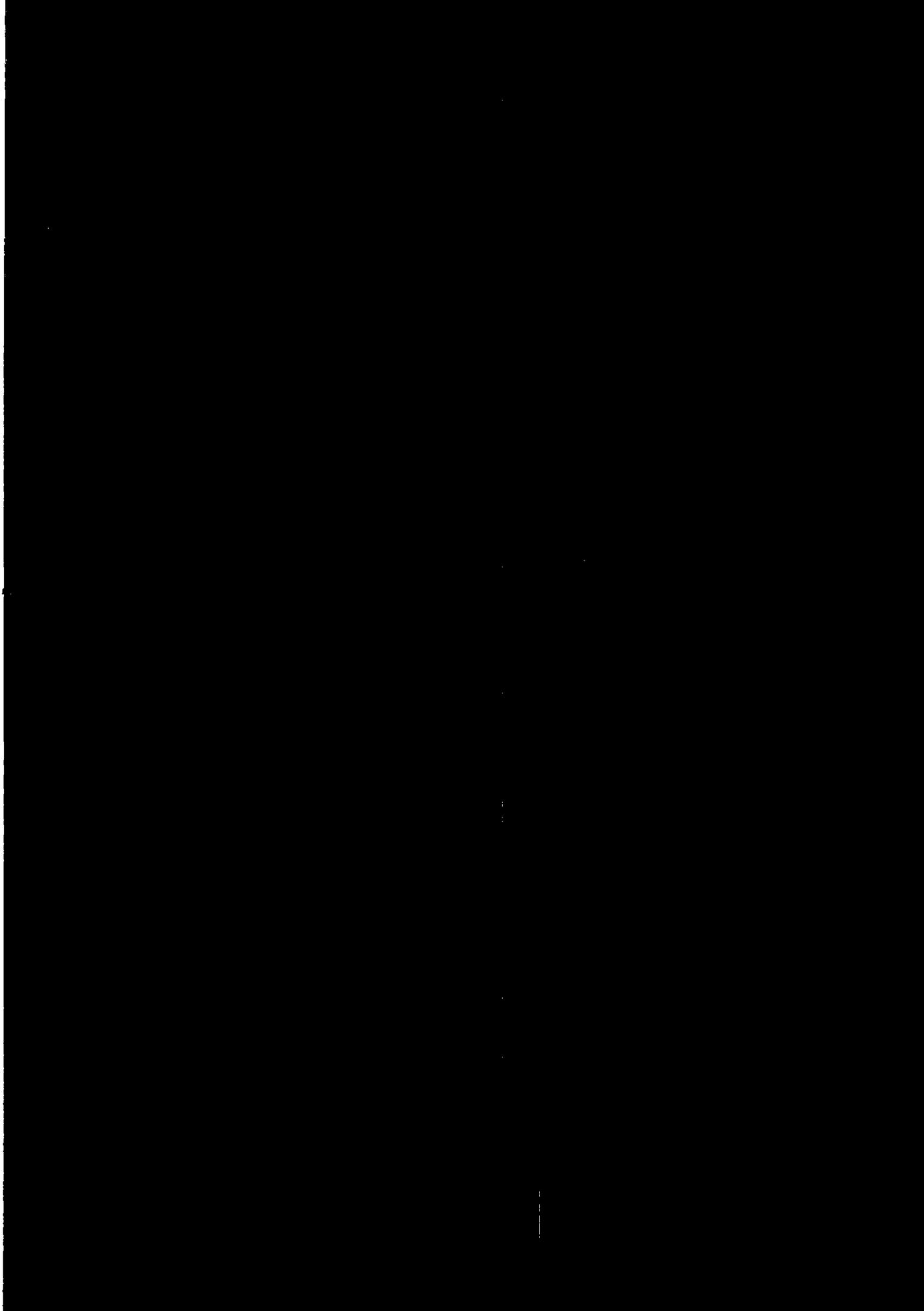


HYPersonISME

Une introduction à quelques problèmes

LAGRÉE Pierre-Yves

DEA de Mécanique 1986/87: Professeur M. GUIRAUD



I GENERALITES

- I.1. les faits, les observations:
- I.2. les hypothèses quant au Fluide:
- I.3. les équations - les approximations principales
- nouvelles coordonnées
- I.4. idées générales sur les lois en puissance:
 - I.4.1 La loi en puissance deux tiers ou Analogie de l'explosion forte
 - I.4.2 Le cadre NEWTONIEN
 - I.4.3 La loi en puissance $3/4$

II LE PROBLEME DE L'INTERACTION ENTRE LE FLUIDE VISQUEUX ET LE FLUIDE PARFAIT

- II.1 les équations du mouvement:
 - II.1.1 la région non visqueuse
 - II.1.2 le cas $1 > \Omega \geq 1/2$.la région visqueuse
 - II.1.3 la région de transition visqueuse
- II.2. Le cas $\Omega=1$.la région visqueuse
- II.3. le raccord de la température
- II.4. la zone de transition

Une application numérique
Liste des symboles
Bibliographie

I GENERALITES

I.1. les faits, les observations:

L'essor récent du développement des techniques aéronautiques et spatiales a fait surgir de nouveaux problèmes de Mécanique des Fluides. Ceux-ci sont surtout dus aux vitesses extrêmement élevées qui sont en jeu, et les phénomènes observés sont alors différents de ceux des écoulements "supersoniques", d'où le nom d'"hypersonisme". Le terme ne semble pas assez précis car il recouvre une grande variété de phénomènes, certains étant causés par ces vitesses élevées ($M \gg 1$) et d'autres causés par l'enthalpie incidente très élevée.

Le flot "hypersonique" est néanmoins caractérisé par une onde de choc très inclinée. Elle est très proche de l'engin se déplaçant à $M \gg 1$ quand celui-ci est "mince" (*Slender* en anglais). Dans la région se situant entre le corps et l'onde de choc, la vitesse est peu perturbée par rapport à celle du flot incident, par contre la pression, la densité et la température y sont très différentes.

Par contre, quand celui-ci est "émoussé" (*Blunt* en anglais) l'onde de choc est un peu plus éloignée de l'engin. Ce qui est particulier à ce cas, c'est l'existence d'une région subsonique derrière l'onde de choc quasi normale en avant du nez de l'engin, et de fait l'existence d'un point de stagnation.

En réalité tout corps mince est quelque peu émoussé au nez. Quand le nombre de Reynolds est très élevé on observe que ce léger émoussement, qui crée un choc localement très fort, donne naissance à un sillage au sein duquel l'entropie est très élevée (à cause de ce saut important d'entropie au nez). Ce sillage est mis en évidence car la densité y est plus faible. A nombre de Reynolds moins important, ce sillage est toujours observable mais il est cette fois principalement dû aux effets de viscosité. Les problèmes d'interaction entre cette couche et le reste de l'écoulement seront évoqués dans la partie II.

Dans la partie I seront rappelés quelques résultats quant aux écoulements hypersoniques.

I.2. les hypothèses pour le fluide:

Nous étudions le champ des vitesses d'un écoulement autour d'un objet que nous appellerons indifféremment corps, engin, ou navette... Mais nous nous intéresserons plus particulièrement à un demi-plan d'arête $z=0$, compris entre $y=0$ et $y=-d$, s'étendant entre $x=0$ et $x=+\infty$. Cette "plaque plane" sans incidence nous permet d'étudier un problème à deux dimensions x, y . Elle schématise un corps émoussé dont l'étendue d'émoussement est justement d .

Le gaz qui s'écoule est considéré comme parfait, (ne présentant aucun effet de dissipation) dans un domaine suffisamment éloigné du corps (que nous préciserons ultérieurement). Ailleurs (ie dans la "couche limite"), il est Newtonien de coefficient de viscosité volumique $K = (3\lambda + 2\mu) / 3$ nul.

Le gaz pour chaleurs spécifiques C_p et C_v constantes de rapport $\gamma = 0(1)$, le nombre de Prandtl noté Pr restera de l'ordre de 1 (pour l'air $Pr \approx 0,72$ à $\approx 20^\circ C$). Ces quantités varient avec la température qui peut atteindre lors de la rentrée dans l'atmosphère des valeurs de l'ordre de 2800K au point de stagnation du nez, mais la plupart des applications numériques de la littérature gardent ces valeurs. Le coefficient de viscosité μ s'écrit: $\mu_1 = \mu_\infty \mu = \mu_\infty T^\Omega$ où $1 > \Omega \geq 1/2$ (dans le cadre de la théorie cinétique des gaz de Boltzmann $\Omega = 1/2$). Rappelons que $Pr = \mu C_p / k$ par définition, et que la théorie cinétique prouve que $\mu / k \approx k_b / m$ (k_b constante de Boltzmann) et $\mu \approx \sqrt{(mk_b T)} / \sigma$ (σ étant la section efficace de collision binaire).

La plaque se déplaçant très vite par rapport au gaz au repos, sa vitesse U_∞ est très supérieure à la vitesse du son dans le gaz: c_∞ , le nombre de Mach est donc très supérieur à 1, U_∞ étant grand et la viscosité faible, le nombre de Reynolds $R = U_\infty L / \nu_\infty$ est très grand, donc $1/R$ est très petit, mais pas négligeable au voisinage de l'engin dans la "couche limite".

Le gaz sera supposé rester inerte, aucune réaction chimique ne se produisant en son sein, ni même à la paroi fortérée chaude. Or, en pratique, la surface de l'engin risque de fondre, et les températures élevées favorisent la dissociation de l'air.

Il faut résoudre les problèmes posés par l'élaboration de nouveaux alliages pouvant résister à des température extrêmes comme le Carbone-Carbone pour le nez ou le Tantale/Columbium (qui résiste à 1920K) ou les super-alliages au Cobalt (1260K) ou au Nickel (1140K).

L'air est constitué principalement de O_2 (1/5) et N_2 (4/5) ces concentrations varient assez peu jusqu'à des températures de l'ordre de 2500K, cependant de nouvelles espèces apparaissent: N, O, NO, e^- et différents anions et cations. Les degrés de liberté de rotation des molécules sont à cette température très excités. La dissociation de O_2 est notable à $T > 2500K$, et complète à $T \approx 5000K$, température de dissociation de N_2 , pour $T > 7000K$, l'ionisation des atomes devient importante. Pour étudier simplement ces types d'effets, on utilise le modèle de "LIGHTILL"; on applique au gaz A_2 en équilibre: ($A_2 \rightleftharpoons A + A$) les équations classiques de la cinétique chimique.

1.3. les équations - les approximations principales - nouvelles coordonnées

1.3.1 équations

L'écoulement est décrit par les équations de NAVIER STOKES classiques, qui seront simplifiées suivant les régimes.

Celles-ci restent valides tant que le nombre de Knudsen $K = l_{pm} / l$ $K \gg 1$; or ici la longueur intéressante est $l = \delta = L / \sqrt{R}$ (cf la théorie classique de la couche limite incompressible, que nous utilisons en première approximation) et $l_{pm} = m / \rho a^2 = \nu / c_\infty$ donc $K = \nu U / U c_\infty L = M / \sqrt{R}$ ce qui impose $M \ll \sqrt{R}$. Cette condition peut ne pas être tout à fait remplie au nez d'"Hermès" où M derrière le choc

En combinant ces flux il vient:

$$D(x)/2\rho_\infty u_\infty^2 = \int_{r^*}^x [(p/\rho_\infty u_\infty^2)(1/(\gamma-1) + (1-u_\infty/u) + \\ + \frac{1}{2}(v/u_\infty)^2(1 + ((u-u_\infty)/v)^2)] (\rho u/\rho_\infty u_\infty) dr - \\ - [\gamma(\gamma-1)M^2]^{-1} R \quad (4)$$

Ce résultat est appelé Intégrale de CHENG.

I.3.3 les simplifications:

I.3.3.1 la théorie des petites perturbations

α les corps minces et le paramètre de similitude K
(HSDT *hypersonic small disturbance theory*) (7) (14)

Appelons τ l'ordre de grandeur de l'angle entre les vecteurs vitesse en amont et sur l'obstacle.

On se place dans le cadre de la théorie des corps minces (*Slender* en anglais) $\tau \ll 1$. Or $M \gg 1$. Le groupement $M_\infty \sigma$ que nous appellerons K_∞ apparaît dans les relations de choc. Nous poserons pour l'instant $K_\infty = O(1)$. Posons de même $K = M_\infty \tau$, K est un paramètre de similitude; il nous permettra d'avoir accès à toute une classe d'écoulements pour M et τ variables à $M\tau = K$ fixé.

L'expression de $\tan \tau$ nous permet d'écrire, puisque τ et σ sont petits: $K = (2/(\gamma+1))(K_\infty - 1/K_\infty)$ à σ^2 près. D'où K_∞ en fonction de K : $K_\infty = K(\gamma+1)/4 + \sqrt{(K^2((\gamma+1)/4)^2 + 1}$

ou encore:

$$\frac{K_\infty - K}{K_\infty} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + 2 \frac{1}{\gamma+1} \frac{1}{K_\infty^2} \quad (5)$$

$K \ll 1$ nous donne la "linéarisation" (écoulements linéarisés voisins d'un écoulement uniforme H.P.P.)

$K \gg 1$ représente le choc fort.

Les équations de choc nous suggèrent que:

$$\begin{aligned} (u-U_\infty)/U_\infty &= O(\sigma^2(1+1/K_\infty^2)) \\ v/U_\infty &= O(\sigma(1+K_\infty^{-1})) \end{aligned} \quad (6)$$

pour la pression en substituant avec K ou K_∞ :

$$\frac{p-p_\infty}{p_\infty} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{K_\infty^2 - \gamma - 1}{\gamma+1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)K^2}{4} + \frac{\gamma K \sqrt{((\gamma+1)K)^2 + 1}}{4}$$

d'où si K petit:

$$(p-p_\infty)/\rho_\infty U_\infty^2 = O(1+K_\infty) \quad (7)$$

et si K grand:

$$(p-p_\infty)/\rho_\infty U_\infty^2 = O(K_\infty^2) \quad (8)$$

β Variables sans dimension

Cette expression des variables donne une idée de leur "mesure" et permet ainsi de les adimensionner

$$\begin{aligned} U-U_\infty/U_\infty &= u/U_\infty = U_\infty \tau^2 u' \\ v_\tau &= U_\infty \tau v_\tau' \\ p &= \rho_\infty U_\infty^2 \tau^2 p' = \gamma M_\infty^2 \tau^2 p_\infty p' \\ \rho &= \rho_\infty \rho' \\ x &= Lx' \quad y = L\tau y' \quad z = L\tau z' \end{aligned} \quad (9)$$

Avec ces hypothèses les équations D'EULER se transforment en:

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + U_\infty \partial/\partial x) \rho + \nabla_T \cdot \rho \underline{v}_T &= 0 \\ (\partial/\partial t + U_\infty \partial/\partial x) \rho \underline{v}_T + \underline{v}_T \cdot \nabla \rho \underline{v}_T + \nabla p &= 0 \\ (\partial/\partial t + U_\infty \partial/\partial x) \rho (e + v_T^2/2) + \nabla \cdot \rho (h + v_T^2/2) \underline{v}_T &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

L'indice T se réfère aux quantités transversales:

$$\underline{U} = \underline{U}_\infty + \underline{v}_T + O(\tau^2)$$

Intéressons nous maintenant au cas stationnaire $\partial/\partial t \equiv 0$.

7 loi intégrale de CHENG

L'intégrale () devient en négligeant les termes d'ordre 2:

$$\begin{aligned} D(x)/2\rho_\infty u_\infty^2 &= \int_{-x}^x [(\rho/\rho_\infty u_\infty^2) / (\gamma - 1) + \frac{1}{2}(\rho/\rho_\infty)(v/u_\infty)^2] dr - \\ &\quad - [\gamma(\gamma - 1)M^2]^{-1} R \\ &= D(0)/2\rho_\infty u_\infty^2 + \int_0^x p_b/\rho_\infty u_\infty^2 r'_b dx \end{aligned} \quad (11)$$

D a été remplacé par la somme de la traînée causée par le nez en 0, plus celle causée par la pente pour les autres valeurs de x

8 Analogie instationnaire de HAYES (7) (14) (24) (33)

Les termes d'ordre 2 dans l'expression de U étant supposés négligeables $U=U_\infty$, effectuons un changement de référentiel tel que celui-ci se déplace à la vitesse U_∞ . Dans ce repère, au premier ordre, il n'y a pas d'écoulement longitudinal.

Coupons par un plan π orthogonal à x, se déplaçant à la vitesse U_∞ venant de $-\infty$, et observons ce qui se passe dans ce plan. Tout semble alors se passer comme si ce plan π était seul et que l'écoulement transversal était créé par la déformation avec le temps $T=x/U_\infty$ de la section de l'obstacle par π (ce qui est juste au premier ordre $u=U_\infty$). L'intérêt immédiat est que l'on a une coordonnée de moins. Cela permet donc de simplifier les codes de calcul. Cette idée porte le nom d'analogie instationnaire de HAYES). On l'appelle aussi principe d'équivalence, la variation de la section du corps étant identifiée au mouvement d'un piston.

Mais pour que cette analogie soit correcte, il faut nous l'avons vu que τ^2 soit très petit, or, cela n'est possible partout que si le corps est partout très mince...

1.3.3.2 les corps émoussés - leur traînée dans le cadre "Newtonien" (7)

... Cette condition tombe en défaut quand il y a "émoussement". La description de ce qui se passe au nez émoussé de l'engin n'entre pas dans le cadre de la théorie précédente. Mais cette théorie reste valable en amont du nez là où le corps peut être à nouveau considéré comme mince. Le cas d'un engin aux bords d'attaque émoussés est en pratique le seul. Des bords arrondis permettent de mieux dissiper la chaleur lors d'une rentrée dans les hautes couches de l'atmosphère là où la navette est à une vitesse encore très proche de la vitesse de satellisation ($M=25$ à 300 km) et où elle est freinée. Un nez pointu fondrait rapidement et s'émousserait de toute façon!! En

amont donc le corps est de nouveau "mince". Soit:
 d la dimension caractéristique de l'érouissement
 L la longueur de l'engin
 τ son inclinaison typique.

La traînée causée par le nez vaut:

$$D_1 = C_a (1/2) \rho U^2 d$$

le reste de l'engin produit une traînée que nous allons estimer dans le cadre de la théorie Newtonienne qui donne effectivement de bons résultats quand $\gamma \rightarrow 1$. Sir Isaac NEWTON considérait les filets d'airs comme des rayons lumineux (causant une "ombre" hypersonique derrière l'engin), ces rayons sont absorbés par le corps "opaque". Nous allons donc calculer la pression, comme on calcule une pression de radiation. CHENG a une autre image; il compare le corps entouré de l'écoulement à un soc de charrue creusant son sillon dans la neige.

Soit une surface S inclinée d'un angle α par rapport à U_∞ , la surface normale aux "rayons" est $S \sin \alpha$. Il y a donc $[(\rho/m) \cdot S \cdot \sin \alpha \cdot U]$ collisions par seconde et par unité de longueur transverse. Le nombre de molécules incidentes pendant un temps δt est $[(\rho/m) \cdot S \cdot \sin \alpha \cdot U] \delta t$. Les collisions étant inélastiques, la variation de quantité de mouvement est:

$$\Delta P = [(\rho/m) S U \sin \alpha] m U \sin \alpha$$

d'où une pression $p = \Delta P / (\delta t \cdot S)$

$$p = \rho U^2 \sin^2 \alpha. \text{ Formule de NEWTON} \quad (12)$$

Or pour $M \rightarrow \infty$ les formules de choc donnent $p = (2/(\gamma+1)) \rho U^2 \sin^2 \sigma$ et $\cot \alpha = \tan \sigma ((\gamma+1)/(2 \sin^2 \sigma) - 1)$ si on fait $\gamma=1$ $\cot \alpha = \cot \sigma$. Donc pour $M \rightarrow \infty$ et $\gamma=1$ l'onde de choc arrive en coïncidence avec le corps et la pression est celle calculée par la formule de Newton.

Avec cette formule simplifiée on peut estimer la traînée du corps sans nez: $p \cdot L \sin \alpha$ avec $\sin \alpha \approx \alpha$ donc $D_2 = (1/2) \alpha^2 \rho U^2 L \alpha$. Formons le rapport D_1/D_2 . La force agissant sur le corps et celle agissant sur le nez sont de même ordre de grandeur si $d/L \approx \alpha^2 / C_a$ avec $C_a = O(1)$.

Autrement dit un léger érouissement peut perturber le flot dans des régions dont les dimensions sont des centaines ou des milliers de fois plus grandes que le nez.

1.3.4 Les Coordonnées de VON MISES

Les coordonnées cartésiennes (x,y) sont mal adaptées à l'étude des écoulements. Des coordonnées plus "naturelles" leur sont substituées: (x,ψ). La première est ks que nous noterons x pour des raisons pratiques, (il n'y a aucune confusion à craindre) la seconde est ψ la fonction de courant qui offre bien des avantages notamment pour les lois de conservation le long des lignes de courant. (x,ψ) sont les variables de VON-MISES:

$$d\psi = \rho u dy - \rho v dx \quad (13)$$

$$x) \psi = \text{const} = X) y = \text{const} \quad (14)$$

En écrivant le Jacobien de la transformation on trouve que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \rho = \frac{\partial}{\partial x} \rho_{\infty} - \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \rho u \frac{\partial}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (15)$$

ainsi $\underline{U} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x}$

Les équations d'EULER se transforment en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial (\rho^{-1})}{\partial x} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho v \frac{\partial p}{\partial \psi} \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} &= -\rho u \frac{\partial p}{\partial \psi} \\ \rho u \frac{\partial (p \rho^{-\gamma})}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

La condition pour ψ sur le choc se formule; si l'équation du choc s'écrit $y=Y(x)$, en: $\psi = \rho_{\infty} U_{\infty} Y(x)$ sur le choc (en effet avant le choc $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho_{\infty} U_{\infty}$ donc $\psi = \rho_{\infty} U_{\infty} y$ la constante d'intégration est prise nulle). Avec ce choix, l'équation du corps est $\psi=0$ pour tout x (on retrouve ainsi que $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ sur le corps, ie la vitesse normale est nulle).

Ces variables sont bien adaptées au problème "inverse". Ce problème est tel que l'on se donne l'équation du choc *a priori* et on cherche ensuite l'équation de la surface de l'engin $\psi=0$. Ce type de calcul est analytiquement plus simple que le problème "direct". L'onde de choc est choisie de forme la plus simple et réaliste possible, par ex VAN DYKE choisit une onde hyperbolique et trouve un corps qui "ressemble" à un cône émoussé. L'équation est maintes fois posée: $Y(x) \propto x^n$ avec $n \in \mathbb{R}$ et $1 \geq n$. Cette hypothèse n'est pas aussi simpliste qu'elle en a l'air, et est au contraire très féconde. Elle est vérifiée par l'expérience lorsque l'on est loin du nez; en ce cas $n=2/3$, et aussi assez près, mais pas trop, du nez; en ce cas $n=3/4$.

I.4. idées générales sur les lois en puissance: (24)

L'équation du choc s'écrit

$$\begin{aligned} R'(x') &= C x'^m \quad \text{sous forme dimensionnée (')} \text{ ou:} \\ R(x) &= R'/L = C L^{m-1} (x'/L)^m \end{aligned}$$

on pose $\delta = C L^{m-1} \ll 1$ car l'onde de choc est très inclinée. δ est le petit paramètre qui permet l'adimensionalisation (δ joue le rôle de τ dans ()).

Les équations d'Euler deviennent sous forme adimensionnée à $O(\delta^2)$ près

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0 \\ (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}) s &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Bernoulli:

$$u + \frac{1}{2} v^2 + \frac{c^2}{\gamma} - 1 = [(\gamma - 1) M^2 \delta^2]^{-1} \quad (18)$$

Conditions aux limites:

$$v_b = r_b' \quad \text{sur le corps (Body)}$$

$$u_{\infty}, v_{\infty}, \text{ nuls } \rho_{\infty} = 1 \quad p_{\infty} = 1/(\gamma - 1) M^2 \delta^2 = 0 \quad \text{à } M_{\infty} = \infty$$

A l'ordre 0 en $1/M^2 \delta^2$ les équations du choc deviennent:

$$\begin{aligned}
p_m &= 2R'^2 / \gamma - 1 & (\text{ici } ' \equiv d/dx) \\
\rho_m &= (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \\
v_m &= 2R' / \gamma + 1
\end{aligned}
\tag{19}$$

R' apparaît ainsi de manière isolée. De nouvelles variables sont alors introduites

$$ksi = x \quad \& \quad \text{éta} = \eta = y/x^m$$

η varie entre zéro et un du corps au choc. Les relations de choc incitent alors à poser:

$$\begin{aligned}
p &= m^2 x^{2(m-2)} P(\eta) \\
\rho &= R(\eta) \\
v &= m x^{m-1} V(\eta)
\end{aligned}
\tag{20}$$

avec des conditions aux limites immédiates. La substitution donne $' \equiv d/d\eta$:

$$\begin{aligned}
(V - \eta)R' + RV' + RV/\eta &= 0 \\
(V - \eta)V' + p'/R - (1/m - 1)V &= 0 \\
(V - \eta)(P'/P + \gamma R'/R) - (1/m - 1) &= 0
\end{aligned}
\tag{21}$$

Ce changement de variable a permis de transformer un système d'équations différentielles aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires. Ce type de solutions est dit 'self Similar' en anglais ou traduit du russe au français par automodèle. Ces solutions peuvent aussi s'interpréter comme étant invariantes par le groupe continu de transformation $y = x^m$.

1.4.1 La loi en puissance deux tiers ou Analogie de l'explosion forte

1.4.1.1 Utilisation du π -Théorème (2e)

Plaçons nous dans la partie que l'on peut considérer comme non visqueuse de l'écoulement, les quantités dont nous disposons sont C_p , C_v , x , d , ρ , p_1 , U , D (la traînée), la portance est nulle par symétrie. Nous avons 8 quantités dimensionnées; pour les décrire il faut les 4 unités masse M , longueur L , temps T , ainsi que la température θ , appliquons le π -Théorème (théorème des produits de puissances), il y a donc $8 - 4 = 4$ nombres sans dimension que l'on peut former avec ces quantités. Les plus évidents sont:

$$\gamma = C_p / C_v$$

$$M = U / \sqrt{\gamma p_1 / \rho}$$

puis comme $[D] \equiv [\text{pression}] * L$ (nous sommes toujours en 2D) donc:

pr/D est sans dimension, enfin;

$$p_1^{3/2} (x/U) \rho^{-1/2} / D$$

Si le corps est une plaque plane, $D = C_d \rho U^2 d / 2$, on substitue dans les équations ci dessus et on trouve alors que le flot ne dépend que des groupements γ ; $(x/d)(C_d M^2)^{-1}$; $(r/d)(C_d M^2)^{-1}$;

l'onde de choc peut donc être écrite sous la forme

$$r_{choc} / (d C_d M^2) = R(\gamma, x / (d C_d M^2)) \tag{22}$$

la pression:

$$\hat{p}/p_1 = P(\gamma, x/(dC_a M^2)) \quad (23)$$

Les fonctions R, et P restent à déterminer. Plaçons nous à M "infini", M n'est plus alors un paramètre déterminant [on retrouve ainsi le principe d'indépendance, vis à vis du nombre de Mach: les caractéristiques de deux écoulements pour deux nombres de Mach élevés sont identiques (indépendantes de M)]. La contre pression est alors très faible (puisque $p_1 \propto M^{-2}$), en éliminant M entre les relations, et en mesurant \hat{p} avec ρU^2 :

$$\hat{p}/\rho U^2 = F(\gamma) C_a^{2/3} (x/d)^{-2/3} \quad (24)$$

$$r_{choc}/d = G(\gamma) C_a^{1/3} (x/d)^{2/3} \quad (25)$$

Les fonctions F et G ne pouvant être obtenues que par résolution exacte. On trouve alors pour $\gamma=1,4$ $F \approx 0,3$ $G \approx 0,8$

1.4.1.2 L'explosion forte (20) (14) (10) (24)

Cette approche fut en fait celle de SEDOV lorsqu'il résolut le problème de l'explosion forte. Car l'écoulement Hypersonique autour d'un corps de pente nulle est analogue au problème de l'explosion forte résolu antérieurement et indépendamment par SEDOV et TAYLOR.

La solution de SEDOV est fondée sur le π -Théorème et ce qui est écrit plus haut s'en inspire directement en remarquant que:

$x/U_\infty \leftrightarrow t$ le temps
 $y \leftrightarrow r$ coordonnée d'espace
 $D \leftrightarrow E$ énergie de l'explosion par unité de surface

SEDOV forme la variable $\lambda = A r t^{-k}$, où A est une constante dimensionnée construite avec les données du problème

$$\begin{aligned} v &= r/t \quad V(\lambda) \\ \rho &= \rho_\infty \quad R(\lambda) \\ p &= \rho_\infty (r/t)^2 P(\lambda) \end{aligned} \quad (26)$$

avec la variable λ l'équation de continuité, par exemple devient:

$$\lambda [V' + (V-k)R'/R] = -V \quad (27)$$

etc... pour la quantité de mouvement et l'énergie

Cette écriture est légèrement différente du système (21) du choc en puissance de x ; mais on passe de l'un à l'autre en écrivant:

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda \\ V &= mV/\eta \\ P &= m^2 P/\eta^2 \\ R &= R \end{aligned} \quad (28)$$

En posant $z = \gamma P/R$ SEDOV trouve un système de la forme:
 $dz/dV = f(z, V)$ équation différentielle unique, puis
 $d\lambda/\lambda dV = g(V, z)$
 $\lambda/R dR/d\lambda = h(V, z)$ (29)

Le cas où $k=2/3$ est intéressant car il correspond à la conservation de l'énergie entre deux surfaces mobiles:

$$E = \int_{x'}^{x''} \rho (\frac{1}{2} v^2 + e) dr = \text{constante} \quad (30)$$

(expression à rapprocher de l'intégrale de CHENG (11) pour $M=\infty$)

Cela permet à SEDOV de résoudre complètement le cas de l'explosion forte où:

$$\lambda = r(E/\rho)^{-1/3} t^{2/3} \quad k=2/3 \quad (31)$$

En substituant dans la solution de SEDOV la température aux abords du corps ($r \rightarrow 0$) devient:

$$CvT \approx f(\gamma) (C_a U^2 (x/d)^b (r/d)^c) \quad (32)$$

avec $a = (2\gamma - 1)/3(\gamma - 1)$ $b = (2/3)((2 - \gamma)/(\gamma - 1))$ $c = -(\gamma - 1)^{-1}$.

1.4.1.3 validité (1^o)

Nous avons déjà vu que l'HSDT dépend du petit paramètre τ^2 . Ce qui signifie que la pente du corps doit être très petite. Si elle est trop grande elle "chasse" l'air transversalement, et on retrouve l'analogie de piston.

$$k=2/3$$

$$r' = f C^{1/3} k (x/d)^{k-1} \approx \sigma \quad f C^{1/3} = O(1)$$

l'angle de l'onde de choc σ doit rester très supérieur à τ pour que le corps semble "plat": donc $(k(x/c)^{k-1})^2 \gg \tau^2$

Le fait que $M=\infty$ assurait une contre-pression nulle, mais cette approximation tombe en défaut si

$$\rho_\infty U_\infty^2 (\tau/r')^2 \approx p_\infty = \rho_\infty U_\infty^2 / \gamma M_\infty^2 \quad \text{ou} \quad (M_\infty \tau)^{-2} \approx 1 \Rightarrow$$

$$(M\tau)^{-3} \gg x/d \gg \tau^{-3}$$

1.4.2 Le cadre NEWTONIEN

1.4.2.1 formule de NEWTON BUSEMAN (?) (2^o)

Cette approche utilise le cadre Newtonien déjà effleuré.

Il a été vu que pour $\gamma=1$ et $M=\infty$, l'onde de choc est infiniment mince et τ infiniment grand, la pression sur l'onde de choc et sur la surface du corps coïncident. Or les particules défléchies par l'engin glissent sur celui-ci dont le rayon va croissant. De fait les particules sont soumises à une force "centrifuge" contrebalancée par un gradient de pression: donc p_∞ est différent en réalité de p_{corps} . La pression est ainsi corrigée.

L'équilibre transverse s'écrit:

$$dp = \rho u^2 dn/R$$

n coordonnée normale, R rayon de courbure $R = -dr/\sin\alpha d\alpha$

Grâce à la conservation de la masse, et à la conservation de la composante tangentielle de la vitesse on en déduit que:

$$p = \rho U_\infty^2 \sin \alpha \int_{x_0}^x \cos \alpha \, dS \quad (33)$$

ajouté à la formule de NEWTON (12), cela donne la formule de NEWTON-BUSEMAN.

Dans le cas d'un corps mince $\cos \alpha \approx 1$ $\sin \alpha \approx Y'_\infty$ cette formule devient:

$$p = \rho U_\infty^2 (Y_\infty'^2 + Y_\infty Y_\infty'') \quad (34)$$

formule de NEWTON-BUSEMAN simplifiée

1.4.2.2 utilisation (e) (14)

Les équations de conservation de masse et d'énergie:

$$(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}) \rho = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}) \text{Log} p = \gamma (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}) \text{Log} \rho$$

en éliminant ρ entre ces deux équations et puisque $u \approx U_\infty$ et que sur le corps $v/u = Y_b'$ (glissement)

$$v/u = Y_b' + (Y_b - y) / \gamma \, d \text{Log} p / dx$$

or $v/u = dy/dx$

et après intégration:

$$((y - Y_b)^\gamma) p_b = \text{constante dépendant de la ligne de courant.}$$

Par hypothèse $\gamma = 1 + \epsilon \, \epsilon \rightarrow 0$, l'expression devient en $y = Y_\infty$

$$(Y_\infty - Y_b) (Y_\infty Y_\infty')' = \text{CSTE}$$

L'expression de la traînée va permettre de trouver cette constante:

Les relations intégrales (11) s'écrivent ici:

$$D = D_n / 2 + \int_0^x \rho p Y' \, dx$$

$$\approx D_n / 2 + 0$$

$\approx \int_{Y_b}^{Y_\infty} \rho p / (\gamma - 1) \, dy = \epsilon^{-1} p (Y_\infty - Y_b)$ au premier ordre en $1/\epsilon$

d'où

$$(Y_\infty - Y_b) (Y_\infty Y_\infty')' = \epsilon D_n / \rho U_\infty^2 \quad (35)$$

ce qui détermine la constante précédente. En posant $Y_\infty = Ax^n$, $Y_b = 0$, on retrouve l'analogie de l'explosion forte:

$$n = 2/3$$

$$A = \frac{3}{2} \sqrt{9\epsilon/4} \, C_d^{1/3}$$

1.4.3 La loi en puissance 3/4

Une autre forme de choc caractéristique est le choc en $x^{3/4}$ qui apparaît lorsque l'on tient compte de la viscosité.

Avant d'exposer ces méthodes rappelons les principales équations de théorie de la couche limite compressible à grand nombre de Mach (17) (25) (31)

Reprenons les valeurs sans dimension x' y' p' ρ' v' et $u' = u/U_\infty$ (vitesse selon Ox et non plus sa perturbation) posons de plus $\mu' = \mu/\mu_\infty$ $h' = 2h/U_\infty^2$ (enthalpie) et $H' = h' + \frac{1}{2}u'^2$.

Substituons dans les équations de NAVIER STOKES et conservons les termes aux ordres 0 et 1 en $1/R\tau^2$

Enlevons les 'primés' en gardant à l'esprit le fait que l'on travaille maintenant sans dimensions:

$$\begin{aligned} \rho(u\partial/\partial x + v\partial/\partial y) &= 0 \\ \rho(u\partial/\partial x + v\partial/\partial y)u &= \rho_\infty u_\infty du_\infty/dx + (1/R\tau^2) \partial(\rho\partial u/\partial y)/\partial y \\ p &= ((\gamma-1)/2\gamma)(\rho h/\tau^2) \\ \rho(u\partial/\partial x + v\partial/\partial y)H &= (1/R\tau^2) (\partial/\partial y) [(\rho/\sigma)(\partial H/\partial y + (\sigma-1)\partial u^2/\partial y)] \end{aligned} \quad (36)$$

L'indice ∞ représente les quantités à la lisière de la couche limite (edge en anglais)

posons comme nouvelles variables:

$$\begin{aligned} ks_i \equiv x &\equiv \int_0^x C \rho u_\infty dx \quad \text{en supposant } \mu = CT \\ \epsilon ta \equiv \eta &\equiv \sqrt{R} \left(\int_0^\eta \rho dy \right) / \sqrt{ks_i} \end{aligned}$$

ce changement de variable permet de coïncider avec celui, classique, du cadre incompressible.

$$\begin{aligned} \text{et } u/u_\infty &= \partial f(x, \eta) / \partial \eta = f' \\ H/H_\infty &= g(x, \eta) \end{aligned} \quad (37)$$

Les solutions sont ensuite recherchées sous forme *Auto Similaire*

1.4.3.1 approche heuristique Hayes & Probstein⁽¹⁷⁾

Plaçons nous à la lisière de la couche limite, et écrivons que les termes visqueux et inertiels sont du même ordre de grandeur:

$$\begin{aligned} \rho U U/x &\approx \mu U/\delta^2 \Rightarrow \delta^2 \approx \mu x / \rho U \\ \delta^2 &\approx (\mu/\mu_\infty) (P_\infty/P) (T/T_\infty) (\mu_\infty x / \rho_\infty U) \end{aligned}$$

supposons que $\mu/\mu_\infty = CT/T_\infty$ (prendre T^∞ ne change pas fondamentalement ce petit calcul)

D'après la loi de Crocco: $T/T_\infty \approx M^2$ (intégrale de la conservation de l'énergie, résultat de la théorie de la couche limite compressible⁽²¹⁾) résultat que nous allons retrouver au paragraphe suivant sous la forme $h/h_\infty \approx M^2$) et $P/P_\infty \approx M^2 \theta^2$ d'après les relations de choc fort lorsque $K = M\theta \gg 1$. Nous étudions une plaque plane surmontée d'une couche limite qui forme un corps "équivalent" $\theta \approx \delta/x$ (on utilise le concept d'épaisseur de déplacement, comme en incompressible) d'où:

$$\delta/x \approx \sqrt{(M\sqrt{C}/\sqrt{R_\infty})} \text{ donc } \delta/x \propto x^{-1/4}$$

δ est donc en puissance de 3/4 si on pose $X = M^3 \sqrt{(C/R_\infty)}$, en appelant X paramètre d'interaction on a:

$$\delta/x \approx (1/M) \sqrt{X} \quad (38)$$

1.4.3.2 approche de HIRELS ELLINWOOD (25)

repreons les équations (), dans le cas du choc fort $M \gg 1 \Rightarrow H_\infty/h_\infty \approx (\gamma-1)M^2/2$ en remarquant que

$$h/h_\infty - f'^2 = ((h+f'^2/2)/h_\infty) - f'^2 (1+1/2h_\infty) = (H_\infty/h_\infty)(g-f'^2) \text{ donc}$$

$$h/h_\infty \approx (\gamma-1)M^2/2 (g-f'^2)$$

$h/h_\infty = \rho_\infty/\rho_\infty$ or il n'y a pas de gradient de pression transversal à l'ordre d'approximation choisi:

$$\rho_\infty/\rho_\infty \approx (\gamma-1)M^2/2 (g-f'^2) \quad (39)$$

les variables sont telles que

$$dy = d\eta / \sqrt{R (\gamma-1)M^2/2 (g-f'^2) / \rho_\infty} \quad \sqrt{ksi}$$

$$dy = d\eta / \sqrt{R (\gamma-1) u_\infty / \gamma p_\infty (g-f'^2)} \quad \sqrt{ksi}$$

$$\delta \propto I (\int p_\infty dx) / p_\infty$$

$$I = \int (g-f'^2) d\eta$$

comme $\rho \propto x^{2n-2}$ (par auto-similarité)
avec $\delta \propto x^n$ épaisseur de la couche limite:

$$x^n \propto (\int x^{2n-1}) x^{2-2n}$$

$$\Rightarrow n = 3/4$$

approche de BUSH (26)

l'équation de continuité s'écrit en variables de VON MISES, pour un gaz parfait:

$$\partial(v/u) / \partial\psi = \partial(T/pu) / \partial x \quad (40)$$

Si les solutions sont recherchées sous une forme "auto semblable" derrière l'onde de choc $\psi = x^n$:

$$u = U(\zeta) \quad v = x^{n-1} V(\zeta)$$

$$T = \Theta(\zeta) \quad p = x^{2n-1} P_0$$

avec $\zeta = \psi / \sqrt{(xP/P_0)}$ comme nouvelle variable

$$\zeta = x^m \psi \quad m = 1/2 - n$$

$$\partial/\partial x = \partial/\partial x + m\zeta \partial/\partial \zeta$$

$$\partial/\partial \psi = x^n \partial/\partial \zeta$$

après substitution:

$$x^{m+n-1} [\partial(V/U) \partial \zeta] = [P_0^{-1} 2(1-n)\Theta/U + n\zeta \partial(\Theta/U) \partial \zeta] x^{2(1-n)-1}$$

Ce qui impose par égalité des exposants de x ; $n = 3/4$. La partie II va être consacrée aux ondes de choc de ce type, et aux problèmes d'interactions entre les parties visqueuses et non visqueuses de l'écoulement.

II LE PROBLEME DE L'INTERACTION ENTRE LE FLUIDE VISQUEUX ET LE FLUIDE PARFAIT

introduction

Comme nous le savons déjà il existe près de la paroi une couche mince d'épaisseur δ où la température est élevée, la densité faible et le gradient de pression transverse faible (elle est donc bien définie physiquement). Nous allons examiner au moyen des techniques de "couche limite" comment se comporte la température lorsque l'on traverse cette couche pour aboutir dans la région non visqueuse et dominée par le choc. Nous suivons pour cela la démarche de BUSH (2), puis de LEE & CHENG (21), de STEWARTSON (22) ainsi que de CHENG (23).

Hypothèses

Nous nous intéressons bien sur au cas $M_\infty^2 \gg 1$ $R \gg 1$ avec de plus les hypothèses du choc fort. Le gaz est choisi parfait ($P/P_\infty = T/T_\infty = \rho/\rho_\infty$). Le coefficient de viscosité μ s'écrit: $\mu_1 = \mu_\infty \mu = \mu_\infty T^\Omega$ où $1 > \Omega \geq 1/2$ dans un premier temps puis dans un second temps $\Omega = 1$. Les résultats sont en effet distincts. Le premier cas nécessite l'introduction d'une région de transition visqueux / non visqueux afin de raccorder les solutions "intérieures et extérieures". Dans le second cas, le raccord ne paraît pas non plus possible au premier ordre, mais nous verrons que la solution est contenue dans les termes du second ordre qui ne pouvaient pas être négligés.

Plaçons nous à une distance L du bord émoussé de la plaque plane. L sera notre nouvelle unité de mesure longitudinale.

Écrivons que la lisière de la couche limite a pour équation $y = \delta Y_b(x)$, plus loin du corps s'étend l'onde de choc $y = \delta Y_{sh}(x)$, avec bien sur $Y_{sh}(x) > Y_b(x)$; entre les deux se trouve la zone où l'écoulement peut être considéré comme non-visqueux et où l'on peut appliquer l'HSST (Hypersonic small disturbance theory) car la couche limite se comporte comme un corps mince d'épaisseur de déplacement δ .

Il faut poser ϵ petit paramètre tel que $\epsilon = \delta/L$

Les variables de Von Mises désormais classiques sont utilisées.

II.1 les équations du mouvement: (2)

on écrit toute quantité physique sous la forme générique;

$$Q^* = Q_\infty Q$$

avec comme grandeurs sans dimension classiques:

$$M^2 = (\rho_\infty U_\infty^2) / (\rho_\infty p_\infty)$$

$$R = U_\infty L / \nu$$

$$Pr = \nu \rho_\infty C_p / k$$

les équations de NAVIER STOKES vont s'écrire en variables de VON MISES, c'est à dire que pour les dérivations:

$$\begin{aligned} \partial/\partial x &= \partial/\partial x - \rho v \partial/\partial y \\ \partial/\partial y &= \rho u \partial/\partial \psi \\ \underline{U} \cdot \nabla &= u \partial/\partial x \end{aligned} \quad (1)$$

Intéressons nous par exemple à l'équation de l'énergie sous la forme classique:

$$\rho T u_i \partial_i s = \tau_{ij} D_{ij} - q_{i,i} \quad (2)$$

les dimensions de ces quantités sont, $Q^* = QQ_\infty$:

$$\begin{aligned} [\tau_{ij} D_{ij}] &\equiv \mu_\infty U_\infty^2 / L^2 \\ [q_{i,i}] &\equiv \mu_\infty C_p T_\infty L^{-2} Pr^{-1} \\ [\rho T u_i \partial_i s] &= \rho_\infty T_\infty U_\infty L^{-1} [s] \end{aligned}$$

L'entropie en variables p T:

$$s/C_p = ((1-\gamma)/\gamma) \text{Log} p/p_0 + \text{Log} T/T_0 \quad (3)$$

donc $[s] \equiv C_p$

or $\gamma = C_p/C_v$ et d'après la relation de MEYER $C_p - C_v = p_\infty/\rho_\infty T_\infty$
donc $C_p = \gamma/(\gamma-1) \cdot (p_\infty/\rho_\infty T_\infty)$

en divisant (2) par $\rho_\infty T_\infty U_\infty L^{-1} C_p$ et en utilisant (1)

le produit contracté des tenseurs $D_{ij} \tau_{ij}$ s'écrit:

$$\begin{aligned} D_{ij} \tau_{ij} &= [((\gamma-1)/\gamma) \gamma M^2 T_\infty^2 / R] \cdot [(\rho u \partial u / \partial \psi + (\partial v / \partial x - \rho v \partial v / \partial y))^2 + \\ &\quad + 2((\partial u / \partial x - \rho v \partial u / \partial \psi)^2 + (\rho u \partial v / \partial \psi)^2) - \\ &\quad - (2/3)((\partial u / \partial x - \rho v \partial u / \partial \psi)^2)] \end{aligned} \quad (4)$$

la divergence du flux de chaleur s'écrit:

$$\begin{aligned} q_{i,i} &= (1/Pr) [\rho u \partial (T_\infty^2 \rho u \partial T / \partial \psi) / \partial \psi + \\ &\quad + (\partial / \partial x - \rho v \partial / \partial y) (T_\infty^2 (\partial / \partial x - \rho v \partial / \partial y) T)] \end{aligned} \quad (5)$$

la variation totale d'entropie s'écrit:

$$\rho T ds/dt = \rho u \partial T / \partial x - ((\gamma-1)/\gamma) u \partial p / \partial x \quad (6)$$

En regroupant (4) (5) (6) selon (2) on obtient l'équation complète.

II.1.1 la région non visqueuse

Les variables adaptées à cette zone sont $x_n = x$ et $\psi_n = \psi/\epsilon$
Et ainsi que nous le vîmes au I.3.3.1 β :

$$\begin{aligned} u &= 1 + \epsilon^2 u_n(x_n, \psi_n) + \dots \\ v &= \epsilon v_n(x_n, \psi_n) + \dots \\ p &= \gamma M^2 \epsilon^2 p_n(x_n, \psi_n) + \dots \\ T &= \gamma M^2 \epsilon^2 T_n(x_n, \psi_n) + \dots \\ \rho &= \rho_n(x_n, \psi_n) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

La solution est cherchée sous forme "Auto Similaire" associée à un choc en loi de puissance $\psi_n = x_n^\beta$

les nouvelles variables seront: x_n et $\zeta_n = \psi_n/x_n^\beta$
Avec ζ variant entre 0 et 1.

Les relations de choc conduisent à poser :

$$\begin{aligned} p_h &= x_h^{-2(1-n)} P_h(\zeta_h) \\ T_h &= x_h^{-2(1-n)} \theta_h(\zeta_h) \\ \rho_h &= D_h(\zeta_h) \\ u_h &= x_h^{-2(1-n)} U_h(\zeta_h) \\ v_h &= x_h^{-1+n} V_h(\zeta_h) \end{aligned} \quad (8)$$

Faisons tendre ζ vers 0, on a :

$$\begin{aligned} p_h &= x_h^{-2(1-n)} P_0 \\ v_h &= x_h^{-1+n} V_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Les quantités P_0 V_0 θ_0 sont connues par la résolution des équations différentielles vérifiées par P_h V_h θ_h D_h obtenues après substitution de p_h v_h T_h ρ_h dans les équations de NAVIERS STOKES, à la première approximation (EULER), ce sont les équations (16) du I°. La conservation de l'énergie se formulant plutôt :

$$\rho_h \partial T_h / \partial x_h - (1-1/\gamma) \partial p_h / \partial x_h = 0 \quad (10)$$

Or quand ζ tend vers 0 à x constant : $\psi \rightarrow 0$ et comme, d'après (10), l'entropie se conserve le long d'une ligne de courant

$$p_h \rho_h^{-\gamma} = P_h(1) D_h(1)^{-\gamma} x_h^{-2(1-n)} \quad g = \gamma$$

Ce qui fournit le comportement de la température $T = P/\rho$:

$$T = \theta_0 x_h^a \psi_h^b \quad (11)$$

où $a = -2(1-n)(\gamma-1)/\gamma$ $b = -2(1-n)/(n\gamma)$

La valeur correcte pour n , comme nous le savons et comme nous le retrouverons au prochain paragraphe est $3/4$.

T se comporte donc, pour ψ , en ψ^b $b = -2/(3\gamma)$

La température est infiniment grande à la surface du corps !

Voyons maintenant dans la couche limite comment se comporte la température.

II.1.2 le cas $1 > \Omega \geq 1/2$: la région visqueuse

nouvelles variables

Plaçons nous dans la région visqueuse, la température y est très élevée, la densité faible.

Le changement de variable

$$x_b = x \quad \psi_b = \psi / \epsilon^3$$

$$u = u_b \quad v = \epsilon v_b \quad p = \gamma M^2 \epsilon^2 p_b \quad T = \gamma M^2 T_b \quad \rho = \epsilon^2 \rho_b$$

suit la démarche de VAN DYKE et semble le plus approprié,

les quantités au sein de la couche limite doivent se raccorder de manière à ce que, puisque lorsque $\psi \rightarrow 0$:

$$u \rightarrow 1 \quad v \rightarrow \epsilon x^{n-1} V_0 \quad p \rightarrow \gamma M^2 \epsilon^2 x^{2n-1} P_0 \quad (12)$$

$$u_b \rightarrow 1 \quad v_b \rightarrow x_b^{n-1} V_0 \quad p_b \rightarrow x_b^{2n-1} P_0 \quad \text{pour } \psi_b \rightarrow 0$$

les équations

Au premier ordre les équations du mouvement s'écrivent:

$$\partial(v_b/u_b)/\partial y_b = \partial(T_b/p_b/\rho_b)/\partial x_b \quad \partial p_b/\partial y_b = 0 \quad (13)$$

$$u_b \partial u_b/\partial x_b + p_b^{-1} T_b dp_b/dx_b = \\ = [(\gamma M^2)^\alpha / (R \epsilon^4)] p_b u_b \partial(u_b T_b^{\alpha-1} \partial u_b/\partial y_b)/\partial y_b \quad (14)$$

$$\partial T_b/\partial x_b - ((\gamma-1)/\gamma) p_b^{-1} (dp_b/dx_b) T_b = \\ = [(\gamma M^2)^\alpha / (R \epsilon^4)] p_b [Pr^{-1} \partial(u_b T_b^{\alpha-1} \partial u_b/\partial y_b)/\partial y_b + \\ + ((\gamma-1)/\gamma) u_b T_b^{\alpha-1} (\partial u_b/\partial y_b)^2] \quad (15)$$

le paramètre d'interaction X

Le terme en facteur des termes de viscosité et de conduction de chaleur doit être $O(1)$ pour les conserver.

$$(\gamma M^2)^\alpha / (R \epsilon^4) = 1 \quad \text{disons}$$

$$\Rightarrow \delta/L = \epsilon = [(\gamma M^2)^\alpha / R]^{1/4}$$

or l'hypothèse du choc fort est:

$$M^2 \epsilon^2 \gg 1$$

en substituant ϵ :

$$[(\gamma M^2)^{2+\alpha} / R]^{1/2} \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad X \gg 1 \quad (16)$$

Le paramètre d'interaction $X = [(\gamma M^2)^{2+\alpha} / R]^{1/2}$ déjà invoqué réapparaît. On comprend maintenant mieux son rôle. Comme L est une mesure de x , les conditions de validité de l'étude se formulent:

$$\delta/L \ll 1$$

$$M^2 \epsilon^2 \gg 1$$

donc $M^{2\alpha} \ll R \ll M^{2(2+\alpha)}$

Le domaine d'application est donc:

$$M^{2\alpha} \nu / U_\infty \ll x^* \ll M^{2(2+\alpha)} \nu / U_\infty \quad (17)$$

Effectuons une petite application numérique:

$$M=10$$

$$U=3000 \text{ ms}^{-1}$$

$\nu = 1,74 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (à 100°C qui est un ordre de grandeur trop faible pour les température hypersoniques, mais ν décroît avec T)
le résultat donne x^* mesuré en μm !!?

la température

Partant de l'équation de continuité avec

$$u_b = U_b(\zeta_b) \quad v_b = x_b^{n-1} V_b(\zeta_b)$$

$$T_b = \theta_b(\zeta_b) \quad p_b = x_b^{2n-1} P_b$$

avec $\zeta_b = y_b / \sqrt{(x_b P/P_0)}$ comme nouvelle variable

$$\zeta_b = x_b^{m-1} \zeta_b \quad m = 1/2 - n$$

on retrouve conformément au paragraphe précédent que $n=3/4$.

Considérons une expression polynômiale en ζ pour θ_b et u_b .
Quand $\zeta \rightarrow \infty$, l'équation de l'énergie s'écrit avec les nouvelles variables:

$$P_0 [(1/Pr) d(\theta_b^{\alpha-1} U_b d\theta_b/d\zeta_b + (1-1/\gamma) U_b \theta_b^{\alpha-1} (dU_b/d\zeta_b)^2) + \\ + \kappa \zeta_b d\theta_b/d\zeta_b + ((\gamma-1)/2\gamma) \theta_b] = 0$$

après substitution dans cette équation et dans celle de la quantité de mouvement, après identification, et retour aux variables x_h et ψ_h on obtient:

$$T_b \approx \alpha x_b^{1/(2(1-\Omega))} \psi_b^{-2/(1-\Omega)} \quad (18)$$

L'examen des puissances: $-2/3\gamma$ d'une part et: $-2/(1-\Omega)$ d'autre part, permet de constater qu'aucun raccord n'est possible entre les expressions pour $\psi_h \rightarrow 0$ et $\psi_b \rightarrow +\infty$.

Il est donc nécessaire d'introduire une région de transition aux variables x_t et ψ_t telles que lorsque $\psi_t \rightarrow +\infty$ on retrouve le bon comportement lorsque $\psi_h \rightarrow 0$, et lorsque $\psi_t \rightarrow 0$ on retrouve celui de $\psi_b \rightarrow +\infty$.

II.1.3 la région de transition visqueuse

nouvelles variables

Introduisons pour cela les grandeurs intermédiaires:

$$\begin{aligned} x_t &= x & \psi_t &= \psi / \bar{\varrho} \\ u &= 1 + \beta u_t + \dots \\ v &= \epsilon v_t + \dots \\ p &= \gamma M^2 \epsilon^2 p_t + \dots \\ T &= \gamma M^2 \beta T_t \end{aligned} \quad (19)$$

où θ et $\bar{\varrho}$ sont deux petits paramètres à déterminer tels que leur ordre soit compris entre les ordres des quantités équivalentes prises dans les deux régions précédentes:

$$\begin{aligned} \epsilon^3 &\ll \bar{\varrho} \ll \epsilon \\ \epsilon^2 &\ll \beta \ll 1 \end{aligned} \quad (20)$$

avec ces notations, le coefficient qui apparaît devant les termes de viscosité et de conduction de la chaleur est:

$$\{(\gamma M^2)^{\Omega} / (R \epsilon^4)\} \{\epsilon^3 / (\bar{\varrho}^2 \beta^{1-\Omega})\} \quad (21)$$

le premier terme entre accolades vaut 1, il faudra vérifier que le second est aussi $O(1)$.

en posant $T_t = x_t^{\Omega} \theta_t(\zeta_t)$ et $\zeta_t = \psi_t / x_t^{\Omega} \epsilon^2$ c_1 c_2 exposants réels l'équation de l'énergie se transforme alors en:

$$\begin{aligned} (P_0/P_r) d(\theta_t^{\Omega-1} d\theta_t/d\zeta_t)/d\zeta_t + c_2 \zeta_t d\theta_t/d\zeta_t - \\ - (c_1 + (\gamma-1)/2\gamma) \theta_t = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

en tentant le raccord en $\zeta_t \rightarrow +\infty$ on peut déterminer c_1 et c_2 , l'équation (22) se simplifie en:

$$(P_0/P_r c_2) d(\theta_t^{\Omega-1} d\theta_t/d\zeta_t)/d\zeta_t + \zeta_t d\theta_t/d\zeta_t - (2/3\gamma) \theta_t = 0 \quad (23)$$

BUSH en fait l'étude complète par la méthode des points singuliers. Il obtient alors son comportement en 0 et $+\infty$.

Le raccord en $\psi_t \rightarrow 0$ et $\psi_b \rightarrow +\infty$ et la condition (21) lui

permettent de trouver les paramètres J_1 et J_2 tels que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \epsilon^{J_1} & \beta &= \epsilon^{J_2} \\ J_1 &= [3 - (1 - \Omega)(3\gamma + 1)/3\gamma] / [1 - (1 - \Omega)/3\gamma] \end{aligned} \quad (24)$$

$$J_2 = [2(3\gamma - 1)/3\gamma] / [1 - (1 - \Omega)/3\gamma] \quad (25)$$

l'épaisseur de la couche de transition est donc:

$$0(\epsilon^{J_1 + J_2 - 2}) \ll 1 \quad (26)$$

conclusion

Grâce à ce modèle on peut décrire l'évolution de la température du corps à l'onde de choc, les trois différentes zones se raccordant les unes aux autres.

II.2. Le cas $\Omega=1$ la région visqueuse

le point de vue de STEWARTSON (4) (21) (22) (23)

Avant de poursuivre l'étude de la transition telle qu'elle est décrite par LEE et CHENG, signalons une autre approche et un autre changement de variables qui sont introduits par STEWARTSON.

Il part du fait connu que $M_\infty \gg R \gg 1$ (hypothèse du choc fort). Cela lui permet de construire la longueur $M_\infty v/U_\infty$ telle que:

$$\begin{aligned} (M_\infty v/U_\infty) x &= x^* & * & \text{quantité dimensionnée.} \\ \text{et } (M_\infty v/U_\infty) y &= y^* \\ U_\infty u &= u^* \\ v U_\infty / M_\infty &= v^* \\ p p_\infty &= p^* \\ \rho \rho_\infty &= \rho^* \end{aligned} \quad (27)$$

[Toutes les équations qui vont suivre sont bien sur les mêmes, à un changement d'échelle près, et à une formulation légèrement différente près, que celles du paragraphe précédent.]

On étudie donc le domaine $x \ll 1$.

Le choc est en $Y_\infty = A x^{3/4}$. A sera déterminé ultérieurement par raccord.

Au choc et compte tenu du fait que $dY_\infty/dx \gg 1$

$$\begin{aligned} u &= 1 \\ v &= (2/(\gamma + 1)) dY_\infty/dx \\ p &= (2\gamma/(\gamma + 1)) (dY_\infty/dx)^2 \\ \rho &= (\gamma + 1/\gamma - 1) \end{aligned} \quad (28)$$

Écrivons que :

$$\begin{aligned} \rho^{-1} &= E^{1/\alpha} p^{-1/\alpha} & g &= \gamma \text{ E fonction de } \psi \text{ seulement:} \\ T &= E \rho^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

En combinant ces différentes expressions, E pour chaque ligne de courant:

$$E = [9\gamma A^2 B^{-1} (\gamma - 1)^\alpha (\gamma + 1)^{-\alpha-1}] (A/\psi)^{2/\alpha} \quad (29)$$

L'équation de continuité devient:

$$\gamma \partial v / \partial x = -\partial p / \partial \psi$$

Et la quantité de mouvement:

$$\gamma \partial v / \partial \psi = -E^{1/\alpha} p^{-1/\alpha-1/\alpha} \partial p / \partial x \quad (30)$$

posons

$$\begin{aligned} \eta &= \psi / Y_{\infty} \\ v &= (2/(\gamma+1)) dY_{\infty} / dx \quad V(\eta) \\ p &= (2\gamma/(\gamma+1)) (dY_{\infty} / dx)^2 \quad P(\eta) \end{aligned} \quad (31)$$

On a alors après substitution un système différentiel ordinaire que l'on cherche à résoudre sous la forme:

$$\begin{aligned} P' &= \eta V' + V/3 \\ V' &= (\gamma-1) [\eta^{-2} - \frac{2}{3} P^{-1} - \frac{1}{3} (2P/3 + \eta P')]] / 2\gamma \quad g \equiv \gamma \end{aligned} \quad (32)$$

par la méthode de RUNGE KUTTA à l'ordre 4 programmée en FORTRAN.

Sa solution n'est plus régulière en $\eta=0$ pour V' . P_0 et V_0 sont finis mais $V'=0$ ($\eta^{-2/3\gamma}$). On a

$$P_0 = 0.5620 \quad V_0 = 0.7095$$

La résolution de ce problème nous donne les conditions à la lisière de la couche limite. La solution est, au facteur d'échelle près, bien sur la même que celle évoquée plus haut en (9)

Plaçons nous dans la couche limite

STEWARTSON écrit:

$$T = (\gamma-1) M_{\infty}^2 (S - u^2) / 2 \quad (33)$$

S est similaire au "g" de MIRELS ELLINWOOD, avec les nouvelles variables:

$$\begin{aligned} \psi_b &= \psi \cdot M_{\infty}^2 \\ z &= M_{\infty}^2 \int_0^y dy \end{aligned} \quad (34)$$

Pour effectuer le raccord des vitesses transverses, il faut la valeur de v à la lisière de la zone visqueuse: v_{∞} . L'équation de continuité:

$$M_{\infty}^2 \partial(v/u) / \partial \psi_b = \partial((\rho u)^{-1}) / \partial x \quad (35)$$

par intégration, et substitution de (33) et (34):
et $\psi_b \rightarrow \infty$

$$v_{\infty} = (\gamma-1) / 2 \quad d \left(\int_0^{\infty} (S - u^2) dz \right) / dx \quad (36)$$

à raccorder à

$$v_{\infty} = (2/(\gamma+1)) dY_{\infty} / dx \quad V_0$$

obtenu pour $\psi \rightarrow 0$

Pour ce faire, posons $B = 9\gamma A^2 8^{-1} (\gamma+1)^{-1} P_0$.

p s'écrit alors $p = Bx^{-1/2}$ pour $\psi \rightarrow 0$ comme dans la couche limite le gradient de pression transverse est nul, $p = Bx^{-1/2}$ dans toute cette couche.

En posant $\psi_b = 2J(BC)x^{1/4} f(x_b)$ (37)

avec $x_b = z / [2J(BC)x^{1/4}]$ et C constante de CHAPMAN $\mu/\rho_{\infty} = CT/T_{\infty}$.
les équations satisfaites par $f(x_b)$ et $S(x_b)$ sont:

$$\begin{aligned} f'' + ff'' + ((\gamma-1)/\gamma)(S - f'^2) \\ S'' + fS' = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

avec comme conditions aux limites puisque $u \rightarrow 1$ $T \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 0 \\ S(0) &= S_\infty \text{ température est imposée sur le corps} \\ f'(\infty) &= S(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (39)$$

On obtient ainsi des équations de PRANDTL "généralisées" au cas compressible à $M \gg 1$.

En résolvant ce système on pose $I = \int_0^{+\infty} (S - f'^2) dx_b$.
d'où $v_\infty = ((\gamma - 1)/2) I \sqrt{(C/B)}$ que l'on raccorde à sa valeur (40)
dans la zone non visqueuse à $\psi \rightarrow 0$

on en déduit la valeur de A

$$A = [2(\gamma - 1)^2 (\gamma + 1)^3 I^2 C] / [9\gamma P_0 V_0^2] \quad (41)$$

Si on revient à la variable y :

$$y = \int_0^{+\infty} (\rho u)^{-1} d\psi = M^2 \int_0^{+\infty} T / (\rho u) d\psi_b$$

Le bord de la couche limite est défini précisément par:

$$\delta = \int_0^{+\infty} (\rho u)^{-1} d\psi = M^2 \int_0^{+\infty} (S - f'^2) [\sqrt{(BC)} x^{1/4} / Bx^{-1/2}] dx_b$$

car $d\psi_b = f' x^{1/4} = u x^{1/4}$

en revenant aux variables dimensionnées:

$$(\delta/L) = K(C, \gamma, P_0, V_0) (x/L)^{3/4} M^{-1} X^{1/2} \quad (42)$$

où K est un coefficient accessible par le calcul numérique:

$$K = I \sqrt{(C/B)}$$

par résolution en FORTRAN toujours par la méthode de RUNGE-KUTTA, on trouve que $I \approx 1.347$

Ce résultat n'en est pas moins inexact, nous avons raccordé la vitesse v_∞ , mais pas la température, comme en $+\infty$ on a $f = x_b$, la seconde équation suggère un S gaussien: la température ne pourra pas se raccorder.

Un important problème est donc soulevé pour la température lorsque $\Omega = 1$. Nous allons voir au paragraphe suivant, avec LEE & CHENG, comment le résoudre; et ainsi justifier le modèle à deux couches que nous venons d'utiliser, mais nous allons introduire une correction à l'expression de la température. Les calculs numériques de LEE & CHENG corroborent ceux ci-dessus pour P_0 et V_0 et laissent penser que I est du bon ordre de grandeur.

II.3. le raccord de la température à $\Omega = 1$

les variables

Revenons dans la couche limite avec la variable $\psi_b = \psi_h / \delta^2 = \psi / \delta^2$, et voyons comment se comportent les équations au second ordre. Mais pour $\Omega = 1$, $\bar{\alpha} = 3$ (d'après (23) et (24)). Ainsi pour $\Omega = 1$, la zone de transition ne peut être construite car elle coïncide avec la couche limite. De fait prenons les résultats (23) (24) pour construire les variables de la couche limite afin de tirer bénéfice du calcul de BUSH:

$$\begin{aligned} x_b &= x \quad \psi_b = \psi / \bar{\alpha} \\ \zeta_b &= \psi_b / (A P_0^{1/2} x_b^{1/4}) = \zeta_h x_h^{1/2} / (\epsilon^2 P_0^{1/2}) \\ u &= u_b + \beta u_b + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v &= \epsilon [v_b + \beta v_{bb} + \dots] \\
p &= \gamma M^2 \epsilon^2 [p_b + p_{bb} + \dots] \\
T &= \gamma M^2 \beta [T_b + T_{bb} + \dots] \\
\bar{g} &= \epsilon^3 \quad 3 = J_1 \quad \text{pour } \Omega = 1 \\
\beta &= \epsilon^k \quad k = 2(1 - 2/3\gamma) = J_2 \quad \text{pour } \Omega = 1
\end{aligned}
\tag{43}$$

en écrivant ensuite que $T_b = \theta_b(\zeta_b)$ et $T_{bb} = x_b^{-k} \theta_{bb}(\zeta_b)$

l'équation de l'énergie

Si $\zeta_b \rightarrow +\infty$ l'équation de l'énergie au premier ordre devient puisque $U \approx 1$ et $U' \approx 0$:

$$\theta_b'' + (Pr \zeta_b / 4) \theta_b' - (Pr/2)(1 - 1/\gamma) \theta_b = 0
\tag{44}$$

Elle est linéaire.

Ses deux premiers termes suggèrent une Gaussienne (cf l'équation de STEWARTSON en S). En prenant $T_1 = \zeta_b^{-\alpha} \exp(-Pr \zeta_b^2 / 8)$ et en substituant, on trouve pour $\alpha = (3\gamma - 2)/\gamma$ que T_1 est solution à des termes d'ordre $1/\zeta_b^2$ près. Les deux derniers termes admettent comme solution $T_2 = \zeta_b^a$ avec $a = 2(\gamma - 1)/\gamma$. T_2 est aussi solution de (44) à des termes d'ordre $1/\zeta_b^2$ près. T_2 ne peut cependant pas être retenu car T_2 n'est pas décroissant en $+\infty$. T_1 est bien décroissant mais exponentiellement tandis que la solution de la couche non visqueuse décroît algébriquement. La singularité vient de $\Omega = 1$. BUSH obtenait en effet:

$$T_b \propto x_b^{1/(2(1-\Omega))} \zeta_b^{-2/(1-\Omega)}$$

Cette expression qui ne se raccordait pas non plus avec la couche non visqueuse l'avait conduit à introduire une couche intermédiaire. Mais, à $\Omega = 1$ elles seraient confondues, avec LEE & CHENG observons plutôt le comportement de θ_{bb} qui est l'ordre suivant de la température.

L'équation vérifiée par θ_{bb} très grand, obtenue à partir de l'expression de la conservation de l'énergie au second ordre, s'écrit, après simplification:

$$\zeta_b \theta_{bb} \theta_b' / 4 + (1/3\gamma - 1/2) \theta_{bb} - \zeta_b \theta_{bb}' / 4 \approx (-1/Pr) (\theta_{bb} / \theta_b) (\theta_b'' + \theta_b)$$

substituons y une solution en ζ_b^g

$$[0. \zeta_b^2 + (c/4 + 8/3\gamma) + O(\zeta_b^{-2})] = 0$$

d'où $\theta_{bb} = E_1 \zeta_b^{-2/3\gamma}$ $g = \gamma$, on vient de retrouver l'exposant $-2/3\gamma$!

La tentation est alors grande de déterminer la constante E_1 par raccord avec la zone non visqueuse:

$$T = \gamma M^2 \delta^k x_b^{-k} E_1 \zeta_b^{-2/3\gamma}$$

$$T = \gamma M^2 \epsilon^2 A^2 \theta_0 x_b^{-1/2} \zeta_b^{-2/3\gamma}$$

$$\text{d'où } E_1 = \theta_0 A^2 P_0^{-1/3\gamma}$$

(45)

La solution de la couche limite au premier ordre tombant en défaut, on peut se demander si la solution obtenue ci dessus est bien valide. En effet il se pourrait que des termes du troisième ordre puissent avoir aussi une incidence.

II.4. la zone de transition

les variables

On pourrait donc faire une étude des termes d'ordre trois. Cependant, il est plus simple d'introduire une nouvelle couche de transition et d'y étudier la température.

Les termes du premier et du second ordre sont de même grandeur [(44) (45)] lorsque:

$\zeta_t = O(1)$, avec:

$$\zeta_t = [\beta \zeta_b^{-2/\alpha}]/[\zeta_b^{-(\alpha-2)}/\alpha e^{-Pr \zeta_b/\alpha}] \quad (46)$$

soient les variables x_t et ζ_t tel que $\zeta_t = O(\beta)$ représente le domaine visqueux tandis que $\zeta_t \gg 1$ est le domaine incompressible.

Soit ζ_* tel que $\zeta_t = 1$, (46) devient:

$$0 = \text{Log} \beta + (9\gamma - 8)/3\gamma \text{Log} \zeta_* + Pr \zeta_*^2/8$$

$\beta \ll 1 \Rightarrow \zeta_* \gg 1$ $\zeta_* \approx \sqrt{(-8Pr^{-1} \text{Log} \beta)}$ [$\zeta_*^2 = O(\text{Log} \beta)$] en première approximation.

Si on écrit que $\zeta_t = \zeta_b/1$, alors par définition de ζ_t et ζ_* :

$$\zeta_t = (\zeta_b/\zeta_*) = \exp(Pr(\zeta_b^2 - \zeta_*^2)/8) \quad c = (9\gamma - 8)/3\gamma$$

$$\zeta_b^2 - \zeta_*^2 \approx (8/Pr) \text{Log} \zeta_t + O(1/\zeta_t)$$

lorsque $\zeta_t \approx 1$

$$\zeta_b^2 = \zeta_*^2 + 8(-1 + \zeta_t)/Pr + O(1/\zeta_t) \quad (47)$$

$\Rightarrow \zeta_b \gg 1$

or dans la couche limite $\zeta_b = O(1)$; donc $\zeta_t = O(1)$ correspond à des ζ_b logarithmiquement loin de la couche limite, et (47) \Rightarrow

$$\zeta_b = \zeta_* + O(1/\zeta_t) \quad (48)$$

d'après (44) et (45), la solution pour la température s'écrit:

$$T = \gamma M^2 (\beta x_b^{-\alpha} E_1 \zeta_b^{-2/\alpha} + K \zeta_b^\alpha \exp(-Pr \zeta_b^2/8)) \quad \alpha = (3\gamma - 2)/\gamma \quad (49)$$

où K est une constante multiplicative due au fait que l'équation (44) est linéaire. Cette constante se déterminera à l'aide du calcul numérique.

par factorisation de ζ_* on a:

$$T = \gamma M^2 \beta \zeta_*^{-2/\alpha} \{ E_1 x_b^{(1/\alpha - 1/2)} + K/\zeta_t \} \quad (50)$$

les équations

Fort de cette écriture, posons alors:

$$T = \gamma M^2 \beta \zeta_*^{-2/\alpha} T_t$$

$$p = \gamma M^2 \epsilon^2 p_t + \dots$$

$$v = \epsilon v_t + \dots$$

$$u = 1 + \dots$$

après substitution dans les équation du mouvement:

$$\partial p_t / \partial \zeta_t = 0 \text{ on le retrouve}$$

$$\partial v_t / \partial \zeta_t = 0 \text{ on le découvre}$$

et l'équation de l'énergie devient:

$$(x_t^{-1/2} / A^2 P_0) [\partial(p_t \zeta_t \partial T_t / \partial \zeta_t) / \partial \zeta_t] + (\partial T_t / \partial \zeta_t) = 0 \quad (51)$$

mais par raccord:

$$p_t = A^2 P_0 x_t^{-1/2} \text{ donc (51) devient:}$$

$$\partial^2 T_t / \partial \zeta_t^2 + 2\zeta_t (\partial T_t / \partial \zeta_t) = 0 \quad (52)$$

qui s'intègre facilement en:

$$T_t = f_1(x_t)/\zeta_t + f_2(x_t).$$

le raccord pour ζ_t grand donne $f_2(x_t) = A^2 \theta_0 P_0^{-1/3} x_t^{-k}$ et pour $\zeta_t = O(1)$ $f_1(x_t) = K$, soit en définitive:

$$T_t = K/\zeta_t + A^2 \theta_0 P_0^{-1/3} x_t^{-k} \quad (53)$$

Dans la couche de transition les deux termes sont d'égale importance. Ainsi, la solution dans la couche limite au premier et second ordre est le développement composite pour la couche limite et la couche de transition.

Numériquement, LEE & CHENG ont montré que les corrections dues au paramètre β ne sont pas très importantes, et qu'une théorie au premier ordre est suffisante pour être confrontée aux résultats expérimentaux. D'autre part, $\beta = \epsilon^k$ a pour effet d'"étirer" l'onde de choc transversalement:

$$y_* = \epsilon A x^{3/4} [1 + a(\epsilon/x^{1/4})^k + \dots] \quad k = 2(1 - 3/\gamma)$$

il en résulte une diminution du taux de transfert de chaleur à la paroi.

conclusion

La méthode développée par LEE & CHENG permet de justifier le modèle à deux couches utilisé auparavant sans justifications et bien que la température ne soit pas raccordée. L'étude et la connaissance poussée de cette couche sont en effet fondamentales pour la réalisation d'engins hypersoniques habités.

La résolution des équations (II.32) posées par STEWARTSON (³¹)
 (³²) en FORTRAN par la méthode de RUNGE KUTTA d'ordre 4 nous donne:

distance.....	Pression.....	Vitesse
1.0000000	1.0000000	
9.000000E-001	9.507151E-001	9.829039E-001
8.000000E-001	9.029465E-001	9.648913E-001
6.999999E-001	8.568299E-001	9.458554E-001
5.999999E-001	8.125110E-001	9.256491E-001
4.999999E-001	7.701470E-001	9.040536E-001
3.999999E-001	7.299105E-001	8.807173E-001
2.999999E-001	6.920018E-001	8.550155E-001
1.999999E-001	6.566789E-001	8.256637E-001
1.000000E-001	6.243550E-001	7.892120E-001
1.000000E-002	5.986972E-001	7.330591E-001
1.000000E-003	5.964401E-001	7.165032E-001
1.000000E-005	5.962020E-001	7.100791E-001
1.000000E-006	5.961999E-001	7.096458E-001
1.000000E-007	5.961999E-001	7.095031E-001

Ces dernières valeurs sont quasiment les résultats de (³¹)(³²).

La résolution par la même méthode des équations (II.38), le problème ayant des conditions aux limites à satisfaire en deux points, il faut employer une méthode de tir, les conditions en 0.0 qui donnent les bonnes limites en ∞ sont:

$$f'=0 \quad f''=0.6556 \quad S=0.5 \quad (\text{choisi ainsi arbitrairement}) \quad S'=0.2516$$

le choix de la variable x_b dans le texte est malheureux, il ne faut pas confondre cette variable "transversale" avec la variable x longitudinale

$$\int (S-u^2) dx_b = I \quad u=f'$$

xb= .00	u= .00000	S= .50000	T°= .50000	I= .5000
xb= .40	u= .24987	S= .60047	T°= .53803	I= .7116
xb= .80	u= .47018	S= .69861	T°= .47754	I= .9173
xb= 1.20	u= .65294	S= .78916	T°= .36282	I= 1.0864
xb= 1.60	u= .79233	S= .86559	T°= .23781	I= 1.2062
xb= 2.00	u= .88807	S= .92316	T°= .13450	I= 1.2796
xb= 2.40	u= .94630	S= .96113	T°= .06564	I= 1.3185
xb= 2.80	u= .97730	S= .98280	T°= .02769	I= 1.3363
xb= 3.20	u= .99162	S= .99343	T°= .01013	I= 1.3433
xb= 3.60	u= .99732	S= .99790	T°= .00325	I= 1.3458
xb= 4.00	u= .99928	S= .99950	T°= .00094	I= 1.3465
xb= 4.40	u= .99986	S= .99999	T°= .00028	I= 1.3467
xb= 4.80	u= 1.00000	S= 1.00012	T°= .00012	I= 1.3468
xb= 5.20	u= 1.00003	S= 1.00015	T°= .00009	I= 1.3469
xb= 5.60	u= 1.00003	S= 1.00015	T°= .00009	I= 1.3469
xb= 6.00	u= 1.00003	S= 1.00015	T°= .00009	I= 1.3469

liste des symboles utilisés:

A amplitude de l'onde de choc
B coefficient
b coefficient
c vitesse du son
C coefficient de traînée au I. Constante de CHAPMAN au II
d épaisseur de la plaque, caractérisant l'émoussement
g = γ
I intégrale
k = $2(1-2/3\gamma)$
K nombre de Knudsen
K paramètre de similitude au I
K constante au II
lpm libre parcours moyen $lpm = m/\rho\sigma$ (σ section efficace)
L longueur caractéristique considérée
 M_∞^2 nombre de Mach au carré dans l'écoulement incident
O() de l'ordre de ...
Pr = $\nu/\lambda Cp/k$ nombre de Prandtl
Re = $U_\infty L/\nu_\infty$ nombre de Reynolds

$\partial/\partial x$ dérivation partielle par rapport à x
' dérivation par rapport à la variable courante
 $\sqrt{\quad}$ racine carrée
^ symbolise la puissance: $a^2 = a^2$

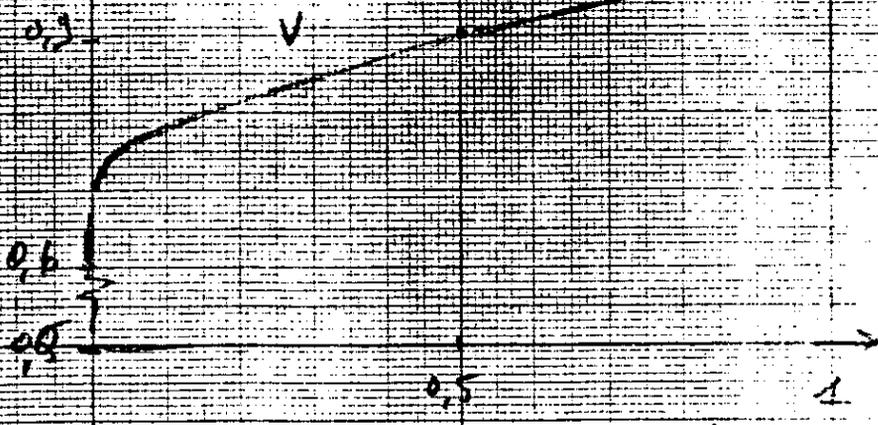
α coefficient ou symbole de proportionnalité
 $\beta = \epsilon^k$
 $\gamma = C_p/C_v$
 δ épaisseur de la couche limite
 $\epsilon = \delta/L$ au II. $\epsilon = \gamma - 1$ au I
 ζ (dzéta) variable de couche limite
 η (éta) variable
 θ température
 λ variable
 μ viscosité
 $\nu = \mu/\rho$
 ρ densité
 σ angle de choc
 τ angle caractéristique du corps
 \bar{q} flux au I, petit paramètre au II
X (khi) paramètre d'interaction forte
 ψ fonction de courant
 $\Omega \mu \propto T^{\frac{1}{2}}$ $1 \leq \Omega \leq 1/2$

Bibliographie

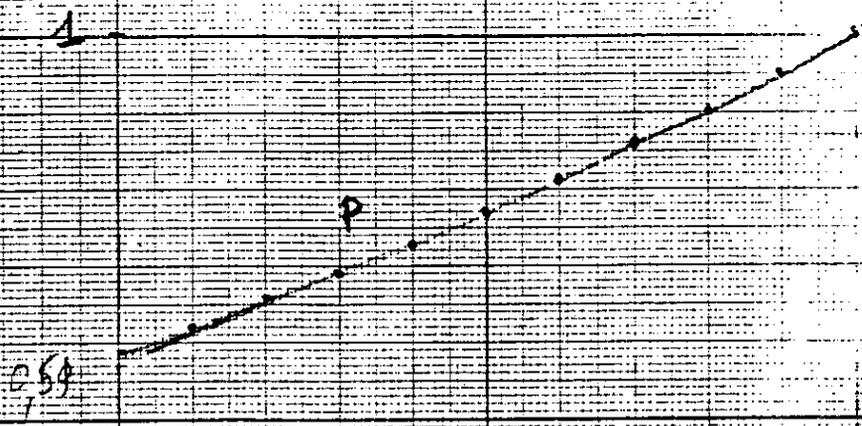
1. Allègre Festinger Herpe, "Mesures de flux thermiques dans un écoulement hypersonique de gaz raréfié"
2. Bush, "hypersonic strong interaction similarity solutions for flow past a flat plane" JFM 1966 vol 25 part1 pp51-64
3. Bush Cross, "hypersonic weak-interaction similarity solution for flow past a flat plane" JFM 1967 vol 29 part2 pp349-359
4. Brown Stewartson Williams, "Hypersonic self induced separation" The physics of fluids vol 18 n°6 june 75
5. Cheng, "hypersonic gas dynamics of slender bodies" Chap 4 de Modern developments in gas dynamics, Plenum press 69
6. Cheng Gordon Hall Golian Hertzberg, "Boundary layer displacement and leading edge bluntness effects in high temperature hypersonic flow" JAS Vol28 MAY61 N°5 p353-381
7. Chernyi "introduction to hypersonic flow" Academic Press 1961
8. Cox Crabtree, "Elements of hypersonic aerodynamics" The english university press 1965
9. Dorrance, "On the approach to chemical vibrational equilibrium behind a strong normal shock wave" J A S jan 61 p43
10. Dorrance, "Viscous Hypersonic Flow" Mc Graw Hill 1962
11. Freeman, "Newtonian theory of hypersonic flow at large distances from bluff axially symmetric bodies" in Hypersonic Flow Research, Academic Press 1962 p341-377
12. Ferri Zakkay Luting, "Blunt body heat transfert at hypersonic speed and low Reynolds number" J A S dec 1961 p962
13. Germain, "Mécanique X" T1 T2 Ellipses 1986
14. Guiraud Vallée Zolver, "Bluntness effect in hypersonic small disturbance theory" Basic developments in fluid dynamics Vol1
15. Gonor, "Hypersonic flow past a delta wing" P.M.M. n°3 1970 p452
16. Korobenikov "Gas dynamic of explosion" Annual Review of fluid Mechanics n°3 1971
17. Hayes Probststein, "Hypersonic flow theory" Academic Press 1959, + 2nd édition 1966
18. Hayes Probststein, "viscous Hypersonic similitude" JAS dec 59 p815
19. Kubo, "Statistical mechanics" North Holland Edition 1981

20. Landau Lifshitz, "Fluid mechanics" Pergamon Press 1959
21. Lee Cheng, "On the outer-edge problem of a hypersonic boundary layer" JFM 1969 vol38 part1 pp161-179
22. Lees Kubota, "Inviscid hypersonic flow over blunt nosed slender bodies" JAS Vol24 N°3 March57
23. Mikhailov Neiland Sychev, "The theory of viscous hypersonic flow" Annual Review of fluid Mechanics n°3 1971
24. Mirels, "hypersonic flow over slender boddies" advances in applied mechanics. Acad Press VII 1962
25. Mirels Ellinwood, "Viscous interaction theory for slender axisymmetric bodies in hypersonic flow" AIAA Journal Vol6 N°11 Nov68
26. Nagamatsu Workman Sheer "Hypersonic Nozzle expansion of air with atom recombination present" J.A.S. nov 61 p833
27. Probst Kemp "viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow" JAS mar 1960 p174
28. Rhyzov, "On the entropy layer in hypersonic flows with shock waves whose shape is described by a power function" P.M.M. n°3 1970 p461
29. Sedov, "similitudes et dimensions en mécanique" MIR 1972
30. Stewartson, "Viscous hypersonic flow past a slender cone" Phys. Fluids vol7 n°5 may 1964
31. Stewartson, "The theory of laminar boundary layers in compressible fluids" Oxford University Press 1964
32. Stewartson Brown, "A non uniqueness of the hypersonic boundary layer" Q.J. mech. appl. math. Vol XXVIII 1975
33. Stewartson Thomson, "On one dimensional unsteady flow at infinite Mach number" Proc Royal Soc 304 p255-273 1968
34. Stewartson Thomson, "Eigenvalues for the blast wave" Phys Fluids 13 p227 1970
35. Swigart, "hypersonic blunt body flow fields at angle of attack" AIAA J. Vol2 N°1 Jan64 p115
36. Truitt, "hypersonic aerodynamic" Ronald Press C¹ 1959
37. Van Dyke, "Perturbation methods in fluid dynamics" Academic Press 1964
38. Van Dyke, "higher approximation in boundary-layer theory" JFM 1962 vol14 p161-
39. Yakura, "theory of entropy layers and nose bluntness in hypersonic flow" in Hypersonic Flow Research, Academic Press 1962 p421-470

0.75
tracé de 3. FOR



$$\frac{V}{L \cdot S^2}$$



Pour un écoulement hypersonique.
 $\alpha \ll 1$ $\gamma \gg 1$.

