

## Influence de la couche d'entropie sur l'échelle de la région séparée en aérodynamique hypersonique

Pierre-Yves LAGRÉE

**Résumé** — Le problème de l'interaction visqueuse hypersonique est examiné dans le cadre du schéma de Triple Couche en tenant compte de l'existence de la couche d'entropie. Les échelles habituelles sont alors modifiées et font apparaître dans le cas de la plaque plane l'effet de l'épaisseur d'émoussement du nez.

### Influence of the entropy layer on viscous hypersonic interaction scales

**Abstract** — *Viscous hypersonic interaction has been reexamined within the framework of the Triple Deck Theory, the Upper Deck being considered to lie in the entropy layer. The nose bluntness is accounted for by modifying the usual scales.*

**Abridged English Version** — A revisited “triple deck” theory (Stewartson and Williams [1]) is applied to account for upstream influence in hypersonic régime, including entropy layer effects. We find out a new longitudinal scale of interaction  $x_3 L$  (see list of notations), where  $x_3$  is given by (15) and where  $L$  is the streamwise extent of the steady, plane, laminar boundary layer from the blunted leading edge (with thickness  $d$ ) of the flat plate to the point where upstream influence begins to occur. Our notations are standard;  $\chi_\infty$  is the so-called hypersonic viscous interaction parameter.

In this work, the upper deck has been revisited with a new set-up. This deck lies always above the boundary layer. We choose the thickness of the upper deck to be exactly the same as that of the entropy layer (the case of the upper deck order being greater than the entropy layer order would be in fact a simplification of the problem treated here). This is so whenever the conditions found in the first two sentences of (VI) are fulfilled. The appropriate equations (6) are those used for linear inviscid perturbations on a density stratified flow [the density being given by the function  $R_0(\bar{\psi})$ , where  $\bar{\psi}$  is the stream function].

Otherwise we keep the same framework as in [1], [3] and [5], with a main deck being described by (2), the lower deck being described by (4) with no slip at the wall and using condition (5) at infinity. The coupling between the main and upper decks is done by identifying the derivative of the boundary layer thickness, perturbed by the lower deck, with the perturbed transversal speed at the base of the entropy layer according to (9). The disturbance propagation are governed by (6).

As a result we obtain a new fundamental equation of triple deck, which is written with the scales (11). It consists of solving (4) and (5) with no slip at the wall, and with coupling and propagation as previously stressed [namely (9) and (6)]. The effect of the entropy layer is felt through the gauges  $\omega$  and  $r$  and through the function  $R_0$ . This interacting problem is as universal as Stewartson's one, because it is independent of upstream condition as soon as similarity parameters remain constant. What differ from the previous studies are the need for a density profile given *a priori* in the entropy layer and the more complicated pressure-displacement relation (9).

To illustrate this, the flow over power law bodies is examined and density is calculated with the so-called entropy correction. This leads to the expression of  $R_0$  versus  $\bar{\psi}$  (12).

---

Note présentée par Paul GERMAIN.

0764-4450/90/03111129 \$ 2.00 © Académie des Sciences

No numerical solution has been worked out yet, only a linearised version for power law bodies has been investigated. Similarly as in [1], the dependence on  $\bar{x}$  has been taken to be proportional to  $\exp(k\bar{x})$ . Thus, the problem consists solving an ordinary differential equation (13) (which is in fact Lighthill [2] equation) subject to the boundary conditions (14). Numerical integration shows that  $k$  is in the order of one in the range of interest.

The case of the so-called blast wave analogy leads to the interaction scale (15). This shows that the length of separation region on a flat blunted plate with no incidence decreases as bluntness of the nose increases. It is worth noting that hypersonic strong interaction gives a limitation to these scales, notably  $x_3 = O(1)$  (see Neiland [3]). Experiments of [7] seem to agree qualitatively with the present analysis.

Non-linear effects, cooled wall effects [5], and instability phenomena will be examined in future work.

I. INTRODUCTION. — Le modèle maintenant bien connu sous le nom de « triple couche » permet, en supersonique modéré [ $M_\infty > 1$ , mais  $M_\infty = O(1)$ ], d'appréhender des écoulements faiblement séparés (Stewartson et Williams [1]). En dehors de la couche limite, lorsque l'écoulement est hypersonique ( $M_\infty \gg 1$ ), une couche de fluide parfait, stratifiée en entropie, se développe. Elle résulte du choc intense qui existe au niveau du nez émoussé du corps sur lequel l'écoulement est étudié. Comme nous allons le montrer, son existence modifie radicalement le problème « canonique » du modèle en triple couche. La relation de couplage, que connaissent bien les spécialistes, ne s'explique plus simplement : désormais elle fait intervenir, à la manière de Lightill [2], la propagation de perturbations dans la couche d'entropie agissant comme un guide d'ondes (cf. II, 4°, II, 5°). De même les échelles qui permettent d'écrire ce problème canonique doivent être modifiées. L'influence de ce nouveau mode de couplage sur la séparation en régime hypersonique ne paraît pas avoir été prise en compte dans les travaux antérieurs (Neiland [3], Brown, Stewartson et Williams [4], Brown, Cheng et Lee [5]).

II. SCHÉMA GÉNÉRAL DE LA TRIPLE COUCHE (TRIPLE DECK). — 1° *Écoulement de base.* — L'écoulement de base est classiquement décrit par la structure asymptotique hiérarchisée : fluide parfait, couche limite. Le fluide parfait est traité dans le cadre de la théorie des petites perturbations hypersoniques. La couche limite [dont l'épaisseur a pour ordre de grandeur  $\delta = M_\infty^2 (\omega R_\infty)^{-1/2}$ ] est influencée par l'action du gradient de pression longitudinal (d'ordre de grandeur  $\omega p_\infty/L$ ), provenant du calcul de fluide parfait. (Les ordres de grandeur employés sont regroupés dans le tableau.) Les équations de couche limite sont écrites en utilisant les variables et les notations de Stewartson (pour un fluide dont la viscosité est linéaire en température, de constante de proportionnalité C), l'équation de quantité de mouvement, par exemple, devient :

$$(1) \quad \left( \tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{w} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \tilde{u} = - \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} (\tilde{S} - \tilde{u}) \frac{d}{d\tilde{x}} \ln(\tilde{p}) + C \tilde{p} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}.$$

La solution de ce système se recherche classiquement sous forme de similitude :

$$\tilde{u} = f'(\eta) = U_0(\tilde{z}).$$

2° *Pont principal (Main Deck).* — Les spécialistes semblent s'accorder pour lier la séparation de la couche limite à un couplage avec le fluide parfait qui est recherché, avec Stewartson et Williams [1] et Brown et coll. [4], en brisant la structure asymptotique de

Prandtl. Cette démarche est motivée par le fait que la séparation est un phénomène local, ce qui se traduit par un changement dans l'ordre de grandeur des dérivées longitudinales dans la couche limite; elles deviennent d'ordre  $O(1/x_3)$  au voisinage de la séparation, alors qu'elles sont d'ordre supérieur  $O(1/L)$  en amont de la séparation. Une région, d'épaisseur  $\delta$ , et de longueur  $x_3$ , appelée pont principal se trouve ainsi délimitée. La solution perturbée à l'ordre  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  et  $x_3$  seront déterminés au 6°, inférieur au second ordre de couche limite, fait apparaître une fonction  $A(\bar{x})$ , indéterminée à ce stade de l'analyse, à côté des fonctions  $U_0(\bar{z})$  et  $S_0(\bar{z})$  qui décrivent la couche limite :

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{u} = U_0(\bar{z}) + \varepsilon A(\bar{x}) dU_0(\bar{z})/d\bar{z}, \\ \bar{S} = S_0(\bar{z}) + \varepsilon A(\bar{x}) dS_0(\bar{z})/d\bar{z}. \end{cases}$$

3° *Pont inférieur* (Lower Deck). — Le traitement du pont inférieur est abordé de manière classique; il est nécessaire d'introduire une couche inférieure, d'ordre de grandeur longitudinal  $O(x_3)$  et d'épaisseur  $O(\delta_3) = O(\varepsilon\delta)$ . En effet, cette couche permet de respecter la condition d'adhérence à la paroi, violée par (2), et de déterminer la fonction  $A$ . Or, au voisinage de la paroi (2) indique que  $\bar{u} = \lambda(\bar{z} + \varepsilon A)$  [où  $\lambda = dU_0(0)/d\bar{z}$ ,  $\lambda$  est d'ordre un et sera oublié par la suite dans l'expression des échelles]. Cela suggère de poser  $\bar{z} = \varepsilon \bar{z}$  et  $\bar{u} = \varepsilon \bar{u}$ . Le terme de dérivée convective a alors pour ordre de grandeur  $\varepsilon^2/x_3$ , le terme de gradient de pression et le terme visqueux ont alors pour ordres respectifs  $s_w \pi (\gamma - 1)/x_3$  et  $1/\varepsilon$ . Par moindre dégénérescence, il vient :

$$(3) \quad \varepsilon = (s_w \pi (\gamma - 1))^{1/2} \quad \text{et} \quad x_3 = \varepsilon^3,$$

et les équations régissant les perturbations dans le pont inférieur sont :

$$(4) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \left( \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \bar{u} = - \frac{d}{d\bar{x}} \bar{p} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}.$$

Il faut leur adjoindre la condition d'adhérence à la paroi et le raccord avec le pont principal sous la forme :

$$(5) \quad \lim_{\bar{z} \rightarrow \infty} \{ \bar{u} - (\bar{z} + A(\bar{x})) \} = 0.$$

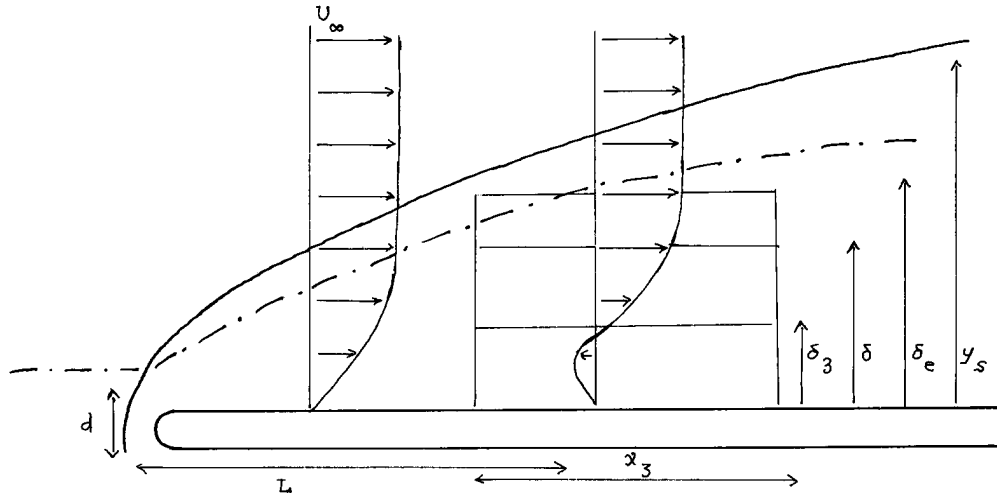
4° *Le pont supérieur* (Upper Deck) ou la couche d'Entropie. — Le présent modèle est très différent du modèle classique en triple couche, la différence portant sur le pont supérieur. Ce dernier est *choisi* de manière à ce que son épaisseur soit celle de la couche d'entropie (exprimée en fonction de courant  $\psi$ , cette couche est d'épaisseur  $dp_\infty/U_\infty$ ) et que sa longueur soit toujours  $O(x_3)$ . Dans le cas classique, l'écoulement de base était un écoulement supersonique uniforme, en revanche, ici, l'écoulement de base est stratifié en densité et en température. Les équations qui régissent le pont supérieur sont alors celles des petites perturbations, en fluide parfait, de cet écoulement de base. Écrites en variables de Von Mises sans dimension (*cf.* tableau de notations), elles deviennent :

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{\xi}} = - \frac{\partial p_1}{\partial \bar{\psi}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{\psi}} = - \frac{1}{\gamma R_0} \frac{\partial p_1}{\partial \bar{\xi}}.$$

L'écoulement de base n'y intervient que par la fonction  $R_0(\bar{\psi})$ , la dépendance en  $\bar{\xi}$  est évacuée puisque le modèle est localisé, au moins asymptotiquement, dans cette direction. Pour écrire (6) il a aussi fallu invoquer le principe de moindre dégénérescence :

$$(7) \quad x_3 = M_\infty d(\omega r)^{-1/2} \quad \text{et} \quad v_1 = \sqrt{\frac{\omega}{r}} \frac{\pi}{M_\infty}.$$

Il nous faut maintenant assembler ces différentes couches.



La plaque émoussée et ses différentes couches.

*The blunted flat plate and its layers.*

5° *Couplage avec le pont supérieur (Upper Deck)*. — La condition de couplage est explicitée, classiquement, par le raccord entre les ponts principal et supérieur. Elle conduit à évaluer  $v_1 v(\xi, 0)$  et  $(x_3^{-1})(d\delta_1/d\bar{x})$ , où

$$(9) \quad \delta_1 = \frac{\gamma-1}{2} \frac{1}{M_\infty} \chi_\infty \omega^{-1/2} \frac{1}{\bar{P}} \int_0^\infty (\bar{S} - \bar{u}^2) d\bar{z}$$

désigne l'épaisseur de déplacement de la couche limite (adimensionnée par  $L$ , avec  $\chi_\infty = M_\infty^3 R_\infty^{-1/2}$  paramètre d'interaction visqueuse), perturbations dans le pont principal incluses. En tenant compte de (2), il vient :

$$(10) \quad v(\xi, 0) = -dA/d\bar{x}, \quad p_1(\xi, 0) = \bar{p}(\bar{x}),$$

ce qui s'interprète comme un déplacement en bloc, fonction de  $\bar{x}$ , des lignes de courant.

6° *Problème canonique dégagé*. — Les relations (3), ainsi que la relation de moindre dégénérescence associée à (8), permettent de préciser  $\pi$  et  $x_3$  qui définissent les ordres de grandeur des échelles de perturbation :

$$(11) \quad \begin{cases} \pi = (\chi_\infty/\omega)^{1/2} r^{1/4}, \\ x_3 = s_w^{3/2} (\gamma-1)^{3/2} (\chi_\infty/\omega)^{3/4} r^{3/8}. \end{cases}$$

Le problème à résoudre, construit par assemblage de (4), de (5), de l'adhérence à la paroi, de (6) et (9), est un problème de couche limite couplé, selon (10), à un modèle linéaire stratifié de fluide parfait. Il peut être qualifié de « canonique » puisque, lorsque les variables sont adimensionnées avec les ordres de grandeurs précédents, aucun des ordres de grandeur amont n'apparaît, ce qui permet la résolution d'une large gamme d'écoulements dans la mesure où les paramètres de similitude sont respectés. Ce problème a un caractère universel dont la définition ne dépend que de  $R_0(\bar{\Psi})$ , et il généralise celui de Stewartson et Williams [1]. Nous allons en voir une résolution simplifiée au IV.

Pour mémoire, en triple couche classique,  $\omega = r = 1$ , et les équations de fluide parfait sont intégrées directement grâce à la relation pression-déviation de Prantl-Meyer.

III. APPLICATION AUX ÉCOULEMENTS HYPÉRONIQUES SUR UNE PLAQUE PLANE ÉMOUSSÉE OU SUR UN CORPS EN PUISSANCE. — Lorsque la fonction qui donne la position transversale de

TABLEAU  
Les principaux ordres de grandeur employés.  
*List of notations.*

Variable dimensionnée	Ordre de grandeur	Variable sans dimension
Longitudinale de base. . . . .	L	$\tilde{x}$ ou $\tilde{\xi}$
Longitudinale locale ( $x_3 \ll 1$ ). . . . .	$x_3 L$	$\bar{x}$ ou $\bar{\xi}$
Fonction de courant. . . . .	$d\rho_\infty U_\infty$	$\bar{\Psi}$
Pression de base. . . . .	$\omega p_\infty$	$p_0(\tilde{\xi})$ (fonction connue)
Perturbation de pression ( $\pi \ll 1$ ). . . . .	$\omega\pi p_\infty$	$p_1(\tilde{\xi}, \bar{\Psi})$
Densité de base ( $r \ll 1$ ). . . . .	$r\rho_\infty$	$R_0(\bar{\Psi})$ (fonction connue)
Vitesse transversale. . . . .	$v_1 U_\infty$	$v(\tilde{\xi}, \bar{\Psi})$
Enthalpie totale. . . . .	$(\gamma - 1) M_\infty^2$	$\mathfrak{S}(\tilde{x}, \tilde{z}), \mathfrak{S}(\tilde{x}, 0) = s_w$

l'onde de choc croît avec  $\tilde{x}$  suivant une loi en puissance  $n$ -ième [ $y/d=(x/d)^n$  ou  $\tilde{y}=M_\infty \tau \tilde{x}^n$ , où  $\tau=(d/L)^{1-n}$  est l'ordre de grandeur de la pente du choc], des solutions semblables des équations d'Euler, dans le cadre des petites perturbations hypersoniques, peuvent être obtenues. Les équations d'Euler se simplifient alors en un système différentiel (Guiraud, Vallée et Zolver [6]). Si  $n=2/3$ , il s'agit de l'écoulement sur une plaque plane d'épaisseur  $d$ , si  $1 \geq n > 2/3$ , il s'agit de l'écoulement sur un corps dont l'épaisseur varie avec la même puissance de  $\tilde{x}$ . Comme d'une part, la densité calculée devient nulle pour  $\psi=0$ , et que d'autre part les lignes de courant proches de la paroi ont traversé le choc dans une région en aval où les approximations posées tombent en défaut, la couche d'entropie doit être introduite. Dans de nombreuses situations la présence de la couche d'entropie ne modifie pas la pression et seule la densité doit être corrigée. C'est la « correction d'entropie ». Elle conduit à l'expression de la densité en fonction de  $\bar{\Psi}$  :

$$(11) \quad \rho/\rho_\infty = O(\tau^{2/\gamma} (1 + \bar{\Psi}^2)^{(1-n)/n})^{1/\gamma} \tilde{x}^{2(n-1)/\gamma},$$

ce qui permet d'identifier  $r=\tau^{2/\gamma}$  et  $R_0(\bar{\Psi})=(1 + \bar{\Psi}^2)^{(1-n)/n})^{1/\gamma}$ .

IV. RÉOLUTION LINÉARISÉE. — Le problème universel évoqué au II, 6° admet une solution banale qui correspond à la persistance de la structure de Prandtl. Il est alors naturel de chercher des solutions qui représentent une petite perturbation. Les équations linéarisées correspondant à (4) et celles déjà linéaires en (6) sont invariantes par translation en  $\bar{x}$ , d'où l'idée de chercher (comme Stewartson [1]) des solutions de la forme  $f(\tilde{\xi}, \bar{\Psi})=F(\bar{\Psi}) \exp(k\tilde{\xi})$ . Cette résolution linéarisée permet d'appréhender la naissance éventuelle de la séparation, et de fournir des conditions aux limites amont pour un traitement numérique complet.

Le problème couplé consiste à trouver  $k$  tel que, dans la couche d'entropie :

$$(12) \quad \frac{d^2 P(\bar{\Psi})}{d\bar{\Psi}^2} - \frac{k^2}{R_0(\bar{\Psi})} P(\bar{\Psi}) = 0,$$

(Remarquons que cette équation n'est qu'un nouvel avatar de Lightill [2].) La résolution dans le pont inférieur fait classiquement apparaître une fonction d'Airy, d'où l'expression du couplage :

$$(13) \quad P(0)=1 \quad \text{et} \quad \frac{dP}{d\bar{\Psi}}(0) = -\left(\frac{\gamma}{-3 \text{Ai}'_0}\right) k^{7/3} \quad \text{et} \quad P(+\infty) \text{ borné.}$$

Le calcul, effectué avec la distribution transversale d'entropie (11), montre que  $k$  reste environ égal à 0,6 lorsque  $n$  varie entre 2/3 et 1.

VI. CONCLUSION. — Pour résumer, les ordres de grandeur à respecter sont tels que  $M_\infty$ ,  $\tau^{-1}$ ,  $M_\infty \tau$ ,  $(M_\infty \delta)^{-1}$  soient très supérieurs à un. De plus pour que la couche d'entropie ne soit pas absorbée par la couche limite il est nécessaire que  $\delta_e = (r^{-1} d) \ll \delta$ , ce qui donne, dans le cas de la plaque plane émoussée sans incidence :

$$(14) \quad M_\infty^2 \left( \frac{d}{L} \right)^{2(2+1/\gamma)/3} \ll \chi_\infty.$$

L'ordre de grandeur de la distance longitudinale interactive  $x_3$  ( $x_3 \ll 1$ ) devient :

$$(15) \quad x_3 = M_\infty^{-3/2} \chi_\infty^{2/4} \left( \frac{d}{L} \right)^{1/2(1-2\gamma/2\gamma)},$$

ce qui montre que l'augmentation de l'émoussement du nez de la plaque diminue la longueur de séparation lorsque l'effet d'explosion forte est important. Si  $(\chi_\infty/\omega) = O(1)$ , l'écoulement est dominé par « l'interaction forte » depuis le bord d'attaque, et  $x_3 = O(1)$ . L'étude précédente tombe alors en défaut, et il faut reprendre Neiland [3]. Ces deux régimes ont été mis expérimentalement en évidence par Holden [7].

Des effets de paroi froide (Brown, Cheng et Lee [5]), et d'instabilité pourront ensuite être étudiés.

Note remise le 6 juillet 1990, acceptée le 20 septembre 1990.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] STEWARTSON et WILLIAMS, *Proc. Roy. Soc. London*, A 312, 1969, p. 181-206.
- [2] LIGHTHILL, *Proc. Roy. Soc. London*, A 217, 1953, p. 478-507.
- [3] NEILAND, *Mekh. Zhid. Gaza*, 4, 1970, p. 40-49.
- [4] BROWN, STEWARTSON et WILLIAMS, *The physic of fluids*, 1975, p. 633-639.
- [5] BROWN, CHENG et LEE, *U.S.C.A.E.*, 148, 1989.
- [6] GUIRAUD, VALLÉE et ZOLVER, *Basic developement in Fluid Dynamics*, AP 1965.
- [7] HOLDEN, *A.I.A.A. J.*, 9, n° 1, 1971, p. 84-93.

*Laboratoire de Modélisation en Mécanique, U.R.A. C.N.R.S. n° 229,  
Université Paris-VI, 4, place Jussieu, Tour n° 66, 75252 Paris Cedex 05.*