MODÉLISATION DE L'ÉCOULEMENT SANGUIN PAR UNE APPROCHE DE TYPE COUCHE LIMITE INSTATIONNAIRE. MISE EN OEUVRE D'UNE MÉTHODE INVERSE POUR TROUVER L'ÉLASTICITÉ DE LA PAROI ET LA VISCOSITÉ DU FLUIDE.

février 97

Lagrée P.-Y. & Rossi M

Laboratoire de Modélisation en Mécanique, URA CNRS 229
Boite 162
Université Paris 6
4, Place Jussieu
75252 Paris

1 Résumé:

Il est évident qu'une connaissance plus approfondie des mécanismes du pouls est nécessaire si l'on désire dégager des méthodes de détermination *in vivo* des pathologies d'une artère. Expérimentalement on observe que la propagation de cette onde s'accompagne d'un accroissement de son amplitude ainsi que d'un raidissement (Pedley 80). Cette interaction fluide/ structure dépend de nombreux facteurs. Dans ce travail, on prend en compte les plus importants d'entre eux: effets dissipatifs (viscoélasticité de la paroi, viscosité du fluide), effet géométrique (conicité de l'artère) et les effets nonlinéaires (loi non-linéaire de paroi, terme convectif de Navier-Stokes). Les approximations que justifient les données physiologiques vont permettre la construction d'un modèle simplifié.

Ce modèle simplifié de type couche mince instationnaire axisymétrique est résolu dans un premier temps par une méthode de différences finies.

Puis, à l'aide d'une méthode intégrale adaptée au cas instationnaire de l'écoulement sanguin, il est possible de réduire encore ce modèle à un modèle monodimensionnel défini par un système de trois équations aux dérivées partielles non-linéaires couplées dépendant du temps t et de la variable axiale x. L'originalité de ce travail est l'introduction d'une équation supplémentaire ainsi que la fermeture proposée (fondée sur les profils de Womersley). Ceci est indispensable si on désire effectuer une comparaison quantitative entre les profils calculés de vitesses ou de pression et des mesures expérimentales et remonter ainsi à certaines caractéristiques de la paroi artérielle ou au cisaillement pariétal. Ce système régit l'évolution de trois grandeurs: le rayon interne de l'artère R(x,t), la vitesse au centre $U_0(x,t)$ et une quantité q(x,t) exprimant l'effet de la couche limite instationnaire sur l'écoulement. On effectue ensuite une simulation numérique de ce système simplifié.
On montre que les deux approches (résolution intégrale et résolution des équations de couche mince instationnaire par intégration directe) se comparent très favorablement.

Enfin on présente quelques éléments visant à mettre en oeuvre une méthode inverse permettant de retrouver les coefficients physiologiques à partir de mesures expérimentales. Ici il ne s'agira que de la première ébauche de cette approche: nous nous contenterons de retrouver les deux paramètres optimaux d'élasticité et de viscosité de la solution de Womersley.

Le rapport entre la jauge de vitesse U_0 de transport et $L/T=(k\rho^{-1} R_0)^{1/2}$ la vitesse liée aux ondes (L est bien la jauge de λ la longueur d'onde, noter que dans Lagrée & Rossi 96 on a préféré adimensionner avec λ) est:

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta R}{R_0} = \frac{U_0}{(k\rho^{-1} R_0)^{1/2}}.$$

La variation de rayon est de même ordre de grandeur que le rapport de la vitesse de transport et de la célérité de l'onde. Avec nos premières approximations, la vitesse u^* (avec dimension) est constante en η (profil "bouchon"), et sa jauge est disons U_0, la vitesse transverse vaut $v^*=(\varepsilon_2 R_0/T)\eta\partial h/\partial t$. Si on examine les équations linéarisées non visqueuses obtenues:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = h$$

on trouve que la vitesse de phase vaut $1/2^{1/2}$. La vitesse d'onde dimensionnée est bien

$$c_0 = (\frac{k}{2\rho} R_0)^{1/2}$$

elle est connue sous le nom de célérité de Moens- Korteweg). Les résultats expérimentaux permettent de voir que le paramètre:

$$\varepsilon_2 = \frac{U_0}{c_0\sqrt{2}} = \frac{\delta R}{R_0}$$

est généralement au plus de l'ordre de 0,1. Dans les cas de type Bellardini & Cavalcanti 92 ou Pedley 80 p35 (Chien) on trouve une excursion maximale de .05.

remarque.
C'est ici qu'intervient le fait que l'on choisit pour jauge fondamentale T (naturel car c'est la mesure de la période de la condition d'entrée) pour le temps, et $(k R_0 \varepsilon_2)$ pour la pression (ce qui est naturel puisque c'est bien R_0 qui est donné, et k par les propriétés de la paroi). Avec ce choix il est "normal" d'obtenir la vitesse de phase en $1/2^{1/2}$. Cependant, si on veut utiliser pour jauge fondamentale T et la vitesse c_0, la longueur est donc $\lambda=Tc_0$. La pression se mesure alors par:

$$(press)/\lambda \sim \rho U_0/T \Rightarrow (press) \sim \rho U_0 c_0,$$

Il faut redéfinir $\varepsilon_2=\frac{U_0}{c_0}$ et la loi de paroi devient:

$$p\ (press) = (k\, \varepsilon_2 R_0)\ h \quad \Rightarrow \quad p = ((k R_0)/(\rho c_0^2))\ h\ ;$$

mais puisque $c_0=(\frac{k}{2} R_0)^{1/2}$ les équations non visqueuses sont différentes:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = 2h$$

Et on a alors bien une longueur d'onde égale à 1. (Dans le code on a préféré garder la forme adimensionnée des équations qui ressemble le plus à la forme dimensionnée, *i.e.* p = h ressemble à $p^*=kh^*$ plutôt que d'introduire le facteur 2, mais cela ne change rien, on peut modifier le code à volonté).

2-2.2 non linéarité du fluide

Les termes $u\partial/\partial x$ sont d'ordre de grandeur relatifs par rapport à $\partial/\partial t$:

$$(U_0/L)/(1/T) \textit{ i.e. } \frac{U_0}{(k\rho^{-1} R_0)^{1/2}}.$$

On retrouve ε_2. L'ordre de grandeur des termes non- linéaires est le même que celui de la variation de rayon:

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta R}{R_0}$$

2-2.3 rapport des longueurs
L'onde de pouls satisfait en première approximation une équation de propagation caractérisée par une vitesse de propagation c_0, connue sous le nom de célérité de Moens- Korteweg, de l'ordre de 3 à 10m/s. Vu la pulsation cardiaque ---$\omega=2\pi T^{-1}$ avec T~.8 s---, la longueur d'onde λ de cette onde est donc de l'ordre du mètre. Le rapport entre le rayon interne de l'artère non perturbé R_0 et cette longueur définit un nouveau petit paramètre:

$$\varepsilon_1 = \frac{R_0}{\lambda}.$$

Expérimentalement ε_1 ne dépasse pas 10^{-2}.

2-2.4 viscosité
Le rapport entre les termes visqueux $(\nu\partial^2/\partial r^2)$ et et le terme de dérivée temporelle $(\partial/\partial t)$ qui vaut:

$$2\pi \frac{\nu}{(2\pi/T)\ R^2}$$

permet d'introduire le nombre de Womersley (Womersley 1955):

$$\alpha = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}},$$

c'est le rapport entre le rayon interne de l'artère et l'épaisseur de la couche de Stokes. Il décrit l'importance des effets visqueux dans le fluide. Si α est grand, le profil des vitesses est assez plat. Plus α est petit, plus on se rapproche d'un écoulement instationnaire de Hagen-Poiseuille. Dans l'artère fémorale, on trouve par exemple des valeurs de l'ordre de 3,5.

Le nombre de Reynolds n'est pas le paramètre pertinent dans cette étude, on peut cependant l'estimer. Construit sur le diamètre, il serait classiquement:
$R_e=U_0R_0/\nu$, donc $R_e=U_0R_0^{-1}\omega^{-1}\alpha^2$. or, $\varepsilon_2=\frac{U_0}{c_0\sqrt{2}}$, $\varepsilon_1=\frac{R_0}{\lambda}$ et $\lambda=Tc_0=2\pi/\omega\ c_0$ donc:

$$R_e = \frac{\sqrt{2}\ \varepsilon_2\ \alpha^2}{2\pi\ \varepsilon_1}.$$

Pour $\alpha=3{,}5$ $\varepsilon_2=0{,}2$ et $\varepsilon_1=10^{-2}$, cela donne un Reynolds d'environ 55. Le nombre de Reynolds construit sur λ serait quant à lui 10^2 fois plus élevé.

2-3 équations finales de type couche mince
2-3.1 transformation du domaine
Ces conditions aux limites étant imposées sur une surface en mouvement dont la dynamique n'est pas connue à l'avance, on effectue donc un changement de variable en introduisant une variable réduite $\eta=r/R(x,t)$, on garde $\xi=x$ et le temps $\tau=t$. Les transformations de variables (t,x,r) en (τ,ξ,η) sont pour mémoire (ici tout est écrit avec des dimensions):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\eta}{R}\frac{\partial R}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta};\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{R}\frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta};\ \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Ceci permet d'écrire des conditions sur une surface fixe en $\eta=1$ mais introduit en contrepartie des termes supplémentaires dans les équations. Par abus de notation on oubliera τ et ξ que l'on notera t et x par la suite.

2-3.2 système de type couche mince

En conclusion, on ne connaît que le rayon de l'artère R_0, $\varepsilon_2 R_0$ l'ordre de grandeur de sa perturbation, la période du phénomène T, et k/ρ la raideur réduite de la paroi. On construit à partir de ces jauges fondamentales $L=T(k\rho^{-1} R_0)^{1/2}=R_0\sqrt{2}/\varepsilon_1$ la longueur caractéristique longitudinale, $U_0=\varepsilon_2(k\rho^{-1} R_0)^{1/2}$ la vitesse longitudinale.

Les variables avec des étoiles (*) sont avec dimensions, les quantités précédentes permettent de construire les variables sans dimensions suivantes:

$$u^*=uU_0,\ v^*=\varepsilon_2 R_0/Tv,\ x^*=xL,\ R^*=RR_0,\ (R^*-R_0)=\varepsilon_2 R_0 h,\ t^*=tT,\ p^*=k\, R_0\, \varepsilon_2 p+cste^*.$$

Si on néglige tous les termes plus petits que ε_1^2 dans les équations de Navier Stokes mises sous forme adimensionnelle, on obtient une formulation de type couche limite (ou couche mince):

$$R=1+\varepsilon_2 h$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon_2\left(\frac{\eta}{R}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\varepsilon_2\left(\frac{v}{R}\frac{\partial u}{\partial \eta}+u(\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon_2\frac{\eta}{R}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta})\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{2\pi}{\alpha^2\eta R^2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta})+O(\frac{\varepsilon_1^2}{\alpha^2})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta}=0+O(\varepsilon_1^2);\qquad \frac{\partial v}{R\partial \eta}+\frac{v}{R\eta}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\eta}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Nous avons présenté et discuté nos hypothèses dans les paragraphes précédents. Pour résumer nous dirons que cette formulation tient compte du caractère propagatif de l'onde de pouls, de son caractère non linéaire et de la dissipation visqueuse. Nous ne prétendons pas être originaux ces équations sont bien connues depuis longtemps et sont notamment dans Ling & Atabek 72, notre résolution s'affranchira en revanche de leurs simplifications.

3- Équations intégrales dans le fluide

3-1 pourquoi

La résolution complète (en un laps de temps court) de ce système est encore trop complexe de par de la variation radiale du profil des vitesses liée aux effets visqueux.

Pour le simplifier, nous adaptons les méthodes intégrales de Von Kármán pour le traitement des couches limites stationnaires en aérodynamique (Le Balleur (1982)) au cas instationnaire défini plus haut. À cette fin, on intègre les équations par rapport à la variable radiale η entre l'axe du tuyau et la paroi, c'est-à-dire pour η compris entre 0 et 1. La forme intégrée des deux premières équation du système permet d'établir respectivement les bilans globaux de débit-masse et de quantité de mouvement. Si des informations relatives à la dynamique sont évidemment perdues par cette intégration, on peut néanmoins espérer cerner les comportements essentiels qui régissent l'évolution du pouls à l'aide de cette approche.

3-2 conservation de la masse

3-2.1 équation non transformée

Nous détaillons pour mémoire l'établissement de l'équation de conservation de la masse. L'équation de départ (ici non "mappée"):

$$\frac{\partial}{\partial x}u + r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}vr = 0.$$

est intégrée de r=0 à R (le rayon) après avoir soustrait la vitesse au centre U_0 et multiplié par r:

$$\int_0^R\frac{\partial}{\partial x}(U_0-u)\, r dr - \int_0^R\frac{\partial}{\partial r}rv\, dr= \frac{\partial}{\partial x}(U_0)\,(R^2 - O)/2.$$

À partir de maintenant U_0 représente la valeur de la vitesse adimensionnée au centre du tuyau. Or par dérivation d'intégrale:

$$\int_0^R\frac{\partial}{\partial x}(F)\, dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^R(F)\, dy -(\frac{\partial}{\partial x}R)\, F.$$

d'où il reste:

$$2\, R\frac{\partial}{\partial t}R + \frac{\partial}{\partial x}((R^2U_0 - 2\int_0^R(U_0 - u)\, r\, dr)=0.$$

La fonction U_0 est la vitesse au centre et q traduit la perte de débit-masse due aux effets visqueux (analogue de l'épaisseur de déplacement δ_1 bien connue en aérodynamique):

$$q = R^2\,(U_0 - R^{-2}\int_0^R 2\, u\, r\, dr)\ \text{ou}\ q=R^2(U_0-2\int_0^1 u\eta d\eta);\quad q_2=R^2(U_0^2-2\int_0^1 u^2\eta d\eta)$$

elle se réécrit:

$$2\, R\frac{\partial}{\partial t}R + \frac{\partial}{\partial x}(R^2U_0 - q) = 0.$$

3-2.2 équation "mappée"

Pour mémoire, la démarche est la même, on intègre de $\eta=0$ à 1 l'équation de l'incompressibilité du fluide:

$$\frac{\partial(\eta v)}{R\eta\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\eta}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

en faisant apparaître par intégrations par parties:

$$R\frac{\partial(\eta v)}{\partial\eta}=-\frac{\partial}{\partial x}(R^2\eta u)+\frac{1}{2}\frac{\partial R^2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}(\eta^2 u)$$

l'astuce de la transformation des coordonnées permet d'éviter la dérivation d'intégrales puisque la borne $\eta=1$ est fixe.

3-2.3 forme finale

En posant $R=1+\varepsilon_2 h$, l'équation peut aussi se lire:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\varepsilon_2 U_0\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1+\varepsilon_2 h}{2}\frac{\partial U_0}{\partial x}-\frac{1/2}{1+\varepsilon_2 h}\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

(La conicité s'introduit alors comme un terme source au second membre égal à $-U_0\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial R_0^2}{\partial x}\frac{(1+\varepsilon h)}{2}$. Si on veut en tenir compte on supposera que $\beta=-\frac{1}{R_0}\frac{\partial R_0}{\partial x}$ est au moins aussi grand que ε_2).

3-3 conservation de la quantité de mouvement.

Les mêmes manipulations sont effectuées pour l'équation de quantité de mouvement. L'équation globale s'écrit alors:

$$q = R^2(U_0 - 2\int_0^1 u\eta d\eta); \quad q_2 = R^2(U_0^2 - 2\int_0^1 u^2\eta d\eta)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \varepsilon_2\left(\frac{\partial}{\partial x}q_2 - U_0\frac{\partial}{\partial x}q\right) = 2\pi\left(-\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial \eta}u\Big|_{\eta=1} + \frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}u\Big|_{\eta=0}\right)$$

où q_2 est un terme non-linéaire associé au terme de convection dans Navier-Stokes. On extrait aussi l'expression de la vitesse au centre du tuyau notée U_0:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \varepsilon_2 U_0\frac{\partial}{\partial x}U_0 = -\frac{dp}{\rho dx} + 2\pi\left(\frac{2}{\alpha^2 R^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}u\Big|_{\eta=0}\right).$$

Ce sont ces trois dernières équations qui représentent la modélisation du fluide. Mais il faut encore fermer ce système. Une des originalités de notre approche est d'avoir découpé "en deux" l'équation intégrale portant sur l'équation de quantité de mouvement. En effet les précédents auteurs ne gardaient qu'une équation portant sur le flux (Horsten & al 89, Zagzoule *et al* 91 Zagzoule *et al* 86). Nous, nous en avons une sur la vitesse au centre et l'autre sur le défaut de flux.

3-4 rappel de la solution de Womersley

Avant de continuer rappelons l'expression de la solution de Womersley. On veut résoudre (avec les dimensions) le problème linéarisé:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{\rho dx} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

dans le cas où le régime est sinusoïdal et forcé en exp(iω(t-x/c)):

$$i\omega u = \left(\frac{i\omega}{c}\right)\frac{p}{\rho} + \frac{\omega}{\alpha^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial (r/R)^2} + \frac{1}{(r/R)}\frac{\partial u}{\partial (r/R)}\right)$$

on obtient la solution analytique de Womersley exprimée avec des fonctions de Bessel et écrite en formulation complexe (Womersley (1955)) sous la forme:

$$u = \frac{p}{\rho c}\left(1 - \frac{J_0(i^{3/2}\alpha r/R)}{J_0(i^{3/2}\alpha)}\right)e^{i\omega(t-x/c)}$$

$$v = i\omega\frac{p}{\rho c^2}\left(\frac{r/R}{2} - \frac{(-1)^{1/4}J_1((-1)^{3/4}\alpha r/R)}{\alpha J_0((-1)^{3/4}\alpha)}\right)e^{i\omega(t-x/c)}$$

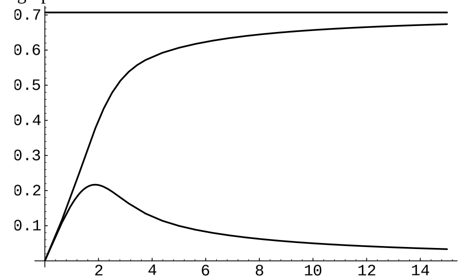
On écrit ensuite que la vitesse en r=R est la variation du rayon par rapport au temps, et compte tenu de la loi de paroi:

$$p=kh \text{ et si on pose } F(a) = 2\frac{J_1(i^{3/2}\alpha)}{\alpha i^{3/2}J_0(i^{3/2}\alpha)}$$

alors la célérité complexe s'écrit:

$$c = \left(\frac{k}{2\rho}R\,(1-F(a))\right)^{1/2}$$

Son tracé (partie réelle et partie imaginaire) ainsi que la valeur limite $1/\sqrt{2}$ en fonction de α sont représentés sur le graphe suivant:

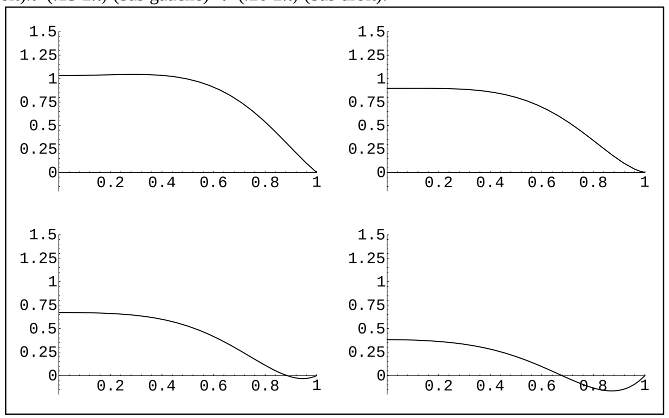


partie réelle et partie imaginaire de la célérité c en fonction de α

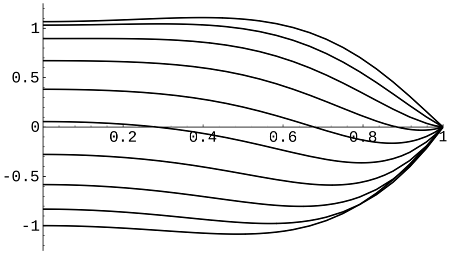
par exemple $c(5) = \left(\frac{k}{\rho}\right)^{1/2}(0.606538 + 0.0995807\, i)$

C'est cette solution valable dans le cadre linéaire qui va nous servir pour construire les fermetures intégrales et *tutti quanti.*

On trace quelques profils pour α=6 au temps t=(.05 2π) (haut gauche) t=(.10 2π) (haut droit).t=(.15 2π) (bas gauche) τ=(.20 2π) (bas droit).



Ou, si on préfère, sur une demi période on a reporté toutes les vitesses:



3-5 fermeture du système intégral.

Comme en aérodynamique, le système d'équations globales:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\varepsilon_2 U_0\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1+\varepsilon_2 h}{2}\frac{\partial U_0}{\partial x}-\frac{1/2}{1+\varepsilon_2 h}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\varepsilon_2(\frac{\partial}{\partial x}q_2-U_0\frac{\partial}{\partial x}q)=2\pi\left(-\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial \eta}u\Big|_{\eta=1}+\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}u\Big|_{\eta=0}\right),$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial t}+\varepsilon_2 U_0\frac{\partial}{\partial x}U_0=-\frac{dp}{\rho dx}+2\pi\left(\frac{2}{\alpha^2R^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}u\Big|_{\eta=0}\right).$$

n'est pas un système fermé. Pour résoudre cette difficulté, une méthode originale, due à Pohlhausen (Schlichting (1987)) consiste à se donner un champ des vitesses approximatif. Ce dernier respecte les conditions aux limites d'adhérence et approche au mieux les profils expérimentaux.
Nous gardons ici l'esprit de la méthode mais nous l'adaptons au cas instationnaire. Dans la recherche d'un profil pertinent, nous sommes guidés par l'étude du problème linéarisé pour lequel nous disposons de la solution analytique de Womersley écrite en formulation complexe (Womersley (1955)) sous la forme *ad hoc*:

$$U_{Womersley}=(F(x,t)+iG(x,t))(j_r(\alpha\eta)+ij_i(\alpha\eta))$$

où on a séparé la dépendance en x et t de la dépendance dans le rayon réduit η=r/R.

$$(F(x,t)+iG(x,t))=\frac{kp}{\omega}(1-\frac{1}{J_0(i^{3/2}\alpha)})e^{i(\omega t-kx)}$$

$$(j_r(\alpha\eta)+ij_i(\alpha\eta))=\frac{(1-\frac{J_0(i^{3/2}\alpha\eta)}{J_0(i^{3/2}\alpha)})}{(1-\frac{1}{J_0(i^{3/2}\alpha)})},$$

cette dernière fonction est ainsi posée de manière à être égale à 1 au centre.

Dans la suite, on approxime le champ des vitesses en conservant la même dépendance en variable radiale η. Ce qui, d'une certaine manière, suppose que c'est le mode fondamental qui impose la structure radiale de l'écoulement. Belardinelli & Cavalcanti 1992 proposent une décomposition sur des profils de vitesse qui ne sont pas physiques sauf dans le cas Poiseuille. Zagzoule & al 86 utilisent des profils fondés principalement sur Poiseuille.

On pose donc ([z]* est le complexe conjugué de z):

$$u=1/2\,(\,[(F+iG)\,(j_r+i\,j_i)]+[(F+iG)\,(j_r+i\,j_i)]^*)=(F\,j_r-G\,j_i).$$

où F(x,t) et G(x,t) sont deux fonctions inconnues décrivant l'évolution spatio-temporelle du pouls. On vérifie que la fonction F(x,t) correspond à la vitesse aucentre de l'artère $U_0(x,t)$ (qui joue le rôle de la vitesse extérieure en aérodynamique) et que la fonction G(x,t) s'exprime en fonction du défaut de flux q et de la vitesse au centre après intégration:

$$G(x,t)=\frac{q/R^2-U_0+U_0 2\int_0^1 j_r\eta d\eta}{2\int_0^1 j_i\eta d\eta}$$

À l'aide du logiciel Mathematica™ on calcule la fonction q_2 le cisaillement pariétal τ et le cisaillement au centre τ_0 en fonction de F et G et des intégrales et des dérivées des j_i et des j_r. Puis en fonction de la vitesse au centre U_0 de l'artère et de la fonction q on trouve des expressions de la forme suivante:

$$q_2=\gamma_{qq}\frac{q^2}{R^2}+\gamma_{qu}qU_0+\gamma_{uu}R^2U_0^2$$

$$(-\frac{\partial}{\partial\eta}u\Big|_{\eta=1}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}u\Big|_{\eta=0})=\tau=\tau_q\frac{q}{R^2}+\tau_u U_0\qquad \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}u\Big|_{\eta=0}=\tau_0=\tau_{0q}\frac{q}{R^2}+\tau_{0u}U_0.$$

3-6 Calcul des coefficients de fermeture du système intégral.

3-6.1 obtention

Les coefficients ((γ_{qq} , γ_{qu} , γ_{uu}), (τ_q, τ_u) (τ_{0q}, τ_{0u})) sont des fonctions de α qui s'expriment par des combinaisons d'intégrales et de dérivées des fonctions j_i et j_r..

on obtient des relations assez lourdes du type:

$$\gamma_{uu}=1-\int j_i^2/(\int j_i)^2-(2\int j_r j_i)/\int j_i-\int j_r^2+(2\int j_i^2\int j_r)/(\int j_i)^2+(2\int j_i j_r\int j_r)/\int j_i-(\int j_i^2(\int j_r)^2)/(\int j_i)$$

$$\tau_{0u}=\partial^2_\eta j_r\Big|_{\eta=0}+\partial^2_\eta j_i\Big|_{\eta=0}/\int j_i-(\partial^2_\eta j_i\Big|_{\eta=0}\int j_r)/\int j_i$$

etc...

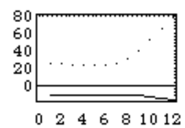
On trouve, respectivement, pour α petit (écoulement très visqueux: profil de Poiseuille dans chaque tranche) et pour α grand (écoulement de fluide parfait au centre à la vitesse U_0 une couche limite d'épaisseur 1/α près de la paroi) les valeurs de ((γ_{qq} , γ_{qu} , γ_{uu}), (τ_q, τ_u) (τ_{0q}, τ_{0u})) sont:

$$((-6/5,11/5,-2/15),(24,-12),(-12,4)),\quad resp\quad ((\frac{-\alpha}{4\sqrt{2}},2,\frac{-\sqrt{2}}{2\alpha}),(\frac{\alpha^2}{2},-\alpha\sqrt{2}),(0,0)).$$

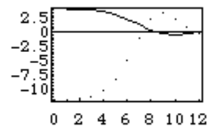
Ce comportement asymptotique est celui que l'on retrouve effectivement si on fait le calcul analytique à la main.

3-6.2 tracé

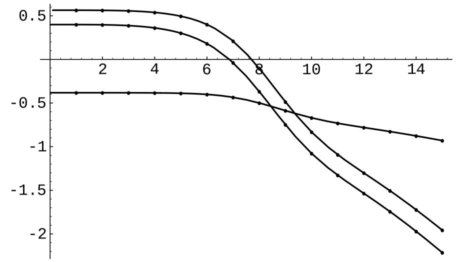
Tacé de $\tau_q(\alpha)$ (points) et $\tau_u(\alpha)$ (ligne)



Tacé de $\tau_{0q}(\alpha)$ (points) et $\tau_{0u}(\alpha)$ (ligne).



tracé des gamma indice qq,uu... de haut en bas (en partant de la gauche) on a: $\gamma_{qu}, \gamma_{uu}, \gamma_{qq}$



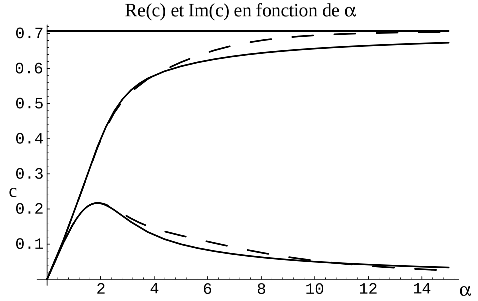
Ces valeurs sont tabulées pour les valeurs entières de α dans le code et interpolées pour les autres valeurs.

3-6.3 remarques

-> Pour mémoire, il est remarquable de constater que ces coefficients varient peu pour $\alpha < 5$, toute la dépendance en α est dans le coefficient $2\pi/\alpha^2$ en facteur des termes visqueux. Cette faible variation justifie *a posteriori* que les approximations avec une seule équation pour la quantité de mouvement et une fermeture de type Poiseuille, qui sont très souvent utilisées, soient aussi efficaces.

Sur la courbe ci dessous on trace la partie réelle et la partie imaginaire de c issue de la solution de Womersley ($c = (1-F(a))^{1/2}$ en traits pleins. On trace aussi en traits pointillés la solution c de l'équation de dispersion, obtenue pour notre système intégral et calculée en supposant les coefficients de frottement τ constants et égaux à leur valeur en 0.

Re(c) et Im(c) en fonction de α



On note que l'accord est bon jusque vers $\alpha=4$.

->Cela permet de comprendre la grande robustesse que l'on peu observer sur nos résolutions: en effet si on modifie l'entrée en mettant $\sin(2\pi\varpi t)$ pour α donné (au lieu de $\sin(2\pi t)$) avec ϖ différent de 1, on retrouve quasiment les mêmes résultats numériques que pour une entrée avec $\sin(2\pi t)$) et un nombre de Womersley égal à $\alpha\sqrt{\varpi}$. Pour le comprendre, prenons par exemple:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \varepsilon_2 U_0 \frac{\partial}{\partial x} U_0 = -\frac{dp}{\rho dx} + 2\pi\left(\frac{2}{\alpha^2 R^2}\right)\left(\tau_{0q}(\alpha^2)\frac{q}{R^2} + \tau_{0u}(\alpha^2) U_0\right),$$

cette équation est invariante par la transformation $t \to t/\varpi$, $x \to x/\varpi$, $1/\alpha^2 \to 1/(\alpha\sqrt{\varpi})^2$ si effectivement τ_{0u} et τ_{0q} ne dépendent pas de α...

-> La méthode "standard" aurai été de poser:

$$Q = \int_0^R 2\,u\,r\,dr, \quad Q_2 = 2\int_0^R r u^2 dr \quad \textit{ie} \quad Q = U_0 R^2 - q$$

$$2R\frac{\partial}{\partial t}R + \frac{\partial}{\partial x}(Q) = 0, \text{ et } \frac{\partial}{\partial t}Q + \frac{\partial}{\partial x}Q_2 + = -(\frac{\partial}{\partial x}p)R^2 + \frac{1}{R}(\nu\, 2R(\frac{\partial}{\partial r}u)_{r=R}),$$

et de "fermer" avec Poiseuille en reliant $(\frac{\partial}{\partial r}u)_{r=R}$ et Q puis Q_2 et Q. *etc*.

4- Description du Modèle de la paroi.

Son comportement a déjà été anticipé dans les paragraphes précédents où le caractère linéaire a été supposé pour évaluer les ordres de grandeur et trouver la solution de Womersley. Nous revenons sur cette hypothèse maintenant.

À l'inverse de l'hydrodynamique où les lois de comportement sont bien définies, la dynamique de la paroi artérielle, constituée de plusieurs couches, est particulièrement délicate à modéliser, cette étude n'est pas le but de notre travail. Trois caractéristiques semblent toutefois prépondérantes:

a) Les propriétés géométriques et dynamiques des vaisseaux varient en fonction de la distance, c'est la conicité;

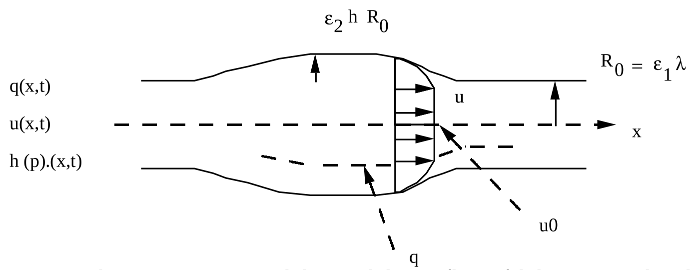
b) les artères sont mécaniquement liées aux tissus environnants ce qui semble empêcher fortement les mouvements longitudinaux de la paroi;

c) Les propriétés élastiques du vaisseau dépendent des propriétés mécaniques individuelles de ses composants (collagène, élastine, fibres musculaires). Globalement il faut prendre en compte deux effets: l'amortissement structurel et le comportement de type matériau élastique non-linéaire de la paroi artèrielle.

Par ailleurs, on peut, dans l'approximation de grandes ondes que l'on adopte ici, négliger le terme de tension longitudinale à laquelle sont soumises les artères *in-vivo*. Pour des raisons analogues l'inertie de la paroi peut être omise sans grandes erreurs (sa prise en compte permet cependant de dégager des solutions sous forme de solitons Paquerot & Remoissenet 94 et Yomosa 87). Une loi phénoménologique qui contient ces divers ingrédients est la suivante (écrite sous forme adimensionnelle):

$$p = kh(1 + \varepsilon_3 h) + \varepsilon_4 \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Le code numérique est conçu de manière à pouvoir modifier facilement cette loi.



On citera Kuiken 84 qui tient compte de l'inertie de la viscoélasticité de la tension axiale et de l'orthotropie de la paroi (de même Ma & al. 92 avec en plus le frottement pariétal). Horsten & al. 89 qui tiennent compte de la viscoélasticité.

5- Résolution numérique du problème de propagation.

5-1 Résolution numérique dans le cas de la méthode intégrale:

En résumé, nous résolvons:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\varepsilon_2 U_0\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1+\varepsilon_2 h}{2}\frac{\partial U_0}{\partial x}-\frac{1/2}{1+\varepsilon_2 h}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial U_0}{\partial t}+\varepsilon_2 U_0\frac{\partial}{\partial x}U_0=-\frac{dp}{\rho dx}+\frac{2}{\alpha^2 R^2}(\tau_{0q}\frac{q}{R^2}+\tau_{0u}U_0)2\pi,$$
$$\frac{\partial q}{\partial t}+\varepsilon_2(\frac{\partial}{\partial x}q_2-U_0\frac{\partial}{\partial x}q)=-\frac{2}{\alpha^2}(\tau_q\frac{q}{R^2}+\tau_u U_0)2\pi,$$
$$p=kh(1+\varepsilon_3 h)+\varepsilon_4\frac{\partial h}{\partial t}.$$

avec $q_2 = \gamma_{uu} U_0^2R^2 + \gamma_{qu} U_0 q + \gamma_{qq} q^2/R^2$

On doit donc résoudre un problème de type:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\varphi\frac{\partial F}{\partial x}+\sigma$$

discrétisé (au temps $n\Delta t$ au point d'espace $i\Delta x$) par un schéma de type "saute mouton" avec terme source au temps (n-1) du second ordre en Δt et Δx.

$$f_i^{n+1}=f_i^{n-1}+\Delta t(\varphi_i^n\frac{F_{i+1}^n-F_{i-1}^n}{\Delta x}+\sigma_i^{n-1})$$

dans un second temps Adams Bashford (sur deux pas de temps) a été utilisé:

$$f_i^{n+1}=f_i^n+\Delta t((3/2)(\varphi_i^n\frac{F_{i+1}^n-F_{i-1}^n}{\Delta x}+\sigma_i^n)-(1/2)(\varphi_i^{n-1}\frac{F_{i+1}^{n-1}-F_{i-1}^{n-1}}{\Delta x}+\sigma_i^{n-1}))$$

conditions aux limites, au choix:

-h(x=0,t) et h(x=nΔx,t) sont imposés (p est donc déduit).

- u_0 et q sont extrapolés au second ordre en Δt et Δx sans terme non linéaire:

$$u_0^{n+1}=u_0^n+\Delta t(0+\frac{\Delta p_i^n}{\Delta x}+2\tau_{ui}{}^{n-1});\quad q_0^{n+1}=q_0^n+\Delta t(02\tau_{0i}{}^{n-1});$$

- on peut extraire une pseudo forme caractéristique en sortie en remplaçant d/dx par (k_r+ik_i) où k est le nombre d'onde associé au fondamental du signal d'entrée.

limite de stabilité: Cas Adams Bashford (linéaire), c'est la condition de CFL
dt<=.006 pour dx=.0125
dt=.010 pour dx=.02
dt<=.027 pour dx=.05

5-2 Résolution par différences finies:

5-2.1 équations

Nous résolvons maintenant le système complet:

$$R=R_0(x)+h(x,t);$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\eta}{R}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\left(\frac{v}{R}\frac{\partial u}{\partial \eta}+u(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\eta}{R}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta})\right)=-\frac{\partial p/\rho}{\partial x}+\frac{\nu}{\eta R^2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta});$$
$$\frac{\partial(\eta v)}{\partial \eta}=\eta R(-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\eta}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta})$$
$$v(x,\eta=1)=\frac{\partial R}{\partial t}$$
$$p/\rho=K(R-R_0(x));$$

5-2.2 Schéma:

Nous résolvons d'abord la vitesse longitudinale par un schéma du premier ordre en temps, avec itération sur un indice interne de manière à bien prendre en compte les termes non linéaires:

$$-\frac{u_i^{N+1}}{\Delta t}+\frac{\nu}{\eta(R^N)^2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\eta\frac{\partial u^{N+1}}{\partial \eta})_i=-\left(\frac{\eta}{R}\frac{\Delta R}{\Delta t}\frac{\Delta u}{\Delta \eta}\right)_i^N+\left(\frac{v}{R}\frac{\Delta u}{\Delta \eta}+\bar{u}(\frac{\Delta u}{\Delta x}-\frac{\eta}{R}\frac{\Delta R}{\Delta x}\frac{\Delta u}{\Delta \eta})\right)_i^N-(-\frac{\Delta p/\rho}{\Delta x})_i^N-\frac{u_i^n}{\Delta t}$$

On a bien entendu $u^{N=0}=u^n$, et à convergence $u^{n+1}=u^{N+1}$.
La dérivée seconde est implicitée et centrée en y, les termes non linéaires et de gradient de pression sont mis en terme source explicite, $\Delta/\Delta x$ représente une différence centrée (i+1)-(i-1); $\Delta/\Delta\eta$ représente une différence centrée (j+1)-(j-1); $\Delta R/\Delta t$ est l'accroissement à l'étape N; $\bar{u}$ est la moyenne de u sur les deux points i+1 et i-1.

Puis on obtient la vitesse transverse par intégration par schéma d'Euler de:

$$\frac{\partial(\eta v^{N+1})}{\partial \eta}=\eta R^N(-\frac{\Delta u^{N+1}}{\Delta x}+\frac{\eta}{R}\frac{\Delta R^N}{\Delta x}\frac{\Delta u^{N+1}}{\Delta \eta}),$$

d'où l'accroissement de rayon, et la nouvelle pression:

$$\frac{\partial R^{N+1}}{\partial t}=v^{N+1}(x,\eta=1),\quad R^{N+1}=R^n+(\partial R/\partial t)^{N+1}\quad (p/\rho)^{N+1}=K(R^{N+1}-R_0(x));$$

L'itération se poursuit jusqu'à ce que la variation du Rayon, divisée par l'amplitude maximale soit inférieure à 510^{-5} pour tous les points.

Conditions aux limites:

-> h (donc p) donné aux bornes.
-> extrapolation linéaire de u et v. par exemple la nouvelle valeur de la vitesse en 0, est obtenue à partir de la vitesse en Δx et $2\Delta x$, valeurs qui sont elles calculées par convection diffusion:

$u^{n+1}(x=0,y)=2*u^{n+1}(\Delta x,y)-u^{n+1}(2*\Delta x,y)$ *idem* à la sortie.

Ce schéma ne permet pas de calculer de chocs (oscillations), or ceux ci arrivent lorsque la longueur du tuyau est comparable à la longueur d'onde (Rudinger 70, Cowley 82). Bien entendu, ce phénomène est très pathologique, le fait de capter les chocs n'est pas une priorité.
De même le traitement de conditions de sorties n'est pas un problème important avec notre approche puisque l'on aura des mesures en entrée et en sortie.
Les dérivées en x ont été centrées (on a vu que c'était une bonne approximation lors du chapitre sur la couche limite interactive). Le centrage est bénéfique aux cas où il y a des courants de retour. Ces équations ne présentent avec nos simulations aucune singularité en temps.

6- Exemples de résolution numérique du problème de propagation.

6-1 Résolution numérique dans le cas de la méthode intégrale, aspect propagatif:

Le système intégral est donc résolu par une méthode d'Adams Bashford où on se donne des conditions sur le rayon à l'entrée et à la sortie, et où toutes les quantités sont nulles à t=0. On a validé ce code en reproduisant la solution de Womersley (qui en est la solution naturelle! *cf.* plus loin). Dans la suite, on présente des résultats pour lesquels on impose $h(t,x=0)=\sin^2(\pi t)$, une pseudo caractéristique sortante à la sortie et les valeurs physiologiques suivantes Pedley (1980: $\alpha=5$, $\varepsilon_2=0{,}1$, $\varepsilon_3=0{,}6$, $\varepsilon_4=0{,}1$. Sur les figures 1 et 2, la pression en $x=0,\lambda/4,\lambda/2$ est représentée en fonction du temps et déphasée de x/c_0 pour "éliminer" la propagation de l'onde linéaire non dissipative. On met en évidence sur la figure 1 les effets de dissipation visqueuse et viscoélastiques lorsque les termes non linéaires sont négligés. Pour les cas examinés ces deux effets sont du même ordre de grandeur et induisent une décroissance de l'amplitude. Par ailleurs le maximum de l'onde est retardé par les effets visqueux. Cet effet est contrecarré par les effets nonlinéaires qui accroissent la vitesse de propagation de cette onde (figure 2). Ils conduisent également à un raidissement du front d'onde. Comparativement, le terme non linéaire de convection est plus faible que le terme non linéaire de paroi. Ce modèle permet donc de retrouver la majorité des effets connus dans une approche très simplifiée. De plus il prédit des profils de vitesses réalistes sur la figure 3 représentant les profils de vitesse en $x=\lambda/2$, (remarquer le courant de retour). On notera que, dans cette approche, il est possible d'inclure d'autres effets: viscoélasticité du fluide, conicité des artères, influence du cisaillement sur la loi de paroi, reflexions...

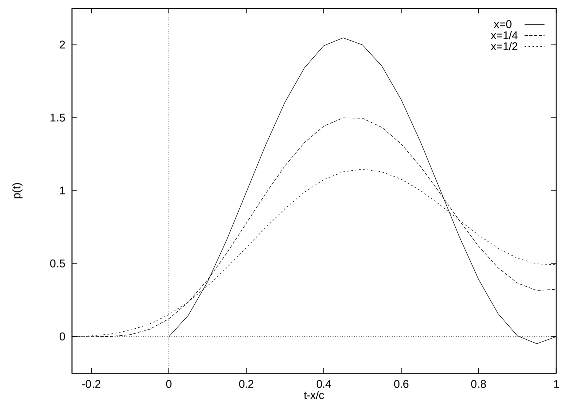


fig 1: pression en trois sites, effets dissipatifs seuls, pas de termes non linéaires.

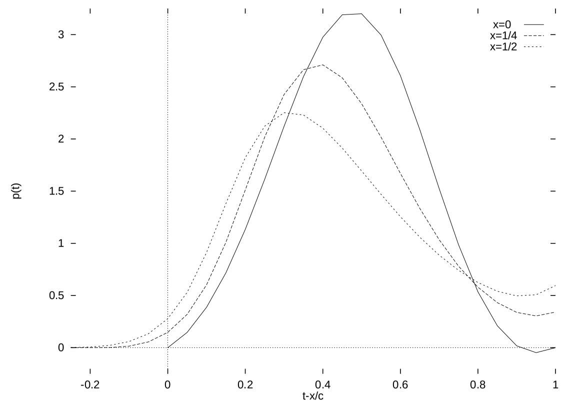


figure 2 pression en trois sites, effets dissipatifs et termes non linéaires.

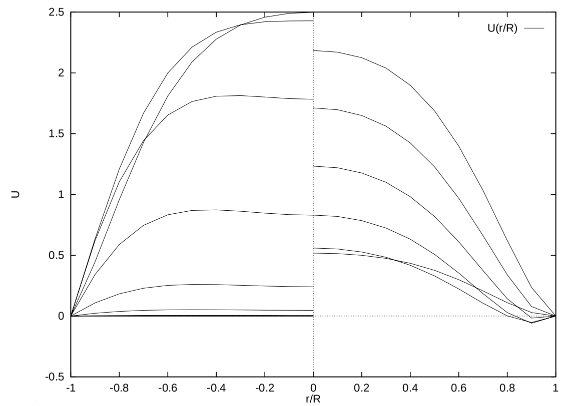
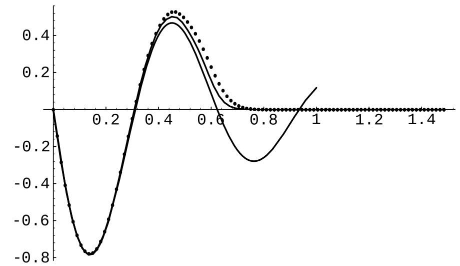


figure 3 profils de vitesse, partie gauche: avant le passage du maximum pulse (0.9>t), partie droite: après le passage (.9<t<1.5) Δt=.1 entre chaque courbe.

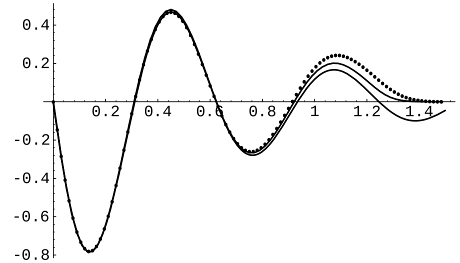
6-2 Résolution numérique dans le cas de la méthode différence finies:

6-2.1 comparaisons sur la solution linéaire de Womersley

On compare la déformation du pulse (évolution de h en fonction de x, à un temps fixé) dans le cas du calcul complet en différences finies et dans celui de la méthode intégrale.
Il s'agit de la propagation d'une perturbation harmonique de déplacement de la paroi en $H(t)\sin(2\pi t)$ à l'entrée. Comparaison entre la résolution par la méthode intégrale (points), la résolution complète et la solution linéaire de Womersley ; α=5. Dans les deux figures suivantes, il n'y a aucune non linéarité.



h(x,t=1) comparaison Womersley Analytique/ Intégral (points)/ Complet (traits)

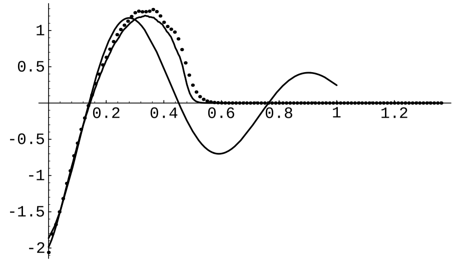


h(x,t=2)comparaison Womersley Analytique// Intégral (points)/ Complet (traits)

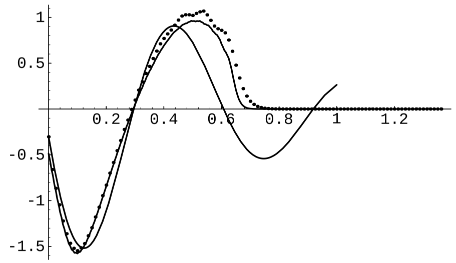
On note la bonne concordance entre les deux résultats calculés et la solution analytique. Les deux méthodes donnent des résultats identiques mis à part pour le front d'onde de la méthode intégrale qui prend mal en compte les effets transitoires (il est possible que la résolution complète aussi!).

6-2.2 comparaisons sur un cas non- linéaire

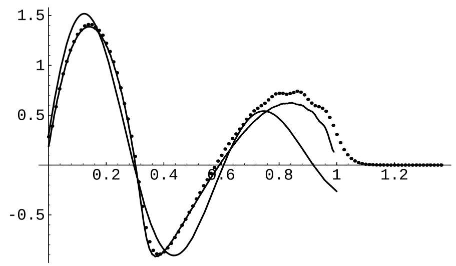
Propagation d'une perturbation harmonique de déplacement de la paroi en $\varepsilon H(t)\sin(2\pi t)$ à l'entrée. Comparaison entre la résolution par la méthode intégrale (points), la résolution complète et la solution linéaire de Womersley. ε=.1; α=5.
La partie transitoire n'est pas tout à fait correcte (front de l'onde) mais mis à part ce front, la suite est plus convaincante.



h(x,t=.75) Womersley linéaire pour mémoire/ Intégral (points)/ Complet (traits)



h(x,t=1.0) Womersley/ Intégral (points)/ Complet (traits)



h(x,t=1.5) Womersley/ Intégral (points)/ Complet (traits)

6-2.3 Validation dans le cas très visqueux:

Il existe une dégénérescence intéressante des équations qui fournit une solution exacte (Jones XX) qui correspond à l'écoulement dans les vaisseaux terminaux. On suppose que l'écoulement est très visqueux et quasi stationnaire (et aussi linéarisé), il ne reste que les

termes diffusifs et de gradient de pression (cela nécessite de prendre la raideur équivalente k/ρ très grande), la vitesse est donnée par Poiseuille (avec dimensions):

$$u_{moyen} = -\frac{R_0^2}{8\nu}\frac{\partial(p/\rho)}{\partial x}$$

et avec l'équation de la masse intégrale on trouve une équation de diffusion portant sur le déplacement:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{KR_0^3}{16\nu}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

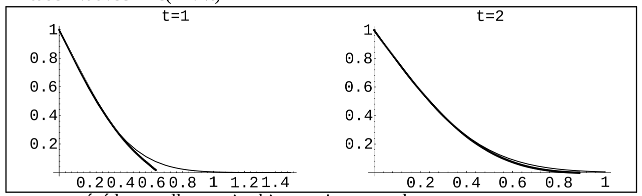
dont la solution dans le cas d'un échelon de déplacement est (h x et t sont avec des dimensions):

$$h = h_0 \mathrm{Erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\nu}{KR_0^3/2}}\frac{x}{t^{1/2}}\right)$$

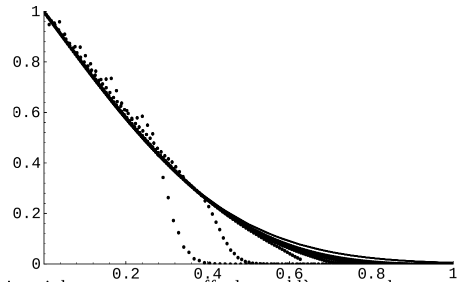
Attention, la subtilité de cet écoulement est qu'il n'est plus propagatif et qu'il n'y a pas de temps ni de longueur caractéristique, si on mesure t par (T) et x par $(kR_0)^{1/2}$(T), l'expression sans dimensions (ici x et t sans dimensions) est:

$$h = \mathrm{Erfc}\left(2\sqrt{\frac{\nu}{R_0^2 T}}\frac{x}{t^{1/2}}\right)$$

Par exemple, la raideur est kraid0=10, la viscosité visc=1 et l'amplitude Ampli=.0000001 (c'est ε_2 que l'on ne peut pas mettre égale à 0 mais que l'on prend le plus petit possible). On compare ci dessous au temps t=1 et t=2 le calcul de h en fonction de la variable de similitude x√t avec Erfc(2 x/√t)



Les temps précédents collent moins bien, et c'est normal.



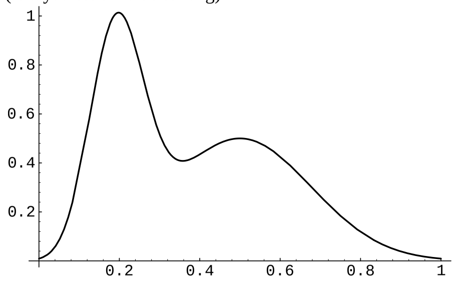
La superposition ci dessus montre en effet les problèmes pour les temps courts liés au transfert de l'information à la vitesse 1/√2: il y a un léger choc que l'on voit ci dessus avancer au temps t=.25 (il est aux environs de x/√t=0.35) t=.5 (il est aux environs de x=0.5) t=.75 (aux environs de x=0.61), au temps t=1 c'est mieux, au temps t=2 la courbe calculée est confondue avec l'exponentielle.

6-2.4 pseudo cas physiologique

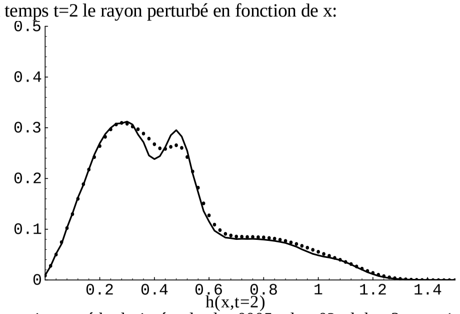
On met en entrée pour la variation de rayon un signal à deux bosses périodique de période 1 dont la forme peut ressembler à ce qui existe dans la nature:

$$5\, t\, \exp(-(100\,(t-/6)^2)) + \ 0.5 \exp(-(16\,(t-1/2)^2)),$$

la sortie est libre (le tuyau est en fait très long).

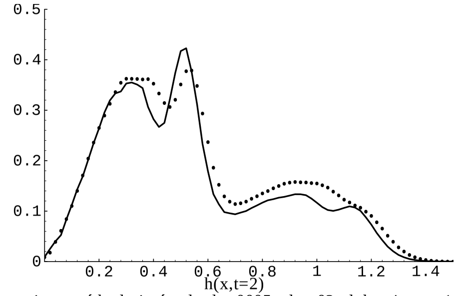


et on mesure au temps t=2 le rayon perturbé en fonction de x:



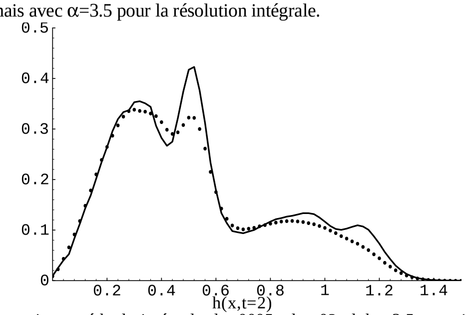
points: méthode intégrale dt=.0005 dx=.02 alpha=3 eps=.1
traits: différences finies dt=.001 dx=.02 visc=.6981317

idem mais α=4 (visc=.3927)



points: méthode intégrale dt=.0005 dx=.02 alpha=4 eps=.1
traits: différences finies dt=.001 dx=.02 visc=.3927

même calcul mais avec α=3.5 pour la résolution intégrale.



points: méthode intégrale dt=.0005 dx=.02 alpha=3.5 eps=.1
traits: différences finies dt=.001 dx=.02 visc=.3927

6-2.5 conclusions

La résolution en différences finies semble présenter de bonnes garanties. Les méthodes intégrales/ différences finies donnent des résultats très comparables dans le cas de Womersley. On observe l'atténuation visqueuse et le raidissement non linéaire: formation d'une onde de choc due au départ impulsif.

Ce type de résolution n'est pas encore trop démodé, les résolutions par un code de Navier Stokes complet couplé avec une paroi souple serait encore trop difficiles et rares. Il existe cependant de tels résultats dans la littérature: à basse fréquence Errate 95, ou par une méthode où la distribution de pression et le déplacement sont calculés par une méthode de type onde de Lighthill, le résultat qui est le champ de pression et le déplacement de la paroi servant de conditions aux limites pour un calcul de Navier Stokes (Reuderink & al. 93)! Il ne faut pas oublier la résolution la plus complète actuellement de Vesier & Yogonathan 92.

Avec notre méthode on peut aborder comme Reuderink & al. 93 l'effet d'un rétrécissement, ou d'un brusque élargissement comme Pedrizzetti 96.

La méthode intégrale a un intêret certain si on désire identifier les paramètres physiques de l'artère (élasticité viscoélasticité, termes non linéaires) à partir des données expérimentales.
En effet les méthodes dites inverses (Chavent (1979)) nécessitent un grand nombre d'intégrations numériques du système différentiel représentant le problème, il est donc hors de question d'utiliser les équations de Navier Stokes pour ce type d'étude mais bien plutôt de telles modélisations simplifiées. Il est bien entendu évident que les progrès de l'informatique rendront caduque cette approche assez rapidement et qu'il faudra faire une rétropropagation sur les équations adjointes du système de couche mince dans un temps assez proche, puis sur Navier Stokes en axisymétrique puis *etc*.

7- méthode inverse

7-1 introduction

Dans cette partie nous détaillons les calculs qui mènent à la construction du problème de rétroprogation. L'idée générale de la méthode est que l'on se donne les mesures en entrée et en sortie du déplacement en fonction du temps. Ces données servent de conditions aux limites pour la simulation numérique effectuée avec un certain jeu de paramètres $S=(R_0\ \varepsilon_2\ k\ \varepsilon_3\ \alpha)$. On compare ensuite le résultat du calcul en une certaine abscisse à une troisième mesure. Le but du jeu est de trouver le bon ensemble *S* de paramètres permettant de faire coïncider au mieux calcul et expérience. La connaissance du *S* optimal et son évolution au cours des différents examens cliniques pourra alors servir d'aide au diagnostic pour l'évolution des caractères physiques d'une artère ou d'une prothèse.

L'étape précédant cette mise en oeuvre sur de vraies données cliniques (comparaison expérience/ calcul) sera d'abord une comparaison entre la méthode de différences finies et les méthodes intégrales. Ce sera notre résolution en différences finies qui permettra de "simuler" l'expérience.

L'antépénultième étape est présentée ici. Elle est encore plus restrictive: dans un tout premier temps nous présentons une méthode inverse ne portant que sur deux paramètres: le nombre de Womersley α et la raideur k (réponse linéaire de la paroi), $R_0=1$ et les non linéarités sont absentes.
Le problème inverse que nous allons traiter est le suivant: on impose en entrée et en sortie la solution de Womersley pour un tuyau infini (correspondant à α_w et k_w donnés). La mesure est elle même la même solution de Womersley en un point intermédiaire. On cherche l'ensemble $S=(k,\ \alpha)$ optimal (on doit retrouver $(\alpha_w,\ k_w)$!). Bien entendu nous travaillons sur le problème écrit sans dimensions, ce qui veut dire que l'adimensionnenement a été fait avec des valeurs estimées et que notre démarche porte sur la correction de cette estimation.

La démarche est exactement calquée sur Chavent 79.

7-2 Rappel sur la construction de J et L

Il faut définir un critère qui est l'écart cumulé entre la mesure et le calcul sur une période:

$$J = \int dt\ (h-h_m)^2.$$

On écrit ensuite les équations sous forme variationnelle (les équations aux dérivées partielles de départ sont notées Em=0 Ec=0 Eq=0 et Ep=0 *cf.* plus loin), avec les bonnes variables adjointes (à trouver):

$$E = \int dx\ (Em\ h^*) + \int dx\ (Ec\ u^*) + \int dx\ (Eq\ q^*),$$

puis on définit un Lagrangien:

$$L = \int dt E + J$$

Or, pour toute solution du système E est nul et le Lagrangien se réduit au critère:

$$L(h(\alpha,k),q(\alpha,k),U_0(\alpha,k),p(\alpha,k)) = 0+J(\alpha,k)$$

la différentielle pour une fonction solution est donc telle que:

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial h}L\ \delta h + \frac{\partial}{\partial q}L\ \delta q + \frac{\partial}{\partial U_0}L\ \delta U_0 + \frac{\partial}{\partial \alpha}L\ \delta\alpha + \frac{\partial}{\partial k}L\ \delta k.$$

L'astuce est de choisir les variables adjointes de manière à avoir:

$$\frac{\partial}{\partial h}L\ \delta h + \frac{\partial}{\partial q}L\ \delta q + \frac{\partial}{\partial U_0}L\ \delta U_0 = 0 \text{ pour tout } \delta h\ \delta q\ \delta U_0.$$

donc le problème de rétropropagation portant sur les variables adjointes s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial h}L = 0,\ \frac{\partial}{\partial q}L = 0,\ \frac{\partial}{\partial U_0}L = 0.$$

C'est ce que nous allons appliquer.

7-3.Application tir sur α ετ κ seuls

7-3.1.Rappel des équations:

Les équations complètes sont, avec $R=R_0+\varepsilon_2 h$:

Em=0

$$2R_0\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(R_0{}^2U_0)=0$$

Ec=0

$$\frac{\partial U_0}{\partial t}+k\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{2\,2\pi}{\alpha^2R^2}(\tau_{0q}\frac{q}{R^2}+\tau_{0u}U_0)=0,$$

Eq=0

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}(\tau_q\frac{q}{R^2}+\tau_uU_0)=0.$$

Ces équations sont notées Eq Ec et Em pour la suite.

7-3.2.critère

La mesure se fait au point x_m:

$$J=\int(h(x_m,t)-h_m(t))^2dt$$

7-3.3.différentielle linéaire

On part de E:

$$E = \int dx\,(Em\,h^*)+\int dx\,(Ec\,u^*)+\int dx\,(Eq\,q^*).$$

On différencie, on a δE, il faut donc calculer la différentielle de chaque équation. On se place en tout linéaire pour simplifier:

$R=R_0+\varepsilon_2 h$, avec bien entendu $R_0=1$ pour commencer (pas de conicité).

On décompose E en ses parties, d'où l'on tire les variations suivantes pour chacune des équations.

δEm=>

$$2R_0\frac{\partial\delta h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(R_0{}^2\delta U_0-\delta q)$$

δEu=>

$$\frac{\partial\delta U_0}{\partial t}+k\frac{\partial\delta h}{\partial x}-\frac{2\,2\pi}{\alpha^2R_0{}^2}(\tau_{0q}\frac{\delta q}{R_0{}^2}+\tau_{0u}\delta U_0)$$

δEq=>

$$\frac{\partial\delta q}{\partial t}+\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}(\tau_q(\frac{\delta q}{R_0^2})+\tau_u\delta U_0)$$

après multiplication par la variable adjointe (ou duale), et intégration par parties on obtient:

$$\delta E = \int dt\int dx\,(\delta Em\,h^*)+\int dt\int dx\,(\delta Eu\,u^*)+\int dt\int dx\,(\delta Eq\,q^*)+$$

$$\int dt\int dx\,(\delta_\alpha Eu\,u^*)+\int dt\int dx\,(\delta_\alpha Eq\,q^*)+\int dt\int dx\,(\delta_k Eu\,u^*).$$

L'intégration par parties a été faite en temps et en x, cela devient, en tenant compte du fait qu'il n'y a pas d'erreur en t=0 pour chaque δX):

$$\int dxdt\,\partial[\text{variable } \delta X \text{ fois son dual } X^*]/\partial t=0:$$

ce qui impose de prendre toutes les varibles duales =0 en t=1 :

pour tout x: $u^*(x,t=1)=0$, $h^*(x,t=1)=0$, $q^*(x,t=1)=0$, $p^*(x,t=1)=0$.

Dans notre cas le temps t=0 correspond au temps au bout duquel le régime est établi, t=1 est le temps d'une période.

Nous faisons la démarche pas à pas, décomposons δE en ses différentes parties:

** $\int dt\int dx\,(\delta Em\,h^*)$ donne

$$\iint dxdt\quad -\delta h2R_0\frac{\partial h^*}{\partial t}-\delta U_0R_0{}^2\frac{\partial}{\partial x}(h^*)+\delta q\frac{\partial}{\partial x}(h^*)+\frac{\partial}{\partial x}[R_0{}^2h^*\delta U_0]-\frac{\partial}{\partial x}[h^*\delta q]$$

** $\int dt\int dx\,(\delta Eu\,u^*)$ donne

$$\iint dxdt\quad -\delta U_0\frac{\partial u^*}{\partial t}-k\delta h\frac{\partial u^*}{\partial x}-\frac{2\,2\pi}{\alpha^2R_0{}^2}(\tau_{0q}\frac{\delta q}{R_0{}^2}u^*+\tau_{0u}\delta U_0u^*)+\frac{\partial}{\partial x}[k\delta hu^*]$$

** $\int dt\int dx\,(\delta Eq\,q^*)$ donne

$$\iint dxdt\quad -\delta q\frac{\partial q^*}{\partial t}+\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}(\tau_q(\frac{\delta q}{R_0^2})q^*+\tau_u\delta U_0q^*)$$

** $\iint dxdt\ (\delta_k Eu\,u^*)$ donne

$$\iint dxdt\quad \delta k\frac{\partial h}{\partial x}u^*$$

** $\iint dxdt\ (\delta_\alpha Eu\,u^*)$ donne

$$\iint dxdt\quad -\delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2R^2}\tau_{0q})\frac{q}{R^2}u^*-\delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2R^2}\tau_{0u})U_0u^*$$

** $\iint dxdt\ (\delta_\alpha Eq\,q^*)$ donne

$$\iint dxdt\quad \delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_q)\frac{q}{R^2}q^*+\delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_u)U_0q^*.$$

**(δJ) donne

$$\int 2\delta h(h(x_m,t)-h_m(t))dt$$

on réécrit ce dernier en faisant apparaître la distribution de Dirac au point de mesure (ne pas confondre les δ!!)

$$\int 2\delta h(h(x_m,t)-h_m(t))dt = \iint 2\delta h(h(x,t)-h_m(t))\delta(x-x_m)dxdt$$
$$= \iint 2\delta h(h(x,t)-h_m(t))\delta_{x_m} dxdt$$

après factorisation des δh δq *etc*:

$$\iint dxdt \quad \{ \delta h(-R_0 2\frac{\partial h^*}{\partial t} - k\frac{\partial u^*}{\partial x} + 2(h-h_m)\delta_{x_m}) + $$
$$+\delta U_0(-\frac{\partial u^*}{\partial t} - R_0^2\frac{\partial}{\partial x}(h^*) - \frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R_0^2}\tau_{0u}u^* + \frac{2\,2\pi}{\alpha^2}(\tau_u q^*)) +$$
$$+\delta q(-\frac{\partial q^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h^*) - \frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R_0^2}(\tau_{0q}\frac{1}{R_0^2}u^*) + \frac{2\,2\pi}{\alpha^2}(\tau_q(\frac{1}{R_0^2})q^*))$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}[R_0^2 h^*\delta U_0 - h^*\delta q + k\delta h u^*] + u^*\delta k\frac{\partial h}{\partial x} +$$
$$+(-\delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R^2}\tau_{0q})\frac{q}{R^2}u^* - \delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R^2}\tau_{0u})U_0 u^*) +$$
$$\delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_q)\frac{q}{R^2}q^* + \delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_u)U_0 q^*\}.$$

on vient d'écrire

$$L(h(\alpha,k),q(\alpha,k),U_0(\alpha,k),p(\alpha,k)) = 0+J(\alpha,k)$$

et

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial h}L\ \delta h + \frac{\partial}{\partial q}L\ \delta q + \frac{\partial}{\partial U_0}L\ \delta U_0 + \frac{\partial}{\partial \alpha}L\ \delta\alpha + \frac{\partial}{\partial k}L\ \delta k.$$

identifions, le gradient est donc:

$$\delta J = \frac{\partial L}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial}{\partial k}L\ \delta k$$

$$\delta J = \iint dtdx(-\delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R^2}\tau_{0q})\frac{q}{R^2}u^* - \delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R^2}\tau_{0u})U_0 u^* + \delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_q)\frac{q}{R^2}q^* + \delta(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_u)U_0 q^*) +$$
$$+\iint dxdt \quad \{u^*\frac{\partial h}{\partial x}\}\delta k$$

ou si on veut:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}J =$$
$$\iint dtdx(-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R^2}\tau_{0q})\frac{q}{R^2}u^* - \frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R^2}\tau_{0u})U_0 u^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_q)\frac{q}{R^2}q^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_u)U_0 q^*)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial k}L = \iint dxdt \quad \{u^*\frac{\partial h}{\partial x}\}.$$

la partie mesure est incluse dans le Dirac et les bornes, après intégration en x de x_e à x_s:

$$[R_0^2\delta U_0(x,t) - \delta q(x,t))h^*(x,t) + k\delta h(x,t)u^*(x,t)]_{x_e}^{x_s}$$

seul h (donc p si on suppose k fixé) est connu en entrée et en sortie pour le vrai problème. Donc δh=0 (donc δp=0) en entrée et en sortie, u^* est donc libre; en revanche δU_0 et δq sont inconnus car ni q ni U_0 ne sont imposés. Il reste donc:

$$h^*(x_e,t)=0,\ h^*(x_s,t)=0,$$

puis, annuler $\frac{\partial}{\partial h}L\ \delta h + \frac{\partial}{\partial q}L\ \delta q + \frac{\partial}{\partial U_0}L\ \delta U_0$ revient à calculer les équations de rétropagation.

7-3.4.Rétropropagation:

Les équations de rétropropagation sont donc de la forme "$-\partial f^*/\partial t - F^*=0$", soit:

$$\boxed{\begin{aligned} &-R_0 2\frac{\partial h^*}{\partial t} - k\frac{\partial u^*}{\partial x} + 2(h-h_m)\delta_{x_m} = 0,\\ &-\frac{\partial u^*}{\partial t} - R_0^2\frac{\partial}{\partial x}(h^*) - \frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R_0^2}\tau_{0u}u^* + \frac{2\,2\pi}{\alpha^2}(\tau_u q^*) = 0,\\ &-\frac{\partial q^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h^*) - \frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R_0^2}(\tau_{0q}\frac{1}{R_0^2}u^*) + \frac{2\,2\pi}{\alpha^2}(\tau_q(\frac{1}{R_0^2})q^*) = 0,\end{aligned}}$$

avec pour conditions aux limites:
pour tout x: $u^*(x,t=1)=0$, $h^*(x,t=1)=0$, $q^*(x,t=1)=0$.
et pour tout t: $h^*(x_e,t)=0$, $h^*(x_s,t)=0$.
pour ce qui est de q^* et et u^* on les calcule aux bornes en écrivant les dérivées ∂/∂x différentiées à l'ordre 2 d'aval en amont à l'entrée et d'amont en aval à la sortie.

On calcule ensuite les deux composantes du gradient:

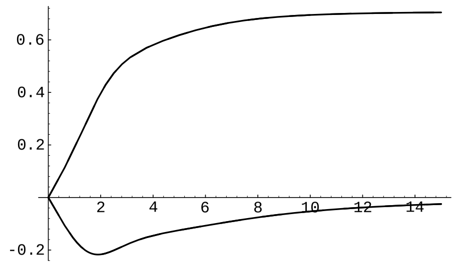
$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{d\alpha}J =\\ &\iint dtdx(-\frac{d}{d\alpha}(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R^2}\tau_{0q})\frac{q}{R^2}u^* - \frac{d}{d\alpha}(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2 R^2}\tau_{0u})U_0 u^* +\\ &+\frac{d}{d\alpha}(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_q)\frac{q}{R^2}q^* + \frac{d}{d\alpha}(\frac{2\,2\pi}{\alpha^2}\tau_u)U_0 q^*)\\ &\text{et}\\ &\frac{\partial}{\partial k}L = \iint dxdt \quad \{u^*\frac{\partial h}{\partial x}\}.\end{aligned}}$$

7-3.5 Solutions de l'équation de dispersion du système inverse

En guise de vérification, si on cherche une solution en onde plane de la forme:

$$h=h_0\exp(2i\pi(t-x/c)),\ \ u=u_0\exp(2i\pi(t-x/c))\ q=q_0\exp(2i\pi(t-x/c)),$$

pour le système précédent, on obtient en fonction de α la partie réelle et la partie imaginaire de la vitesse c sur la courbe suivante (pour simplifier on figé les τ à leur valeur de Poiseuille).



Elle est exactement superposée à la courbe Re(c) -Im(c) du système direct. La vitesse d'onde du système inverse est donc complexe conjuguée de la vitesse d'onde du système direct. Ce qui semble raisonnable sachant que dans le cas simple:

$\partial u/\partial x - 1/c\, u = 0$ (solution $e^{x/c}$), donne $-\partial u^*/\partial x - 1/c\, u^* = 0$ (solution $e^{-x/c}$).

7-3.6 détails numériques

i) On discrétise en différences finies par la méthode Adams Bashford en utilisant les mêmes paramètres pour les deux problèmes (typiquement dt=.00125 dx=.01 nombre de points nx=20). Nous avons pris encore une fois, *mea culpa*, un parti pris de simplicité, la bonne méthode (Chavent 79, Barros 96, Fullana *et al*. 96) consiste normalement à écrire le système inverse portant sur les équations *discrétisées* et non sur les équations *continues*.
Attention, on résout bien un système de rétropropagation, donc pour chacun des f^* parmi les h^*, u^*, q^*, vérifiant une des trois équations précédentes: $-\partial f^*/\partial t - F^*=0$ est discrétisé par la méthode de Adams Bashford en:

$$f^*(t-\Delta t) = f^*(t) \ - \Delta t\,(3/2\, F^*(t) - 1/2\, F^*(t+\Delta t)).$$

ii) La distribution de Dirac est de largeur dx: elle est approximée par une exponentielle de gauss d'écart type a=.1, *ie* le pas typique:

$$\delta_0(x)=(a^{-1})\sqrt{(\pi^{-1})}\ \exp(-(x/a)^2).$$

iii) On donne la solution de Womersley analytique à l'entrée et à la sortie pour le problème direct. Pour chaque calcul on est obligé d'attendre la "stationnarisation du forçage": on laisse évoluer en temps jusqu'à ce que l'écart entre la vitesse au centre entre une période et la suivante soit inférieur à 510^{-5} en moyenne (ce qui correspond au temps t_s=6 ou 7). La période suivante (de $t=t_s+0$ à $t=t_s+1$) est calculée et toutes les valeurs sont conservée pour le calcul ultérieur du gradient. On fait ensuite le calcul de rétropropagation de t=1 à 0 en utilisant la comparaison de la "mesure" et le calcul au point choisi, ce qui donne ensuite J et son gradient.

7-3 résultats

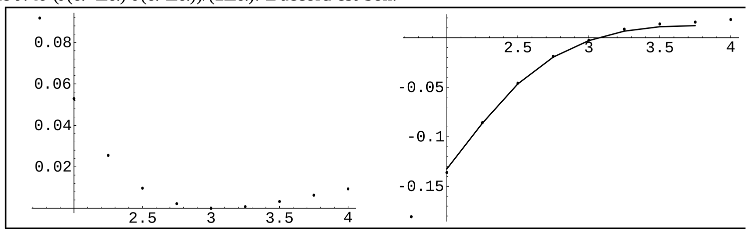
7-3.1 cadre

On ne présente qu'un essai, nous allons voir qu'il valide bien la méthode. On pourrait faire une étude en fonction des pas de maillage, différents essais nous ont montré que le maillage assez grossier que nous prenons est suffisant. On pourrait aussi faire varier la longueur du domaine qui a été pris arbitrairement égal à environ $\lambda/3.5=0.2$ et la position du point de mesure. Ce que nous n'avons pas encore fait de manière systématique.

Ici on simule $\alpha=3$, et k=1. On a dt=.0025 dx=.02 nx=10, le point de mesure est x_mes=0.12. Il n'y a pas d'effets non linéaires.

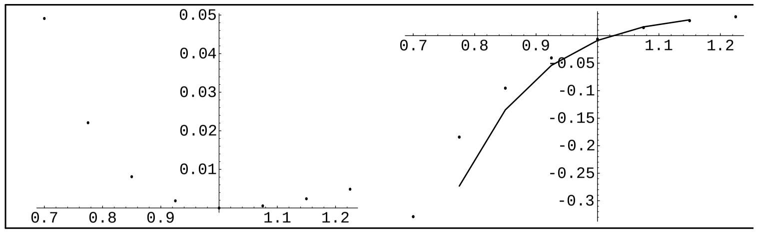
7-3.2 Un seul paramètre varie.

On fait varier α et k=1 est fixé. On voit bien que la courbe de J présente un minimum, presque nul, mais pas tout à fait il vaut 0.000056, c'est un cumul d'erreurs, dont l'erreur de stationnarisation. La figure de gauche ci dessous montre $J(\alpha)$ et la courbe de droite montre $\partial J(\alpha)/\partial\alpha$calculé de deux manières. La première ce sont les points qui sont les valeurs obtenues par la rétropropagation, les traits sont les valeurs calculées par l'accroissement calculé à partir de J: *ie* $(J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha-\Delta\alpha))/(2\Delta\alpha)$. L'accord est bon.



$J(\alpha)$ $\partial J(\alpha)/\partial\alpha$ et $(J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha-\Delta\alpha))/(2\Delta\alpha)$

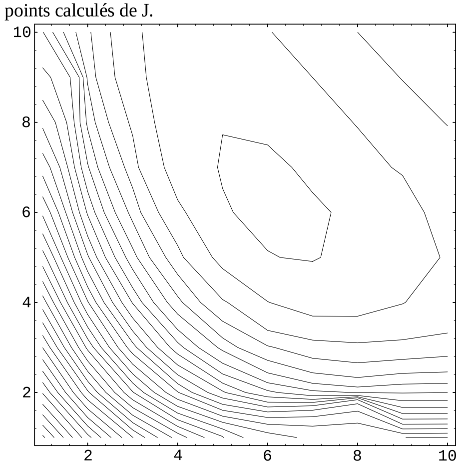
Ensuite, on simule $\alpha=3$, et k=1. On fait varier k et α =3 est fixé. On voit bien que la courbe de J présente un minimum. La figure de gauche ci dessous montre J(k) et la courbe de droite montre $\partial J(k)/\partial k$, les points sont les valeurs obtenues par la rétropropagation, les traits sont les valeurs calculées par l'accroissement $(J(k+\Delta k)-J(k-\Delta k))/(2\Delta k)$. L'accord est assez bon, nous imputons l'écart au fait que le Δk est trop grand pour bien estimer la dérivée par un accroissement..



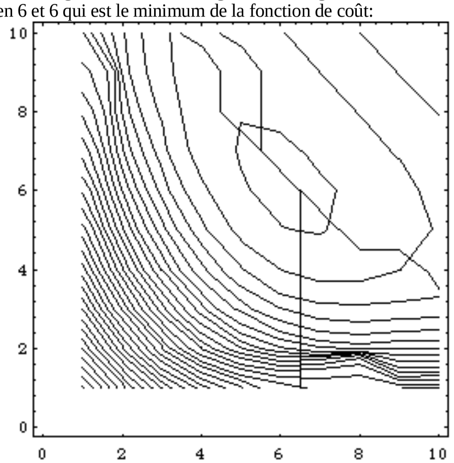
J(k) $\partial J(k)/\partial k$, $(J(k+\Delta k)-J(k-\Delta k))/(2\Delta k)$

7-3.3 Variation des deux paramètres

On fait maintenant varier α de 1.75 à 4 et k de 0.625 à 1.3. Le minimum est visible sur la figure ci dessous en (α=3=1.5+**6***0.25 , k=1=.55+.075***6**), cette figure représente les iso valeurs des 100 points calculés de J.



Si on superpose à cette figure le lieu des changements de signe de $\partial J/\partial\alpha$ et $\partial J/\partial k$ on voit qu'il se croisent bien en 6 et 6 qui est le minimum de la fonction de coût:



On pourrait calculer la matrice Hessienne de J à partir des accroissements de $\partial J/\partial\alpha$ et $\partial J/\partial k$.

Un tel calcul qui balaye 10*10=100 points (α,k) ce qui correspond à chaque étape à un calcul d'un système d'équations aux dérivées partielles de t=0 à environ 6 pour la stationnarisation puis rétropropagation de 1 à 0 par un nouveau calcul d'un système d'équations aux dérivées partielles. Soit environ 28000 pas de temps qui se font en environ 15 minutes sur un PowerMac PPC601 à 60MHz, ce qui est tout à fait raisonnable. On voit le gain avec une machine à 200MHz. Le rapport de vitesse joue de 1 à 6 entre la résolution par la méthode intégrale et les différences finies, le temps mis pour faire ce type de calcul avec une approche de type Navier Stokes est certainement encore plus long! On voit donc l'intérêt pratique de ces méthodes pour obtenir des résultats rapidement exploitables.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail une modélisation classique de type couche limite instationnaire de l'écoulement visqueux instationnaire dans un tuyau élastique. Une deuxième simplification (plus originale) a été faite en écrivant ces équations sous forme intégrale. La résolution numérique de ces deux problèmes coïncide assez raisonnablement, cette comparaison est inédite à notre connaissance. De nombreux effets ont été inclus, et leurs conséquences numériques ont été présentées.
Des validations dans des conditions plus physiologiques sont encore à faire.
D'autres applications sont possibles: étude de la conicité, variation de section de type anévrisme ou sténose (en axi)...

Une méthode inverse a été ébauchée dans le cadre de notre méthode intégrale (elle pourrait être adaptée très simplement aux autres types de fermetures intégrales). Cette méthode permet effectivement de retrouver la vitesse de l'onde et la viscosité dans le cas de l'écoulement de Womersley. Elle doit être poursuivie pour évaluer les autres paramètres du modèle qui sont ceux des non linéarités.

BIBLIOGRAPHIE

Animations disponibles sur :
`http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/lagree.html`

Barros E. 1996 "identification de paramètres dans les équations de Saint Venant" Thèse U.Paris VI

Belardinelli E. Cavalcanti S. 1992 "theorical analysis of pressure pule propagation in arterial vessels" *J. Biomechanics* vol 25 pp 1337 1349.

Chavent G. 1979, Identification of distributed parameter systems, Proceedings of the 5th. IFAC Symposium on Identification and System Parameters Estimations, 1979, pages 85-97

Fullana J. M., Le Gal P., Rossi M. & Zaleski S. 1996 "identification of parameters in amplitude equations describing coupled wakes" ...

Vesier C.C. & Yonganathan A.P. 1992, "A computer method for simulation of cardiovascular flow fields: validation of approach" J. Comp. Phys 99, pp 271- 287

Cowley S. J. 1982 Elastic Jump on fluid filled elastic tubes, JFM, vol 116, pp 459- 473

Errate D. 1995 "Etude mathématique et numérique de l'interaction fluide structure instationnaire en grandes déformation" Thèse université Paris 6

Fung Y.C. "Biomechanics" proceedings of ASME 1966

Ghidersa B. 1994, Étude de l'écoulement du sang dans les grosses artères, Rapport de stage École Polytechnique.

Horsten J.B.A.M. Van Steenhoven A.A. & Van Dongen M.E.H. 1989 Linear propagation of pulsatile waves in viscoelastic tubes, J. Biomechanics, Vol 22, N 5, pp 477- 484

Jones R. 19XX, R.T. Blood Flow, Annual Review of Fluid Mechanics, p223- 243.

Kuiken G.D.C. 1984 wave propagation in a thin walled liquid filled initally stresses tube , J.F.M. , v 141, pp 289- 308.

Lagrée P-Y & Rossi M. 1996, Etude de l'écoulement du sang dans les artères: effets nonlinéaires et dissipatifs, C. R. Acad. Sci. Paris, t322, Série II b, p401- 408, 1996.

LeBalleur J.C. 1982, Viscid- inviscid coupling calculations for 2 and 3D flows, VKI lecture series 1982-02, 1982

Lighthill M.J. 1975, Mathematical Biofluiddynamics, SIAM Philadelphia, 1975

Ling S.C. & Atabek H.B. 1972 "a non linear analysis of pulsatile flow in arteries" *J.F.M.* vol 55 p 3 pp 493-511.

Ma X. Lee G.C. & Wu S.G. 1992 Numerical simulation for the propagation of nonlinear pulsatile waves in arteries. J. Bio Eng. Trans ASME , Vol 114 nov pp 490- 497

McDonald D.A. 1974, Blood flow in arteries 2nd ed, Arnold. London, 1974

Paquerot J.- F.Remoissenet M., 1994 Dynamic on non linear blood pressure waves in large arteries, Phys Lett A 194, pp 77- 82

Pedley T. J. 1980 , The Fluid Mechanics of Large Blood Vessel, Cambridge University press

Pedrizzetti G. 1996, Unsteady tube flow over an expansion, JFM, vol 310, pp 89- 111

Reuderink P.J., Van de Vosse F.N. Van Steenhoven A.A., Van Dongen M.E.H. & Janssen J.D. 1997 "Incompressible low speed ratio flow in non uniform distensible tubes", Int. J. num. meth. in Fluids, Vol 16, pp 597- 612

Rudinger G "Shock waves in mathematical models of the aorta", Trans. ASME, 05, pp 34-37.

Schlichting H. 1987, Boundary layer theory, Mc Graw Hill 1987

Verdonck P., Verhoeven R., Rieu R. & Pelissier R. 1995 "cardiovascular fluid dynamics II" cours COMETT II

Womersley J. R. 1955, Oscillatory Motion of a Viscous Liquid in a Thin- Walled Elastic Tube , Philosophical Magazine 1955, volume 46 pages 199-221

Yomosa S. 1987 "Solitary waves in large Blood Vessels", J Phys Soc Jap, Vol 56, No 2, pp 506 - 520.

Zagzoule M. J. Khalid- Naciri & J. Mauss 1991, Unsteady wall shear stress in a distensible tube, J. Biomechanics Vol 24, No 6, pp 435-439, 1991

Zagzoule M. & Marc- Vergnes J.-P 1986 "a global mathematical model of the cerebral circulation in man" J. Biomechanics Vol 19, No 12, pp 1015-1022, 1986

tuyau souple 35