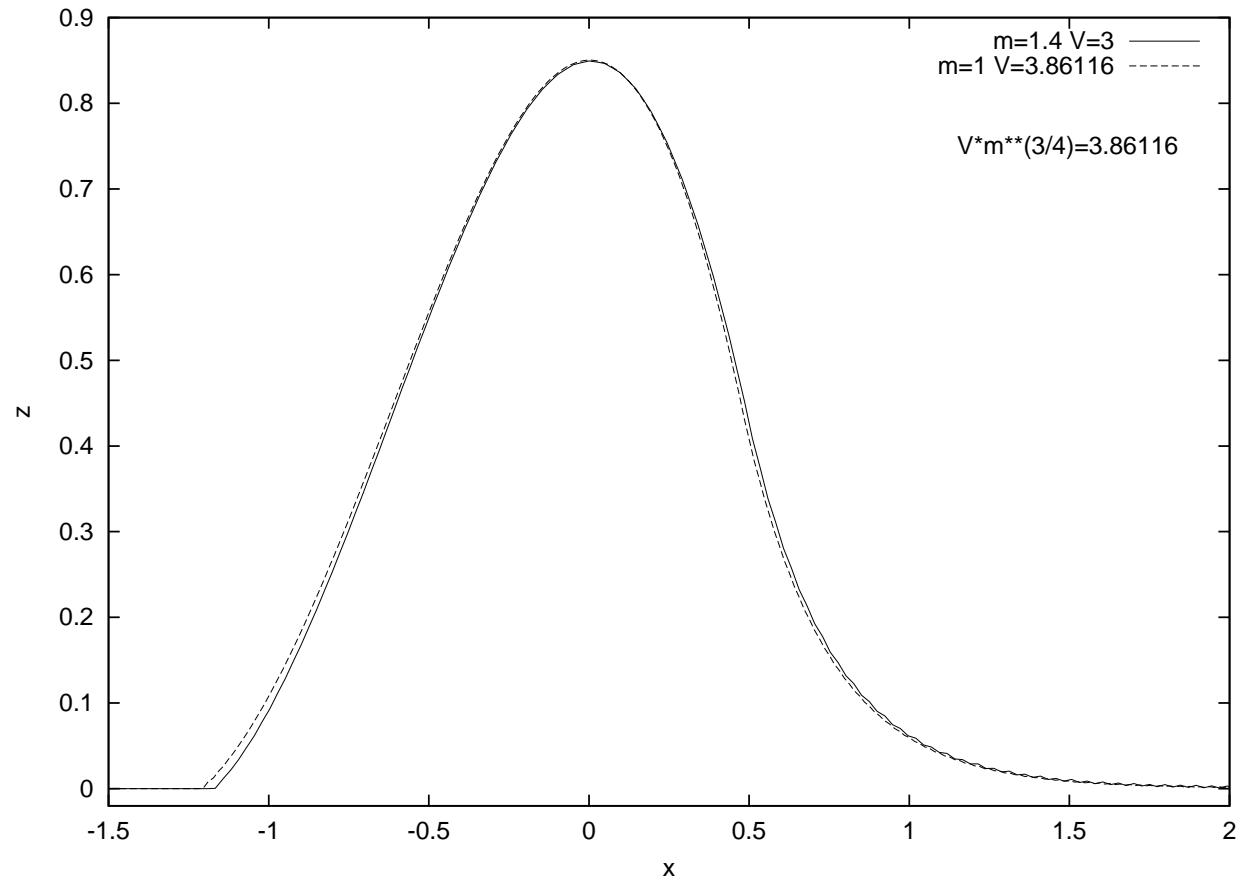
$$\frac{\partial q}{\partial x} + Vq = V\varpi(\tau - \tau_s).$$

On pose  $x = Lx^*$ ,  $f = Ff^*$ ,  $\tau = T\tau^*$ ,  $q = Qq^*$ ,  $t = Et^*$ ,  $m = Mm^*$   
et on aboutit à:

$$\frac{1}{Vm^{3/4}} \frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s).$$

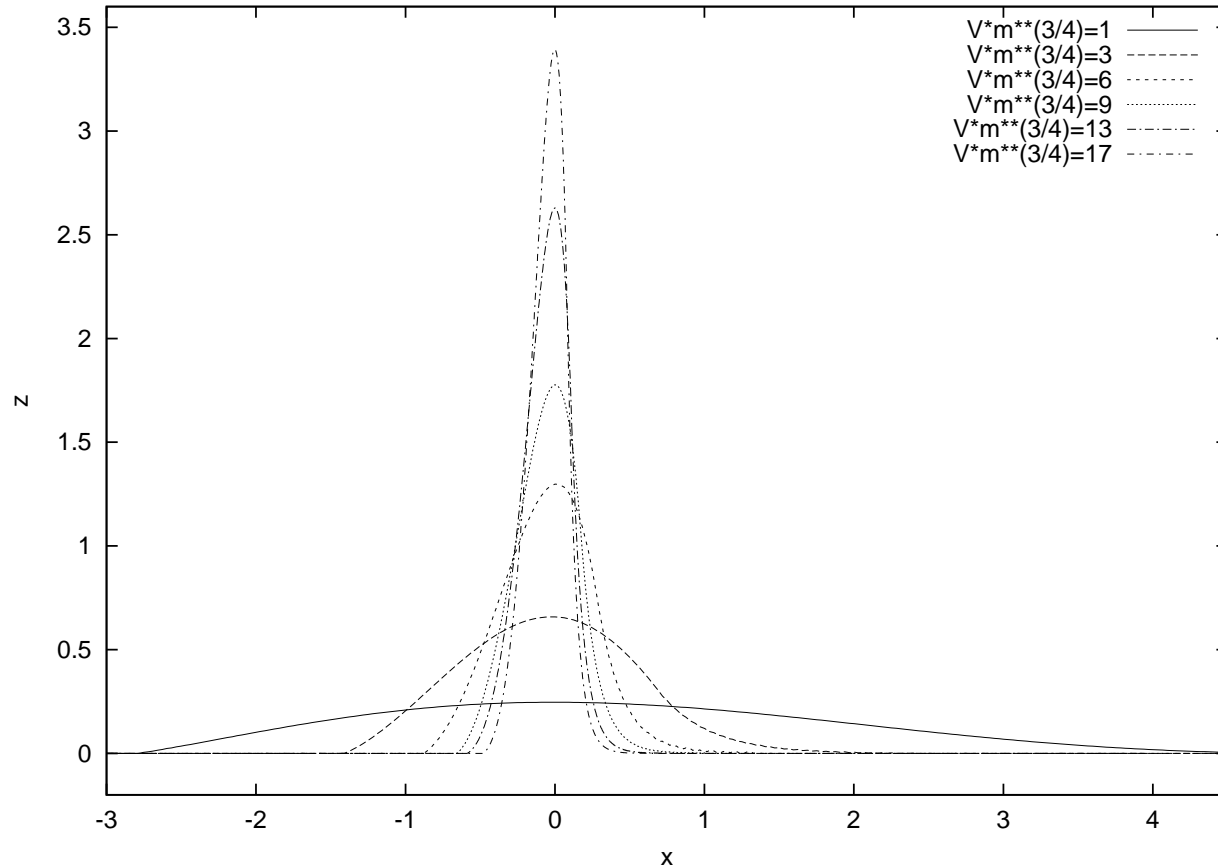
●  $Vm^{3/4}$  est un paramètre d'autosimilarité

# Autosimilarité



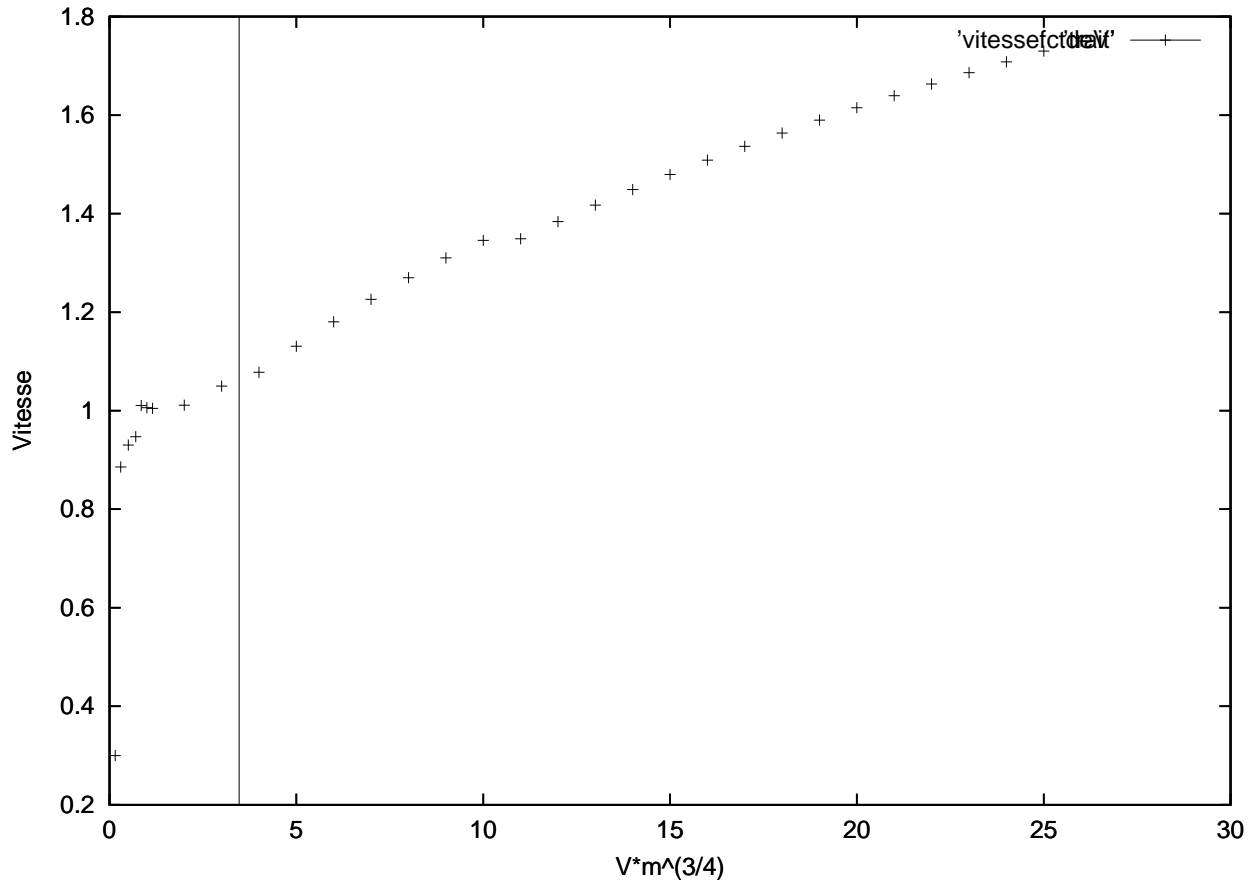
Pour un même  $V m^{3/4}$ , même forme finale.

# Autosimilarité



Évolution de la forme de la dune en fonction de la valeur de  $Vm^{3/4}$

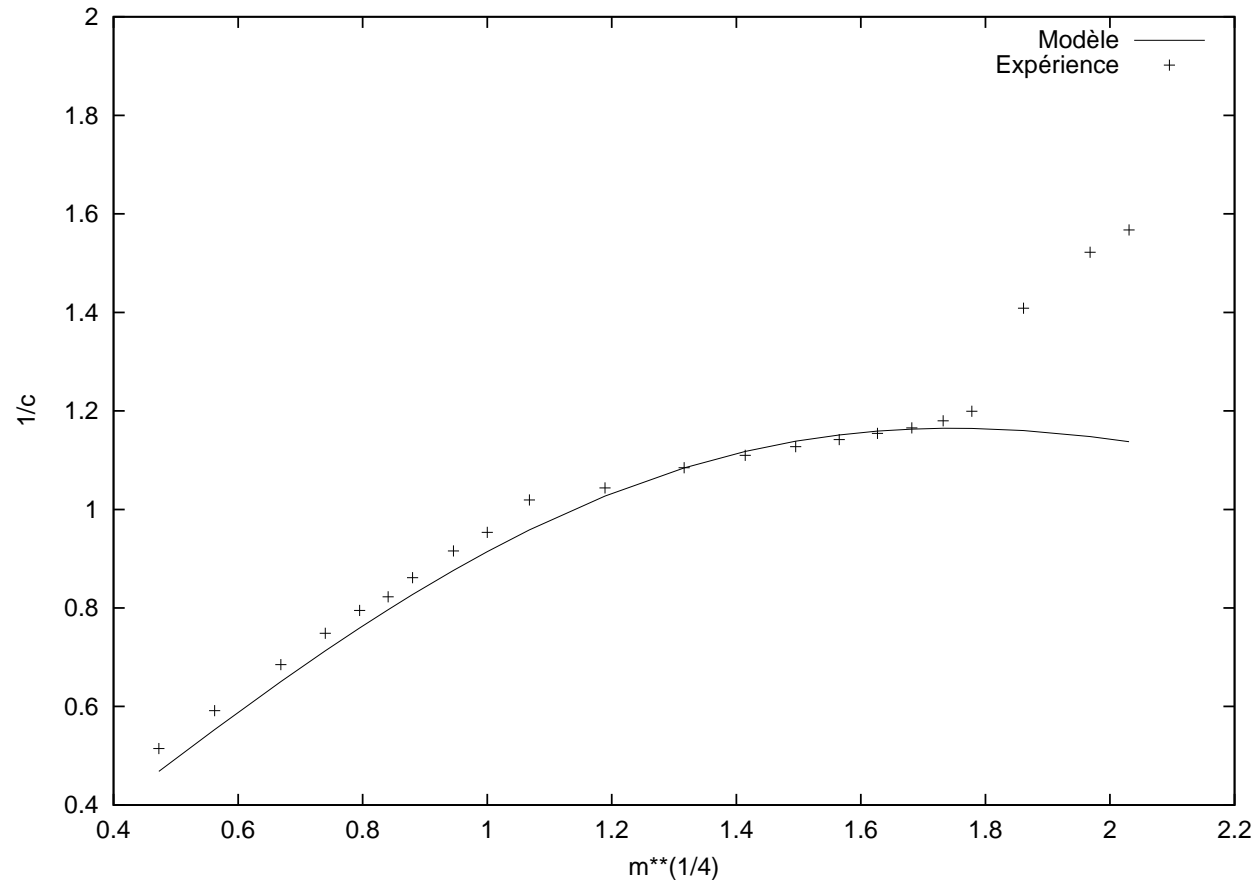
# Autosimilarité



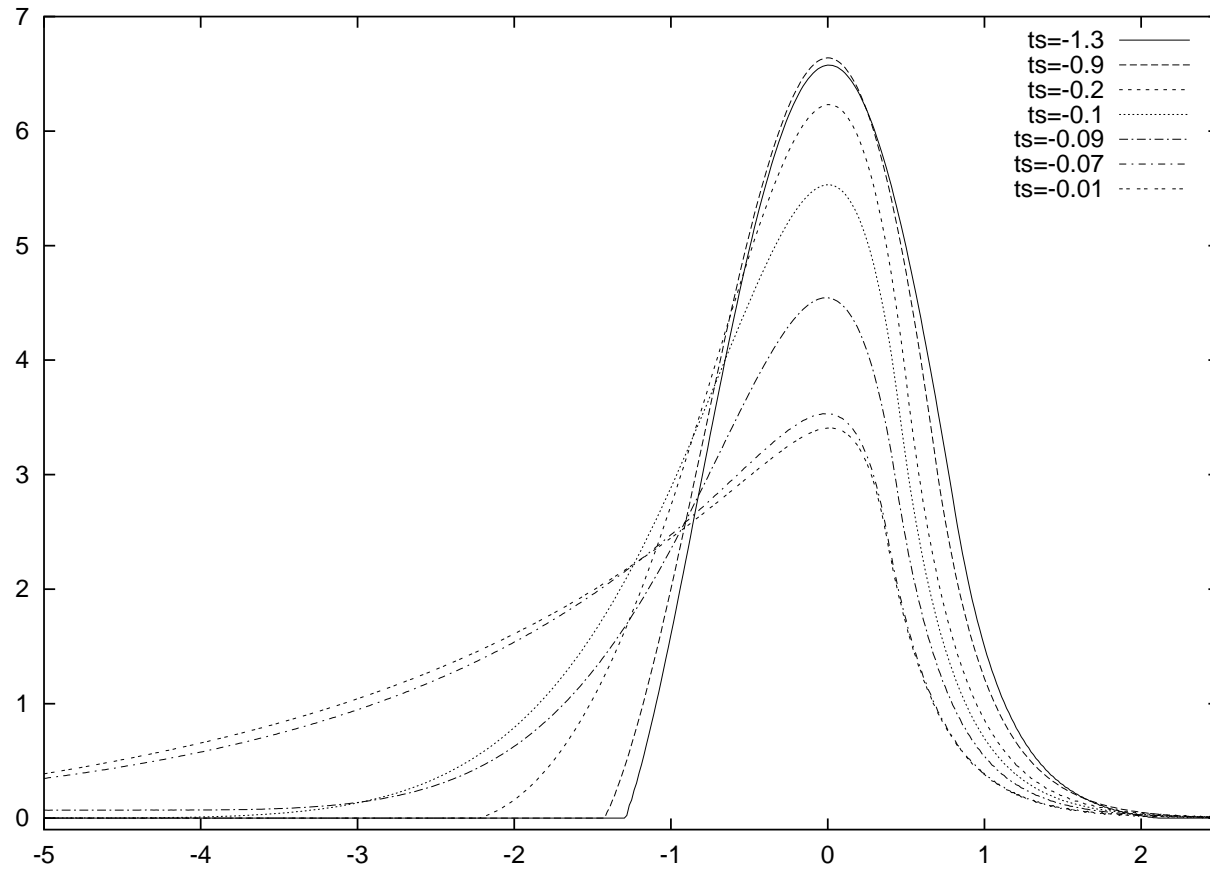
L'approximation de la courbe en une droite  $c^* = 1 + V^*/32$ .

---

$$c = c^* m^{-1/4} \text{ et } c = m^{1/4} \left(1 + \frac{V m^{3/4}}{32}\right)$$

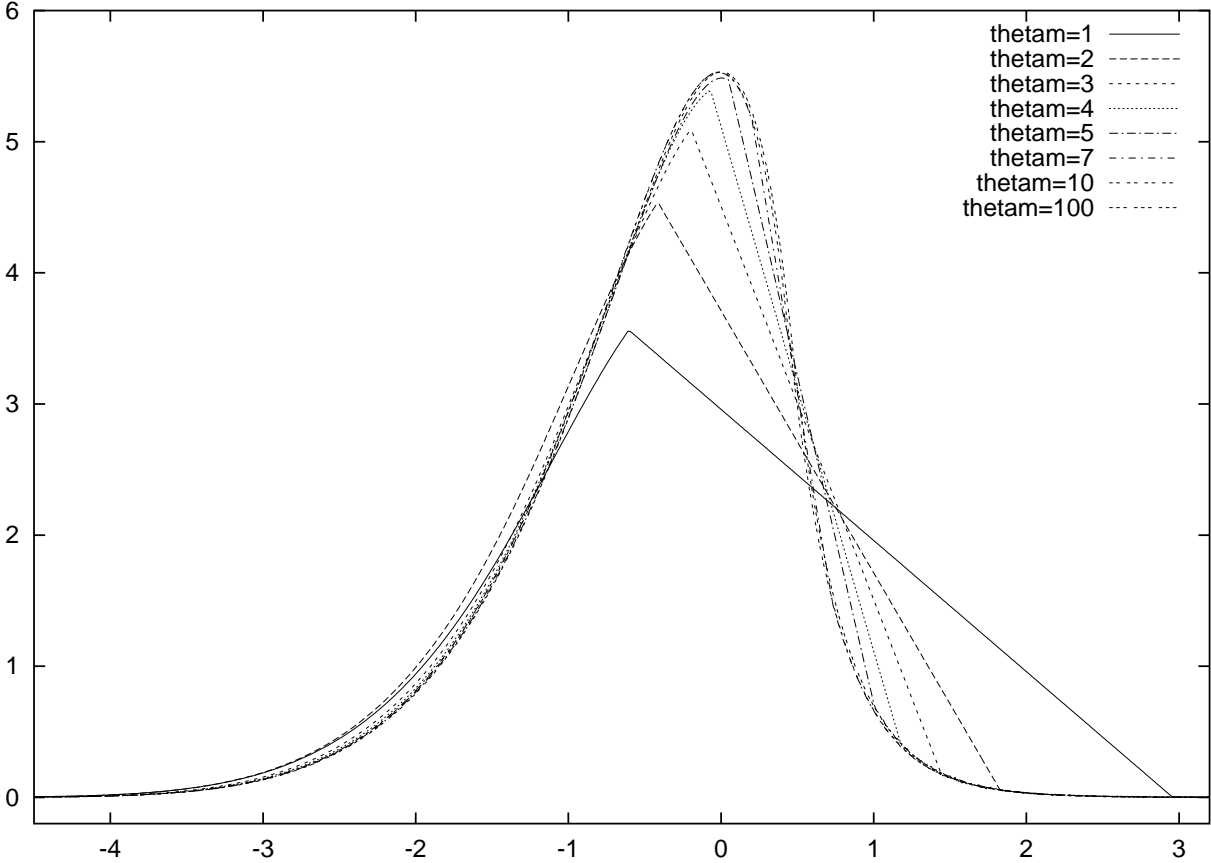


## Variation de la valeur de $\tau_{seuil}$



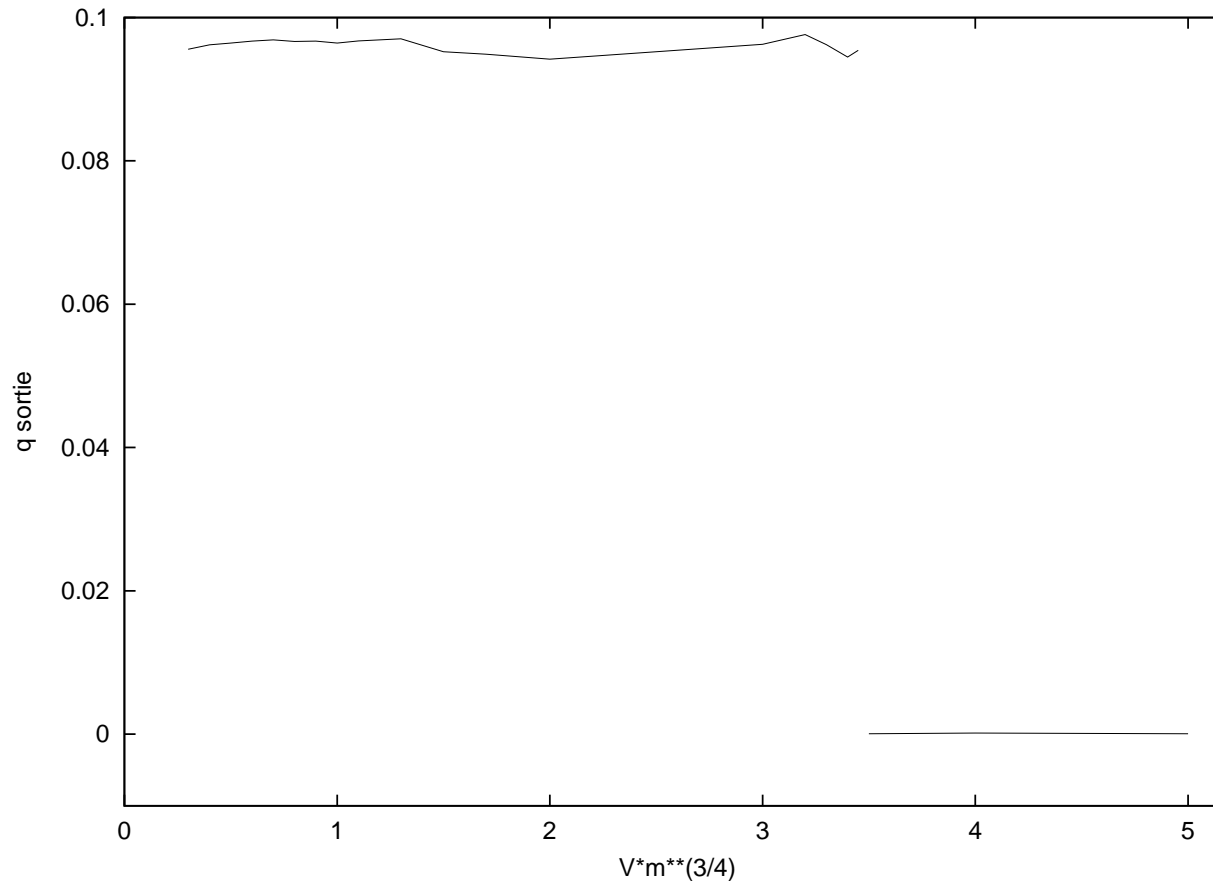
$$\frac{\partial q}{\partial x} + Vq = V\varpi(\tau - \tau_s).$$

# Variation de la valeur de l'angle d'avalanche



## Flux de sortie

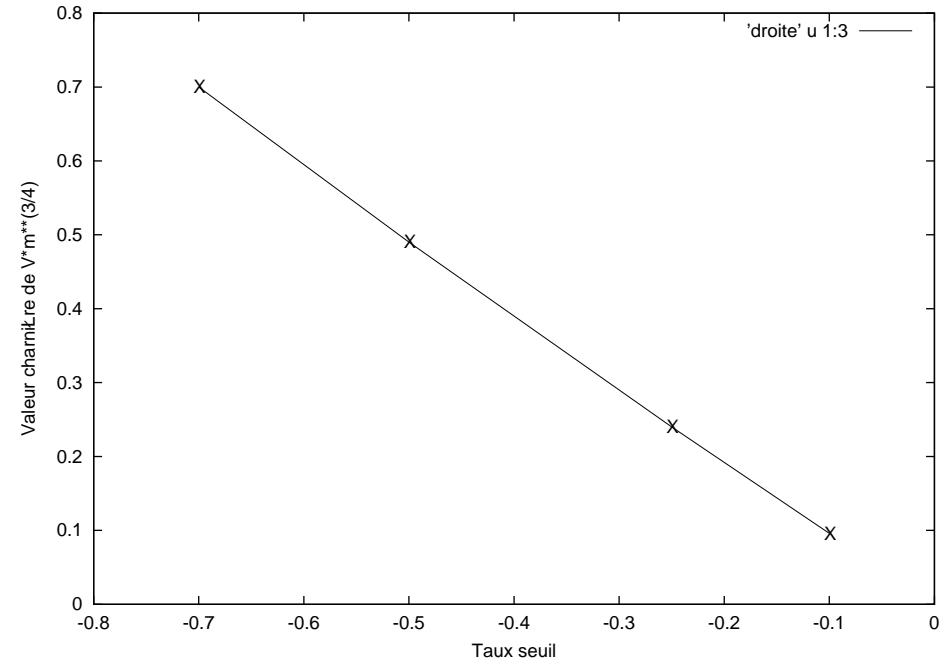
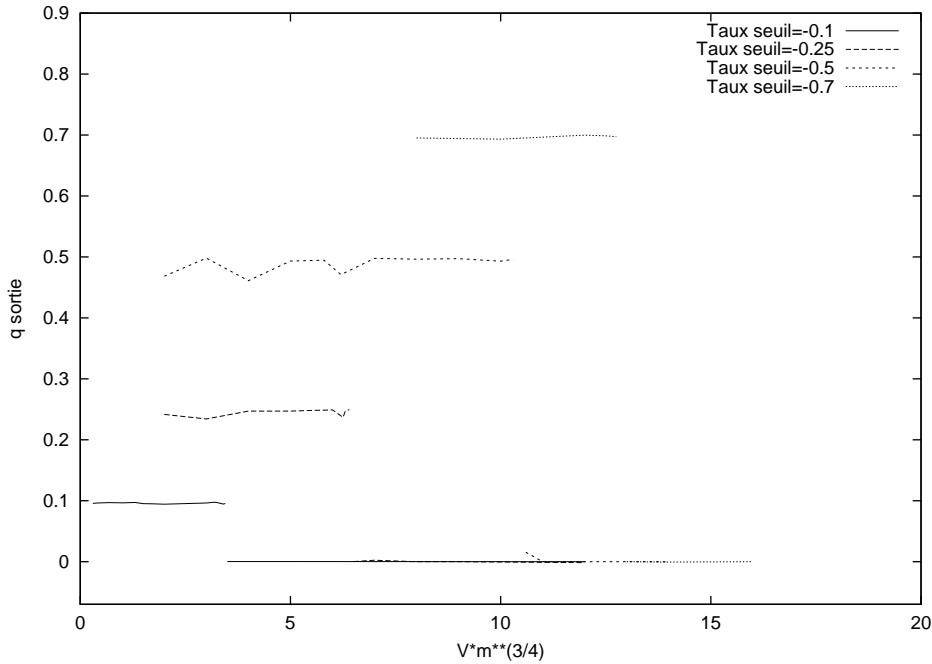
---



Flux de sortie non nul: la dune perd de la masse. Résultats non pertinents pour  $V m^{3/4} < 3.5$

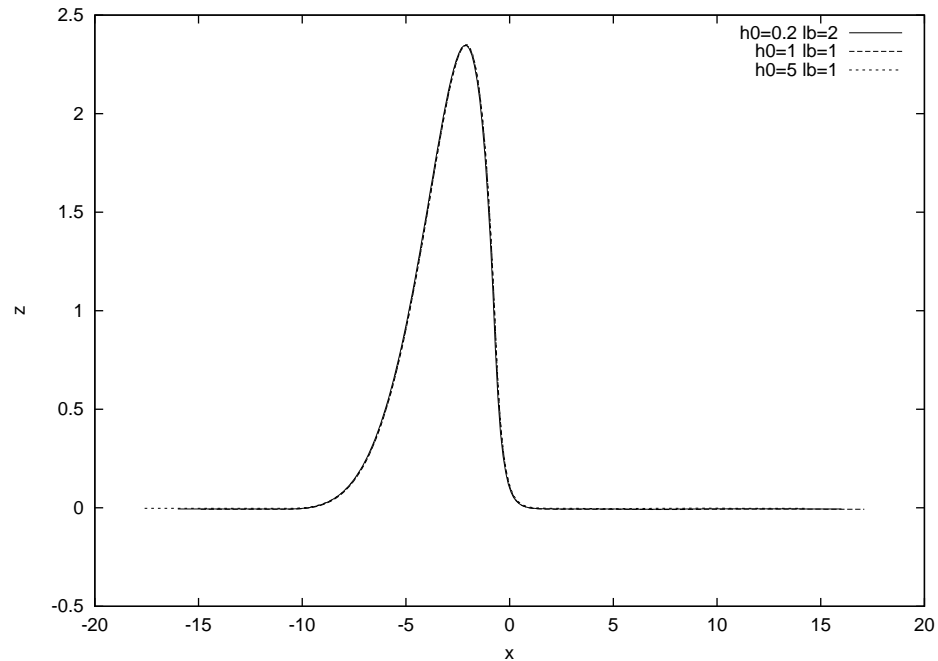
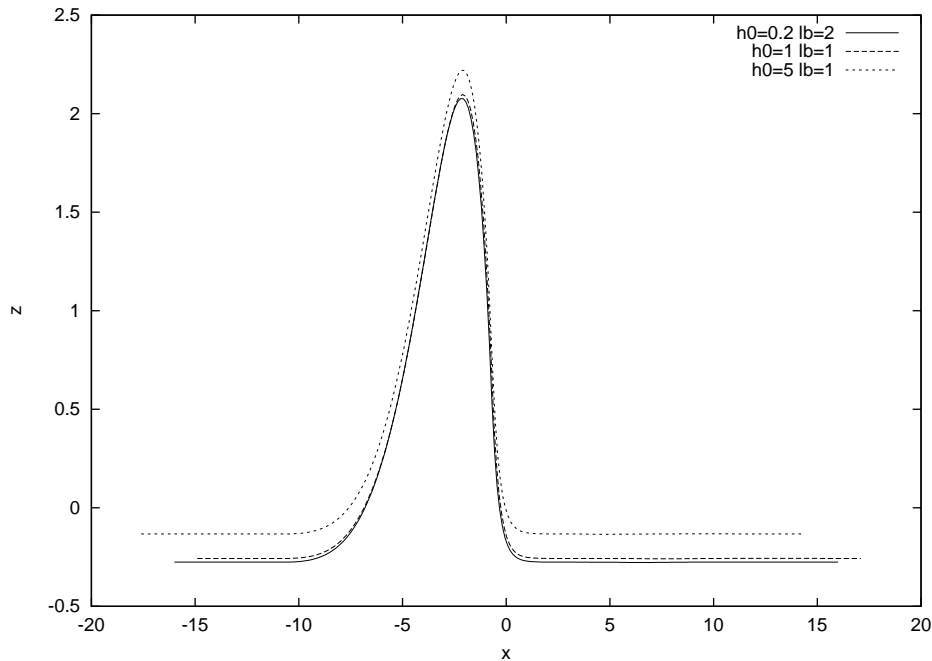
---

# Flux de sortie



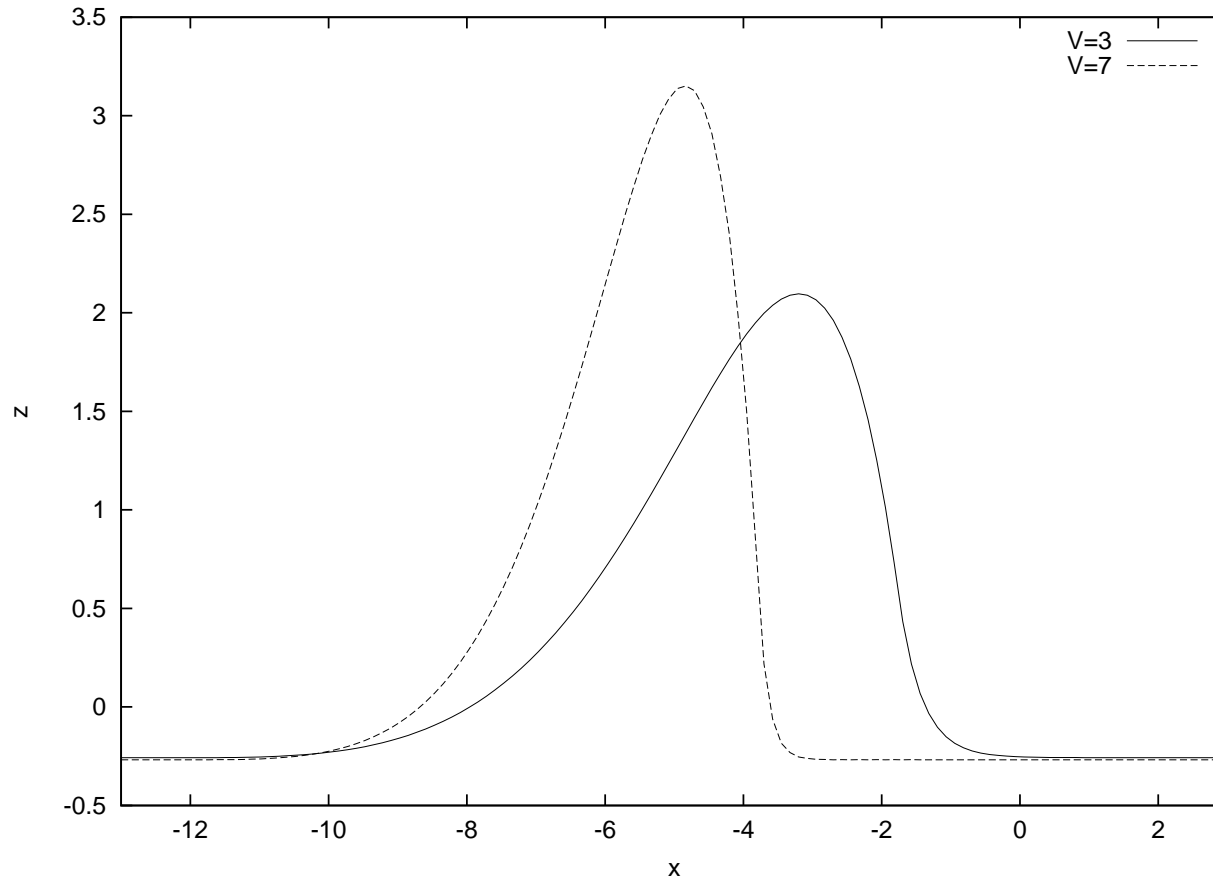
Flux de sortie en fonction de  $V^*m^{3/4}$  pour différentes valeurs de  $\tau_{\text{seuil}}$

# Équations linéarisées et un sol érodable



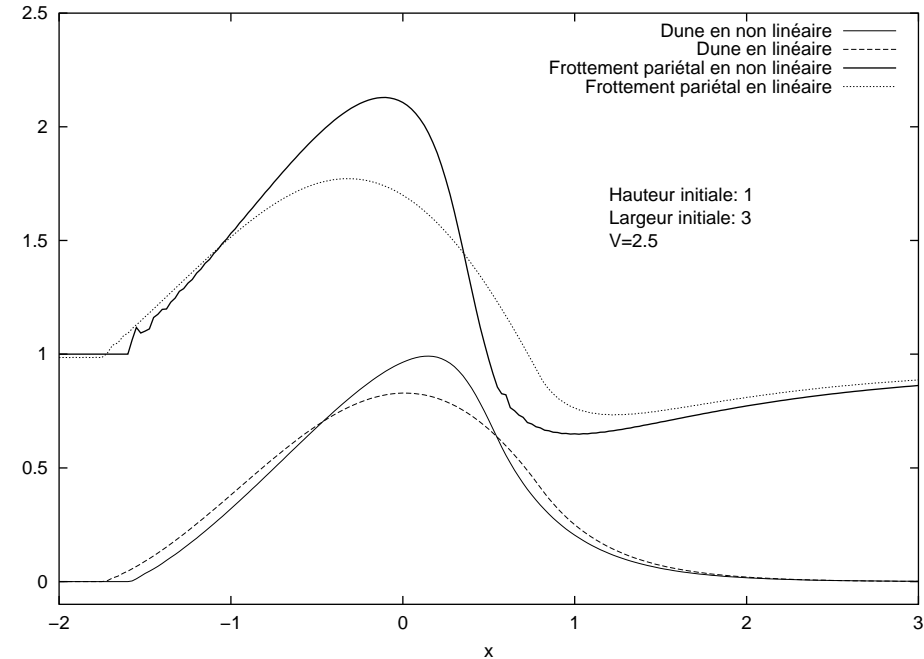
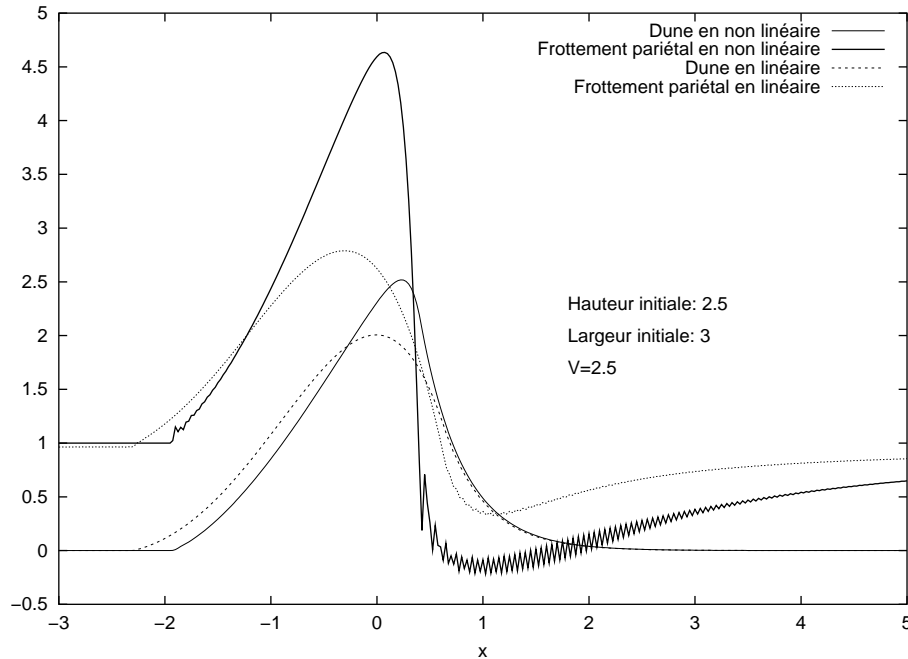
Dunes finales pour différentes formes initiales.

# Équations linéarisées et un sol érodable



Dunes finales pour des valeurs différentes de  $V$ .

# Équations non linéarisées et un sol dur



Résultats en non linéaire assez proches du linéaire.

## Équation avec $V$ très grand

---

$$q = \varpi(\tau - \tau_s - \lambda \frac{\partial f}{\partial x}).$$

$$q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s - \frac{\lambda}{m^{1/2}} \frac{\partial f^*}{\partial x^*}).$$

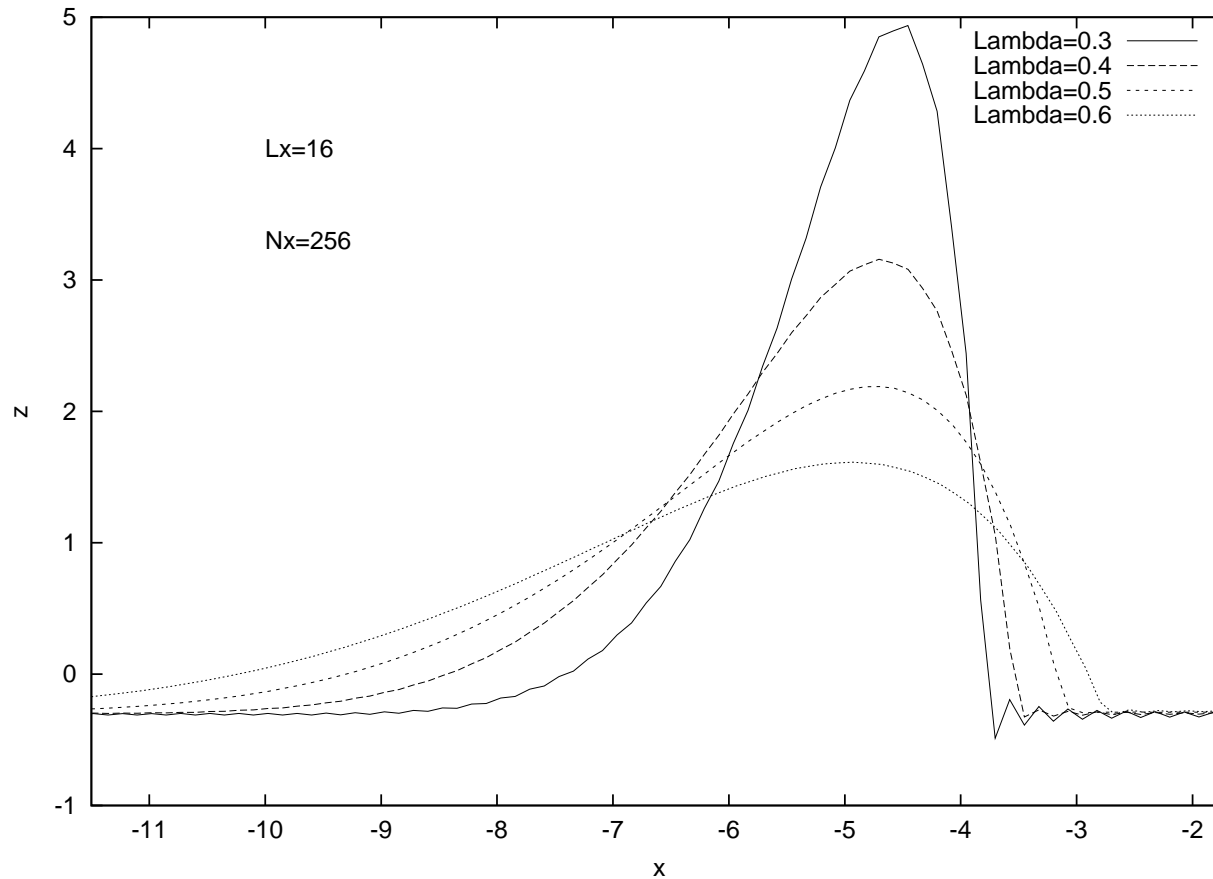
$\lambda^* = \frac{\lambda}{m^{1/2}}$  est un nouveau paramètre d'autosimilarité.

## Évolution d'un bruit

---

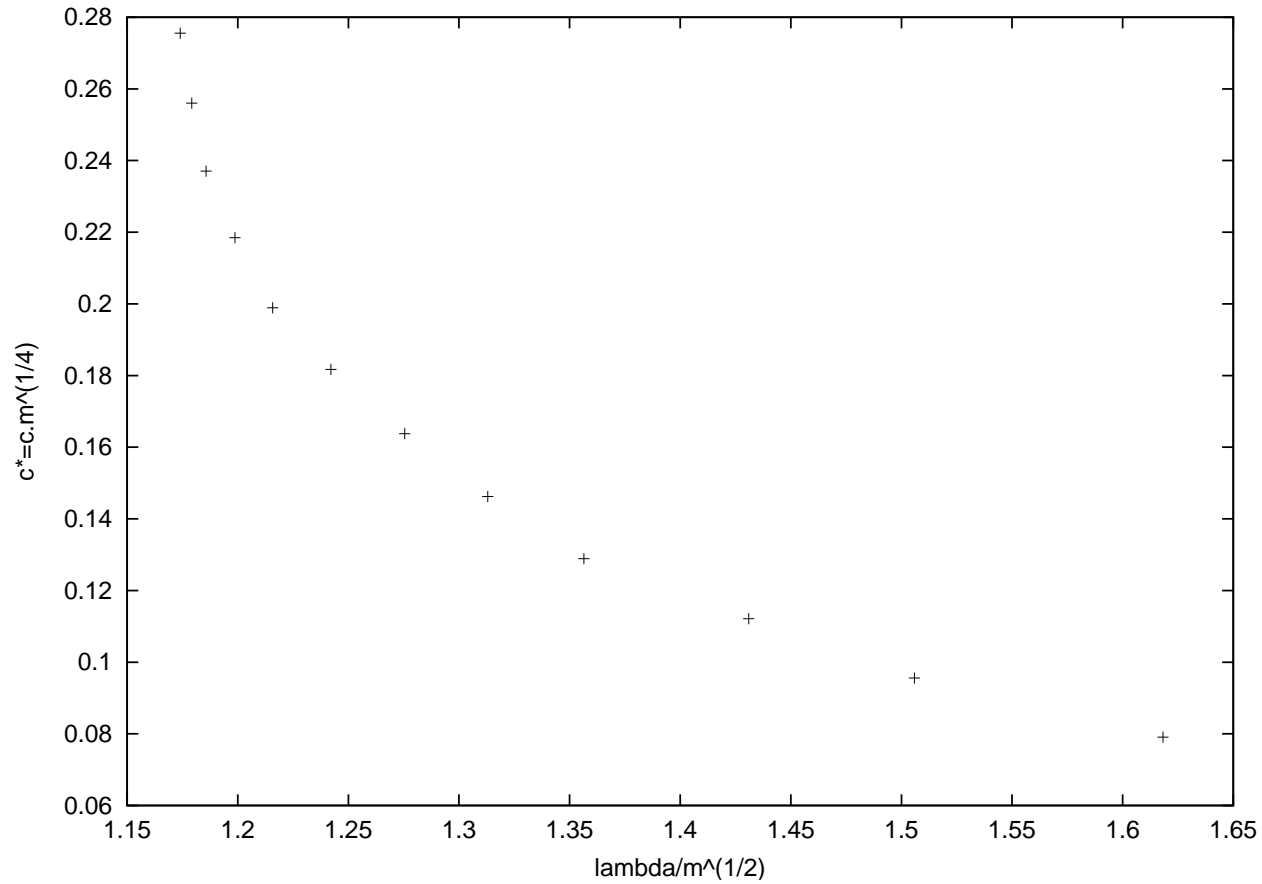
D'un bruit on arrive à une seule dune.  
**animation**

# Ínfluence de $\lambda$



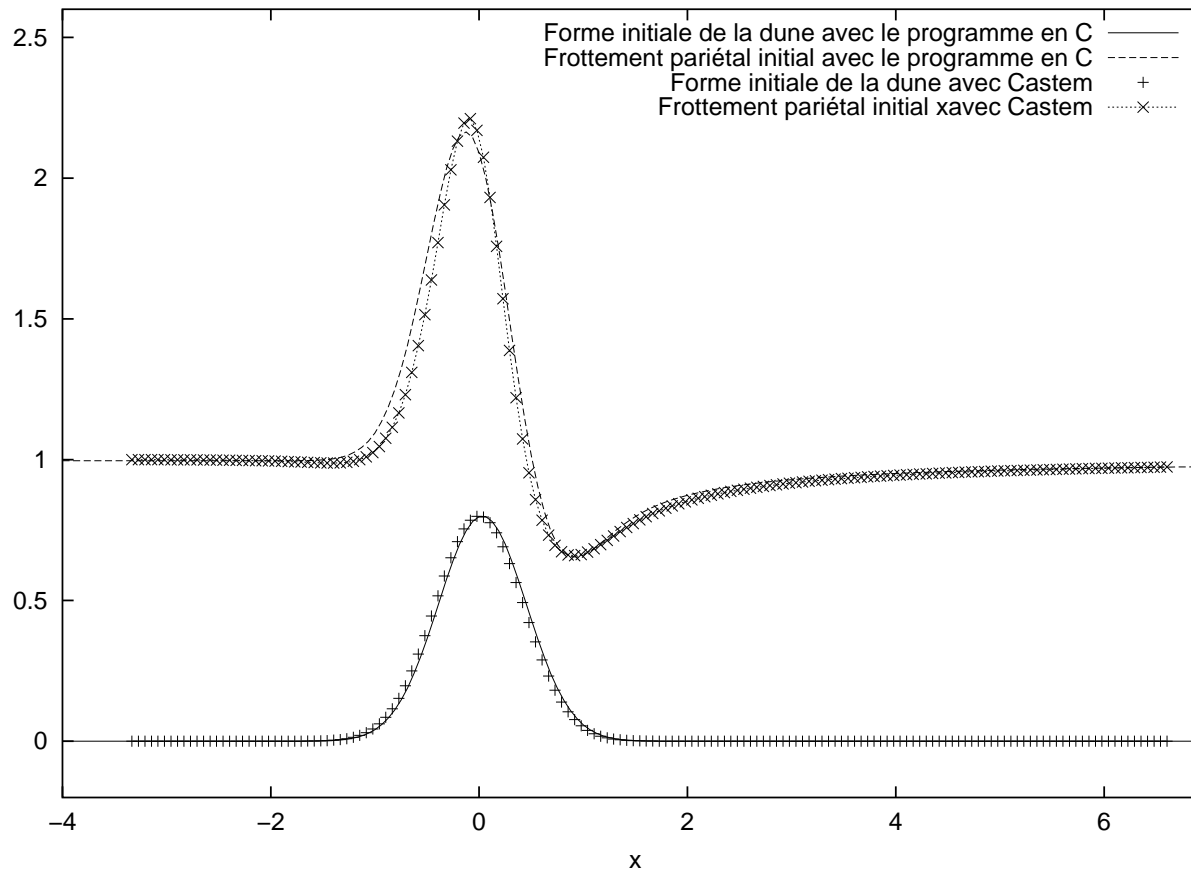
Dunes finales en fonction pour  $\lambda$  variant.

# Ínfluence de $\lambda$



Vitesse en fonction de  $\frac{\lambda}{m^{1/2}}$

# Comparaison avec le code Castem



Frottements au temps initial comparables.

Calculs très longs avec Castem.

# Équations des dunes en trois dimensions

---

- équations de Navier-Stokes en trois dimensions linéarisées



$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + V q_x = V \varpi (\tau_x - \tau_s).$$



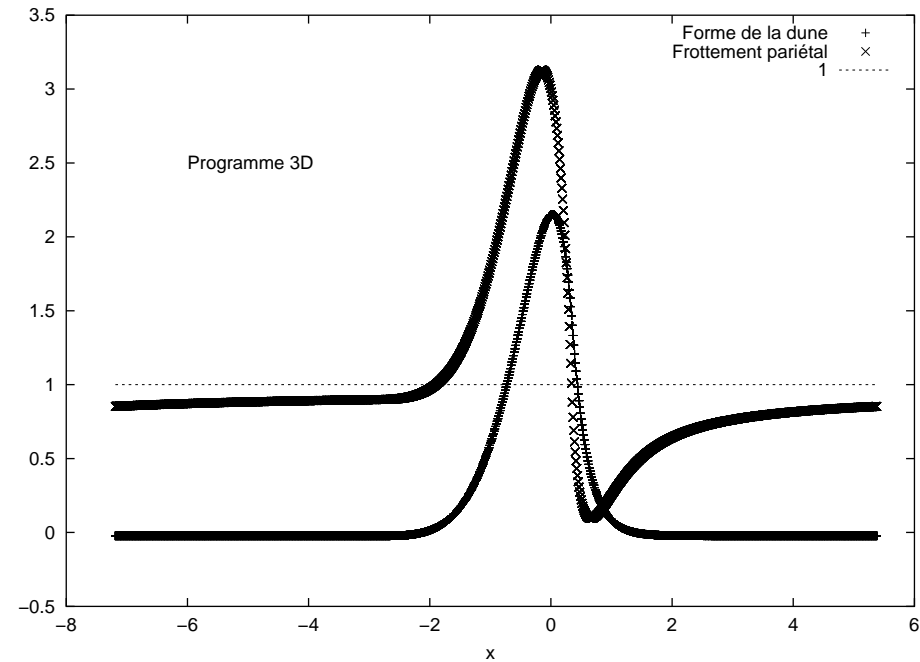
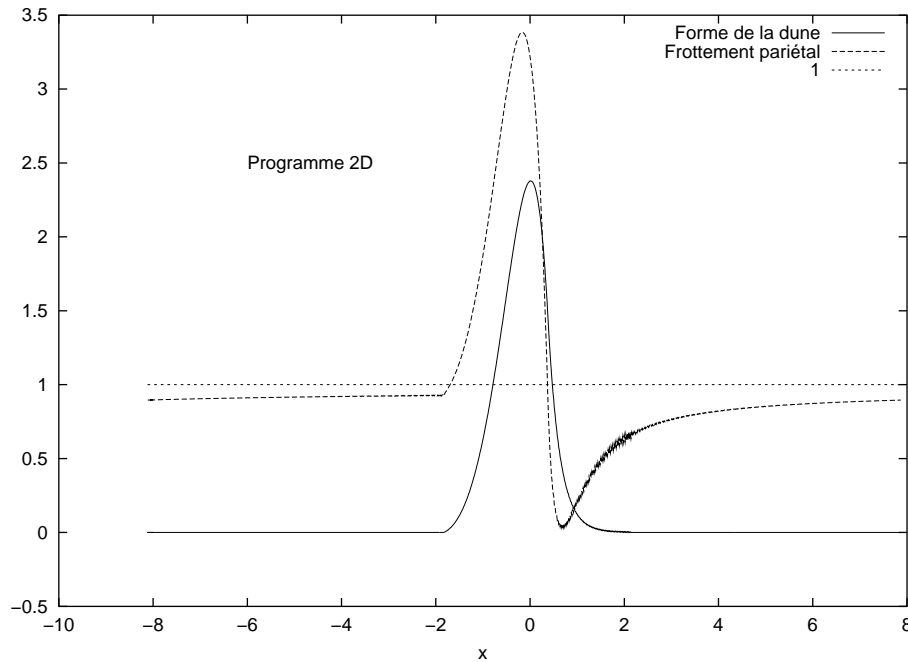
$$\frac{\partial q_y}{\partial x} + V q_y = V \varpi (\tau_y - \tau_s).$$



$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + D \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

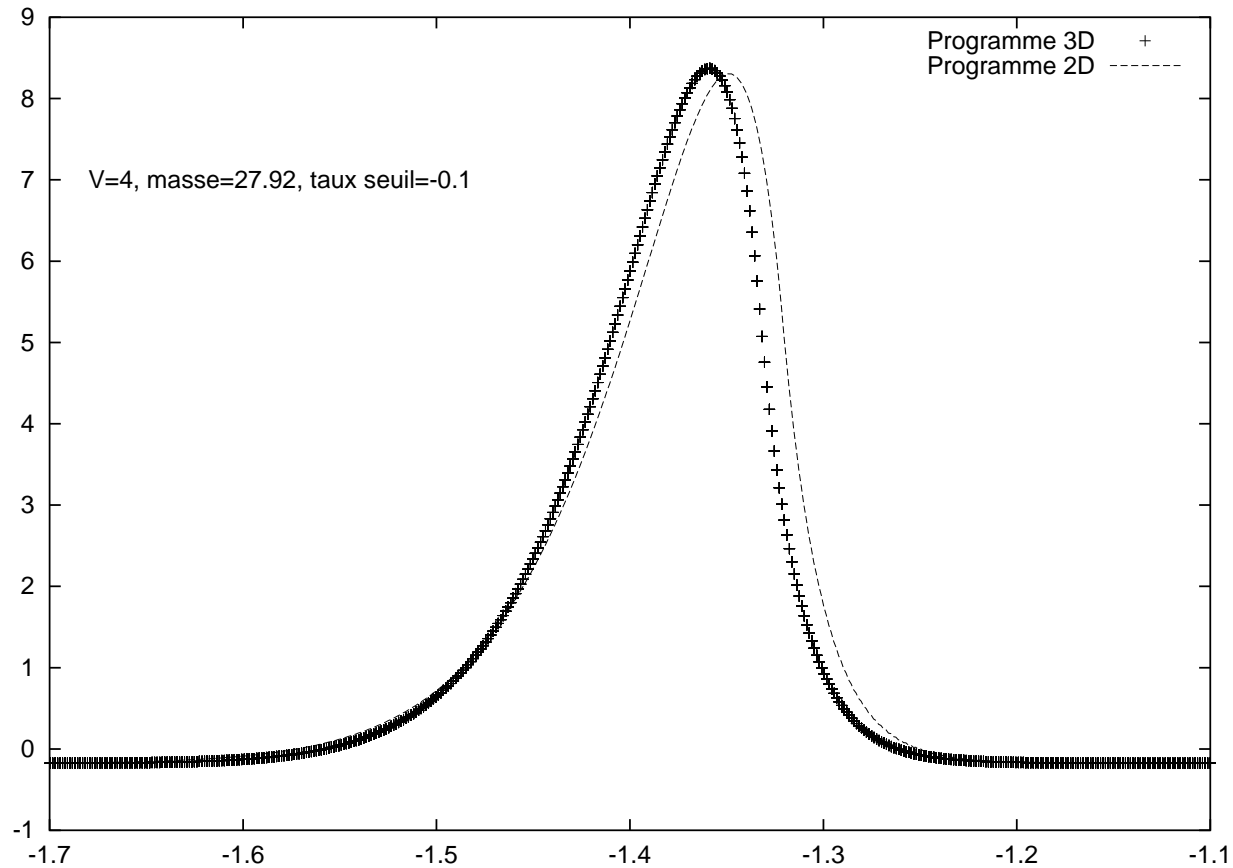
# Comparaison 2D 3D

On restreint le programme 3D à deux dimensions.



Observation du frottement pour un domaine trop petit avec les programmes 2D et 3D

# Comparaison 2D 3D



Les programmes 2D et 3D coïncident dans des conditions similaires.

## Conclusion

---

- Validation de la théorie en deux dimensions
- La linéarisation est importante.
- Nombreuses erreurs numériques
- Dunes en trois dimensions