

## chapitre 2

Cours de DEA de Mécanique Filière II, UPMC, 1997.  
Introduction à la Stabilité Hydrodynamique.  
M. Rossi & P.-Y. Lagrée.

### Notions de stabilité et de système dynamique

Dans ce chapitre, la notion de "stabilité" est définie. La démarche est présentée de manière générale, puis sur un exemple (une équation aux dérivées partielles, une PDE). On introduit également les notions de bifurcations, seuil, hysteresis.

#### 1. Notions de système dynamique

##### 1.1 définition

On appelle système dynamique à  $n$  degrés de liberté un système défini par la donnée de  $n$  grandeurs  $x_n$  dont l'évolution dépend de  $n$  équations différentielles ordinaires:

$$x_n(t) \text{ pour } 1 \leq n \leq N \\ dx_n/dt = F_n(x_j, t, \mu_k)$$

avec les  $p$  paramètres de contrôle

$$\mu = \mu_{1 < k < p}$$

si  $F$  ne dépend pas du temps le système est dite autonome.

##### 1.2 exemples

Systèmes autonomes:

- oscillateur en rotation: 2 degrés de liberté ( $\theta$  et  $d\theta/dt$ ) et 1 paramètre de contrôle la vitesse angulaire de rotation  $\omega$
- équations d'Euler; Navier Stokes (notées N.S.). nombre de degrés de liberté infini .

Système non-autonome :

-expérience de Faraday.

Un bac d'eau (ou une tasse de café) que l'on fait osciller verticalement (apparition de structures à la surface.)

#### 2 méthode:

i) Dans toute étude de stabilité, la première étape consiste à chercher une solution de référence appelée solution de base. En général cette dernière satisfait aux symétries du problème. Comme les systèmes étudiés sont pour la plupart autonomes, on considèrera souvent des solutions de base stationnaires. Celles désignent sous le terme de *points fixes* dans le langage des systèmes dynamiques

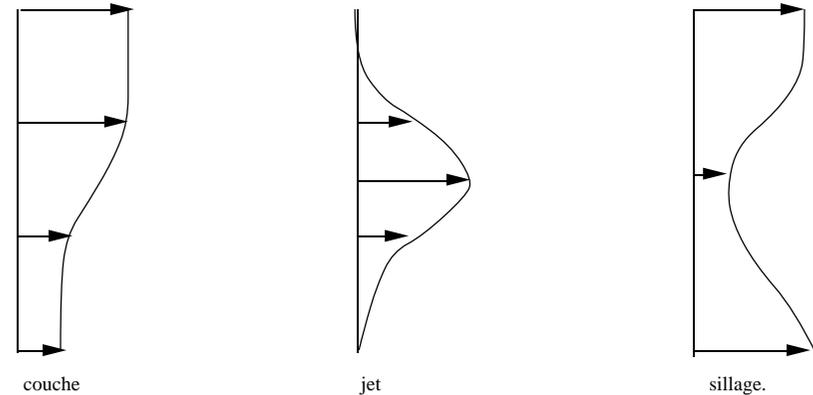
$$F_n(x_j^0, \mu_k) = 0$$

-> par exemple  $\theta = d\theta/dt = 0$  pour le pendule entraîné.

-> Pour NS : le profil parabolique de Poiseuille est solution de base pour un écoulement en canal plan soumis à un gradient de pression

-> Pour NS, l'écoulement de Couette entre deux plaques.

-> Pour les équations d'Euler, des écoulements du type  $u=U_0(y)$   $v=w=0$  et à pression constante sont solutions de base. Ces derniers sont reliés à des écoulements de type sillages, couches de mélange & jet pour lesquels les lignes de courant sont parallèles.



En règle générale, on ne sait même pas écrire analytiquement l'état de base!!!

ii) Dans toute étude de stabilité, la deuxième étape consiste à *linéariser* autour de l'état de base  $x^0$  (stationnaire ou non) le système

$$dX_n/dt = F_n(X_j, t, \mu_k)$$

On pose où  $X = x^0 + x$ , et après linéarisation, il vient:

$$dx_n^0/dt + dx_n/dt = F_n(x^0_j, \mu_k) + \frac{\partial F_n}{\partial X_j}(x^0_j, \mu_k) x_j + \dots$$

comme  $x^0$  est solution du système, les fluctuations vérifient donc le système linéaire

$$dx_n/dt = \frac{\partial F_n}{\partial X_j}(x^0_j, \mu_k) x_j$$

A l'inverse des systèmes nonlinéaires, on est capable de résoudre analytiquement de tels systèmes linéaires.

Exemple N.S. (U vecteur)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U = - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 U, \quad \nabla \cdot U = 0,$$

par perturbation de l'état de base  $U = U_0 + u$ ,  $P = P_0 + p$  devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla u + u \cdot \nabla U_0 = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u, \quad \nabla \cdot u = 0$$

Les symétries de l'état de base sont importantes: si  $x$  n'apparaît pas dans  $U_0$  cela simplifie l'étude du problème linéarisé puisque cette variable n'apparaît pas explicitement dans l'opérateur. On peut alors utiliser de manière efficace les outils puissants de l'analyse de Fourier.

Le système linéarisé est par exemple autonome si la solution de base est stationnaire.

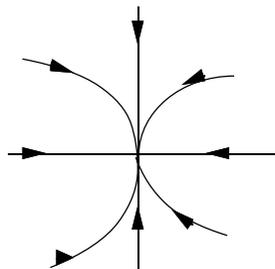
iii) Pour un système avec deux degrés de liberté et une solution de base stationnaire, on aboutit à un système matriciel à coefficients indépendants du temps:

$$\begin{cases} dx/dt = a x + b y \\ dy/dt = c x + d y \end{cases}$$

Après diagonalisation de la matrice:

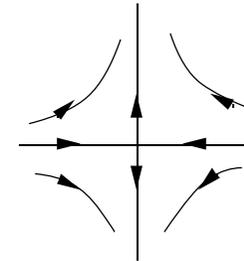
$$\begin{cases} dx/dt = \lambda x \\ dy/dt = \mu y \end{cases}$$

iii-a) Si les deux valeurs propres sont réelles négatives,  $x$  et  $y$  tendent vers 0 exponentiellement, l'orbite revient vers ce point fixe qui est donc stable. On trace le diagramme associé, ici dans la base des vecteurs propres. Il y a un "centre"/ foyer point fixe stable (sur le dessin les axes sont perpendiculaires pour simplifier la représentation, mais c'est un cas particulier)

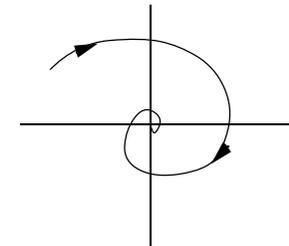


iii-b) si  $\lambda$  et  $\mu$  sont positifs on change le sens des flèches... C'est un point fixe instable.

iii-c) si une valeur propre est positive ( $\lambda > 0$ ) et l'autre négative ( $\mu < 0$ ), on a un "Point selle". Exceptées celles associées à la direction de la valeur propre  $\mu$ , la perturbation croît en amplitude. Le point fixe est donc instable car au moins une perturbation croît en amplitude. Dans ce cas, le système s'éloigne alors du point fixe.



iii-d) Si les deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  sont complexes conjuguées (elles sont conjuguées car le système dynamique est à coefficients réels) et de partie réelle négative. On a un point fixe stable:



iii-e) Si les deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  sont complexes conjuguées et de partie réelle positive, on change le sens des flèches: point fixe instable.

iii-f) Enfin si on ne peut pas diagonaliser, on met sous la forme de Jordan:

$$\begin{cases} dx/dt = \lambda x + y \\ dy/dt = 0 \lambda y \end{cases} \quad \lambda \text{ réel}$$

la solution est de la forme:

$$e^{\lambda t} (x_0 + y_0 t, y_0)$$

Si la valeur propre  $\lambda$  est strictement négative (resp. strictement positive), on a point fixe stable (instable).

Si une valeur propre est telle que  $\text{Re}(\lambda) = 0$  (ou  $\lambda = 0$ ), la linéarisation ne donne pas d'information sur la dynamique du problème non linéaire. On ne peut plus conclure par simple linéarisation.

Par exemple:

*premier cas*

$$dx/dt = \lambda x + x^2.$$

Le point fixe est  $x=0$ , si on linéarise

\*  $dx/dt = \lambda x$   $\lambda > 0$  ( $< 0$ ) instable (stable)

\* si  $\lambda = 0$ , linéairement il ne se passe rien.

En revanche, pour le système non linéaire:  $dx/dt = x^2$ . Une perturbation s'éloigne à l'infini pour  $x$  positif à droite, mais le système tend vers le point fixe  $x=0$  si initialement on se trouve en  $x$  négatif.

*deuxième cas*

Examinons maintenant

$$dx/dt = \lambda x - x^3.$$

- Si  $\lambda > 0$  ( $< 0$ ): linéairement instable (stable)

- Si  $\lambda = 0$ , la linéarisation ne suffit pas, cela dépend du terme non linéaire.

$$dx/dt = -x^3 = -x^2 x$$

D'une manière un peu rapide, on peut parler d'un taux d'accroissement non linéaire et négatif. Dans ce cas le point fixe  $x=0$  est stable

### conclusion

Si le spectre de l'opérateur linéarisé ne contient pas de valeurs propres  $\lambda=0$  ou de partie réelle nulle, la linéarisation permet de comprendre l'évolution d'une perturbation de faible amplitude (Théorème de Hartmann Grotman). S'il existe des valeurs propres de partie réelle nulle, la linéarisation ne suffit pas pour étudier la dynamique.

Si l'écoulement est linéairement stable une perturbation de faible amplitude vérifiant le système général décroît.

Si l'écoulement est linéairement instable, une perturbation de faible amplitude augmente d'abord exponentiellement, en accord avec le système linéarisé. Lorsque l'amplitude est trop grande, on sort du domaine de validité de l'équation linéarisée, les termes non linéaires ne sont plus négligeables et peuvent saturer l'amplitude des perturbations. Le système choisit alors un nouvel état qui devient le nouvel état de base. On parle de *bifurcation*.

ex: déstabilisation de l'oscillateur en rotation.

## 3. Définition de la stabilité

### 3.1 définitions

Jusqu'à présent nous nous sommes contentés d'une définition intuitive de la stabilité.

Cette notion nécessite la définition d'une norme (une distance entre le champ perturbé et la solution de base  $u_B$ ), par exemple on peut prendre:

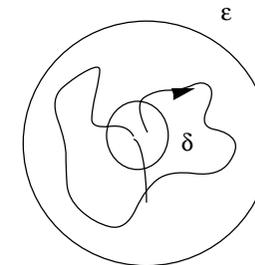
$$\|u(x,t) - u_B(x,t)\| = \max_{x \in V_{01}} |u(x,t) - u_B(x,t)|$$

ou

$$\|u(x,t) - u_B(x,t)\| = \int_{V_{01}} \rho/2 (u - u_B)^2 d\tau$$

-  $u_B$  sera dit uniformément stable si et seulement si:

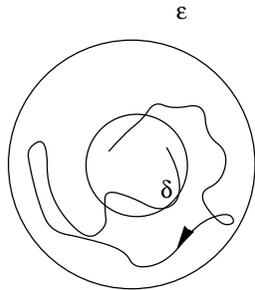
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / \|u(x,0) - u_B(x,0)\| < \delta \Rightarrow \forall t \|u(x,t) - u_B(x,t)\| < \epsilon$$



On reste à l'intérieur de la distance  $\epsilon$ .

-  $u_B$  est asymptotiquement stable ssi il est uniformément stable et si

$$\exists \delta_1 > 0 / \|u(x,0) - u_B(x,0)\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x,t) - u_B(x,t)\| = 0$$



Si  $\delta_1$  peut être choisi quelconque, l'écoulement est *globalement* stable, en termes mathématiques:  $u_B$  globalement stable:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(x,t) - u_B(x,t)| = 0$$

exemple:

$$dx/dt = -x^3 \quad x=0 \text{ est globalement stable.}$$

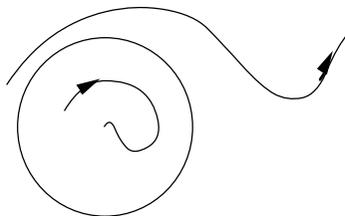
### Remarques importantes:

\*\* un minimum local est asymptotiquement stable mais pas forcément globalement stable

\*\* si  $u_B$  est linéairement stable,  $u_B$  est asymptotiquement stable.

Lorsque l'on ramène à un système de valeurs propres tel que  $\text{Re}(\sigma) < 0$ ,  $u_B$  est asymptotiquement stable.

Attention, tout cela dépend de la taille des perturbations: si on perturbe trop, le système ne suit plus la dynamique locale. On peut avoir stabilité asymptotique sans avoir la stabilité globale:



### 3.2 Notion de Stabilité Globale Fonction de Lyapounov

On ne sait pas en général traiter le problème de la stabilité globale!

Il existe toutefois un cas particulier pour lequel cela est possible: à savoir lorsque l'on exhibe une fonction de Lyapounov.

Il s'agit de trouver une fonction  $V(x)$ ,  $x$  vecteur, pour un système dynamique de  $N$  degrés de liberté.

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\mu, x)$$

On suppose qu'il existe un point fixe  $x^{(0)}$  tel que  $F(\mu, x^{(0)}) = 0$ .

Soit une fonction telle que:

i)  $V(x^{(0)}) = 0$  et  $V(x) > 0$  pour  $x \neq x^{(0)}$ . ( $V$  est minimale au point fixe)

ii)  $\sum F_i \frac{\partial V}{\partial x_i} < 0$  si  $x \neq x^{(0)}$ .

On a

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum F_i \frac{\partial V}{\partial x_i} < 0$$

Cette fonction, appelée fonction de Lyapounov, décroît en permanence le long de la trajectoire (sauf en  $x^{(0)}$ ).  $x^{(0)}$  est donc globalement stable.

### exemple:

Soit le système de Lorenz (voir la fin du chapitre):

$$x' = \sigma (y - x)$$

$$y' = \rho x - y - x z$$

$$z' = -\beta z + x y.$$

Pour  $\rho$  compris entre 0 et 1, on vérifie que l'origine est un point fixe globalement stable.

Sa stabilité globale est étudiée à l'aide d'une fonction de Lyapounov qu'il faut intuiter! On vérifie que la fonction:

$$V = (1/2) (x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$$

convient.

$V(0,0,0) = 0$  et  $V > 0$  pour  $x, y, z \neq 0, 0, 0$ .

$$dV/dt = \sigma (y - x) x + \sigma y (\rho x - y - x z) + \sigma z (-\beta z + x y).$$

$$dV/dt = -\sigma (x^2 + y^2 - (\rho + 1) x y + \beta z^2)$$

Or  $z^2 > 0$  et  $x^2 + y^2 - (\rho + 1) x y > 0$  pour  $\rho$  compris entre 0 et 1. C'est bien une fonction de Lyapounov. Le point fixe  $(0,0,0)$  est globalement stable.

### 4. Systèmes à un degré de liberté.

#### 4.1 définitions

Nous allons maintenant étudier des systèmes un peu particulier ceux à un degré de liberté:

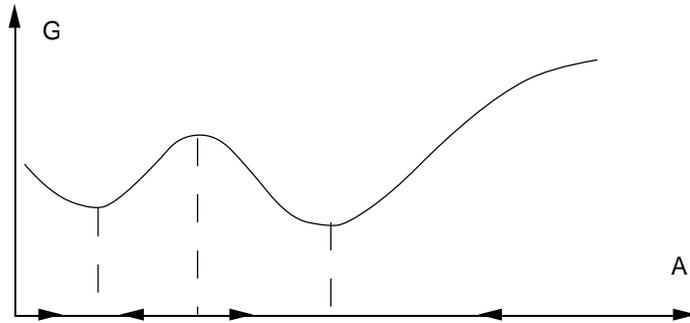
$$\frac{dA}{dt} = F(\mu, A)$$

A une dimension, F dérive toujours d'une fonction potentiel G:

$$F = -\frac{dG}{dA}$$

Les extréma du potentiel sont les points fixes du système. Par ailleurs on a l'identité :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{dA} \frac{dA}{dt} = -\left(\frac{dG}{dA}\right)^2 < 0$$



On en déduit l'évolution temporelle visualisée par des "flèches".  
D'évidence les minima sont des points fixes stables.  
On examine ci-dessous les cas de bifurcations les plus simples.

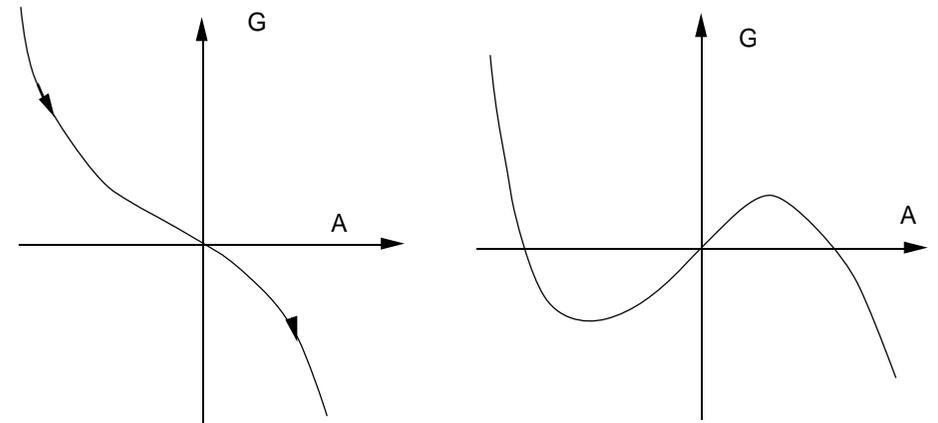
#### 4.2 Bifurcation Nœud Col

Étudios:

$$\frac{dA}{dt} = \mu + A^2.$$

$$\text{donc } G = -\mu A - A^3/3.$$

On trace G "à la main", en tenant compte du comportement à l'infini, puis en 0

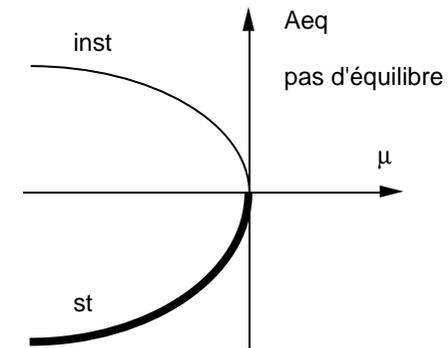


$\mu > 0$  pas de point fixe

deux extréma  $A = \pm \sqrt{-\mu}$ .

Si  $\mu < 0$  le point  $-\sqrt{-\mu}$  est asymptotiquement stable, mais pas globalement: si on perturbe trop cette position, on risque de "gravir" l'autre bosse! Le point  $\sqrt{-\mu}$  est asymptotiquement instable.

Diagramme de bifurcation.



Lorsque  $\mu = 0$ , la valeur propre est nulle: la linéarisation ne suffit plus. On a une bifurcation "Nœud-col" (Saddle Node dans la littérature anglo saxonne)

#### 4.2 Bifurcation Supercritique

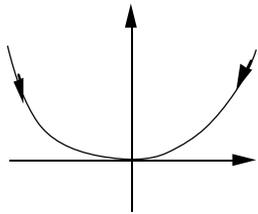
Soit l'équation (dite de Landau)

$$\frac{dA}{dt} = \mu A - \lambda A^3.$$

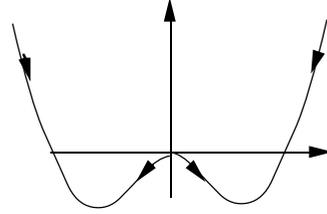
Si  $A$  est solution d'un système et  $S$  une symétrie de ce système i.e. une transformation qui le laisse invariant, alors soit  $S A = A$  ou bien  $S A$  est différent de  $A$ , mais est également solution. Dans le cas de l'équation de Landau, on a la symétrie  $A \rightarrow -A$  : si on trouve une solution, son opposé sera aussi solution

Construisons  $G$ :

$$G = -\mu A^2/2 - \lambda/4 A^4.$$



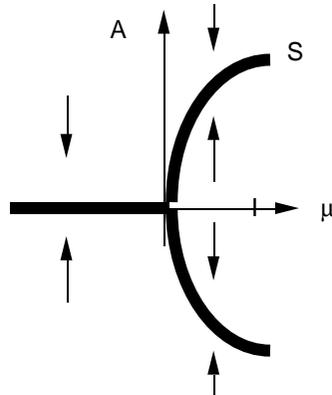
$\mu < 0 \lambda > 0$ ,  $A=0$  point fixe stable



$\mu > 0 \lambda > 0$ ,  $A=0$  et  $\pm\sqrt{(\mu/\lambda)}$  3 pt fixes.

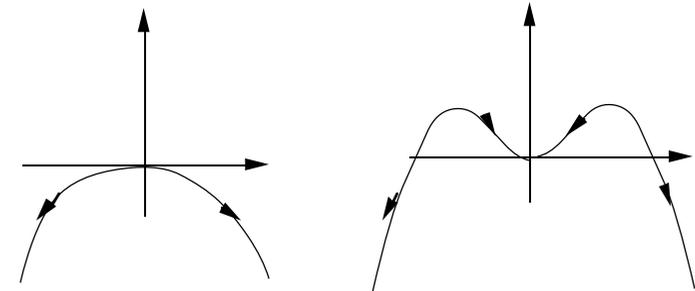
Par la symétrie  $\sqrt{(\mu/\lambda)}$  devient  $-\sqrt{(\mu/\lambda)}$  qui est bien une autre solution.

Diagramme de bifurcation:



Apparition de 2 états stables ( $\pm\sqrt{(\mu/\lambda)}$ ). Bifurcation "Fourche", ou "supercritique", l'état  $A=0$  perd sa stabilité.

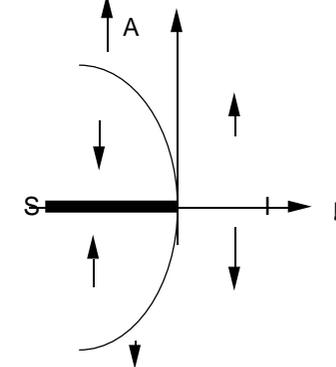
### 4.3 Bifurcation Souscritique



$\mu > 0 \lambda < 0$

$\mu > 0 \lambda < 0$

2 états instables  $A = \pm\sqrt{(-\mu/\lambda)}$  pour  $\mu < 0$ . On parle de bifurcation souscritique.

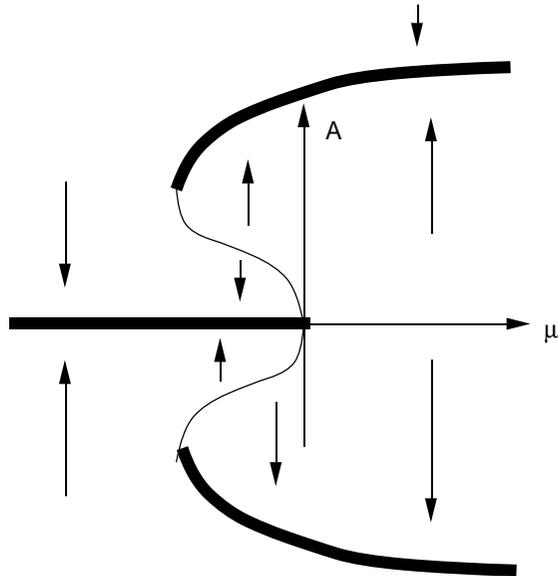


On comprend la notion de seuil sur la taille des perturbations: si on perturbe trop, l'orbite va à l'infini. Dans ce cas la nonlinéarité ne sature pas, elle déstabilise le système.

Rajoutons maintenant un terme quintique à l'équation de Landau souscritique:

$$\frac{dA}{dt} = \mu A - \lambda A^3 - \nu A^5.$$

La symétrie  $A \rightarrow -A$  est toujours pertinente, et le nouveau terme sature l'amplitude asymptotique. Si on varie de manière quasistatique  $\mu$  d'une valeur négative à positive, puis on revient à la valeur initiale, le système évolue en suivant un chemin différent à l'aller et au retour : on parle d'hystérésis. Remarquer les bifurcations locales souscritique et Nœud Col.



On ne considère pas dans ce cours la bifurcation transcritique.

## 5. Un problème particulier: Swift-Hohenberg

### 5.1 L'EDP de Swift-Hohenberg

Nous nous éloignons maintenant des systèmes dynamiques pour examiner les équations aux dérivées partielles (EDP), on se rapproche donc de l'hydrodynamique. Soit l'EDP suivante et ses conditions aux limites (cf Manneville Chapitre 5):

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \mu u - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)^2 u + \alpha u \cos(\pi x/L) - \beta u \frac{\partial}{\partial x} u$$

$$u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0 \text{ en } x=0 \text{ et } L$$

on y voit une partie linéaire, une explicite en x et une autre nonlinéaire. Il faut bien noter les conditions aux limites aux bords du domaine,  $\mu$  est le paramètre de contrôle,  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres fixés.

N.B. : Attention L est aussi un paramètre de contrôle ( on change la taille de la boîte!)

Cette équation est une équation modèle qui ne provient pas de l'étude d'un phénomène physique, cependant son comportement rappelle l'instabilité de Rayleigh Bénard: par chauffage on passe d'une solution stationnaire de repos à une solution encore stationnaire mais structurée (en hexagones ou en rouleaux...) avec une fréquence spatiale précise. Ce modèle est issu de l'équation dite de Swift-Hohenberg.

### 5.2 Décomposition en modes

Les conditions aux limites sont automatiquement satisfaites si on cherche la solution sous la forme de la décomposition suivante en séries de Fourier:

$$u = \sum A_n(t) \sin(n\pi x/L) \text{ pour } 1 \leq n < \infty.$$

Il y a donc un nombre infini de degrés de liberté. On va obtenir par substitution un système de la forme:

$$dA_n/dt = F_n(A_1, \dots, A_n)$$

En introduisant l'expression de la série dans l'équation SH et après quelques manipulations (on utilise en particulier l'identité  $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$  et on modifie astucieusement les indices dans les sommes) il vient

$$\sum_{1 \leq n < \infty} dA_n(t)/dt \sin(n\pi x/L) =$$

$$\sum_{1 \leq n < \infty} (\mu - ((n\pi/L)^2 + 1)^2) A_n(t) \sin(n\pi x/L) +$$

$$\alpha / 2 \sum_{2 \leq n < \infty} A_{n-1} \sin(n\pi x/L) +$$

$$\alpha / 2 \sum_{1 \leq n < \infty} A_{n+1} \sin(n\pi x/L) +$$

$\beta \sum_{1 \leq n < \infty} n\pi / (2L) \sin(n\pi x/L) [\sum_{p=1 \leq n < \infty} A_{n+p} A_p] - \beta \sum_{1 \leq n < \infty} \sin(n\pi x/L) [\sum_{p=1 \leq n < \infty} A_{n-p} A_p p\pi / (2L)]$   
C'est l'équation complète qui a été réécrite. Cette égalité impose une infinité d'équations différentielles ordinaires pour les variables  $A_n$ , qui sont:

$$dA_n(t)/dt \sin(n\pi x/L) =$$

$$(\mu - ((n\pi/L)^2 + 1)^2) A_n(t) \sin(n\pi x/L) + \alpha / 2 A_{n-1} \sin(n\pi x/L) + \alpha / 2 A_{n+1} \sin(n\pi x/L) +$$

$$\beta n\pi / (2L) \sin(n\pi x/L) [\sum_{p=1}^{\infty} A_{n+p} A_p] - \beta \sum_{p=1}^{\infty} \sin(n\pi x/L) [\sum_{p=1}^{\infty} A_{n-p} A_p p\pi / (2L)].$$

### 5.3 Cas Particuliers

i) si  $\alpha = \beta = 0$  ce système est uniquement linéaire et les équations sont découplées:

$$dA_n(t)/dt = (\mu - ((n\pi/L)^2 + 1)^2) A_n(t)$$

=> c'est facile,  $A_n$  ne dépend que du même mode n. On a en fait décomposé sur une "**base de modes normaux**".

ii) si  $\beta=0$ , ce système est uniquement linéaire mais à cause le terme de forçage dépendant de  $x$  le système n'est plus découplé

$$dA_n(t)/dt = (\mu - ((n\pi/L)^2 + 1)^2) A_n + \alpha/2 A_{n-1} + \alpha/2 A_{n+1}$$

L'équation reste linéaire

La dynamique du mode  $n$  dépend de sa propre amplitude mais est couplée aux deux modes qui l'entourent. En fait on ne sait pas faire!!!!!!

iii) si  $\alpha=0$ ; les termes non linéaires couplent également les modes. On ne sait pas faire... difficulté extrême!!!!!!

#### 5.4 Stabilité linéaire

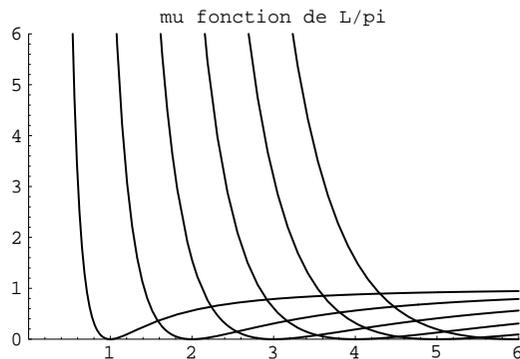
Considérons désormais le cas  $\alpha=0$ . Effectuons une linéarisation autour de l'état de base  $u=0$ . N'oublions pas de linéariser les conditions aux limites (facile dans ce cas). On retrouve le système avec  $\alpha=\beta=0$  dont la décomposition donne:

$$dA_n(t)/dt = (\mu - ((n\pi/L)^2 + 1)^2) A_n(t)$$

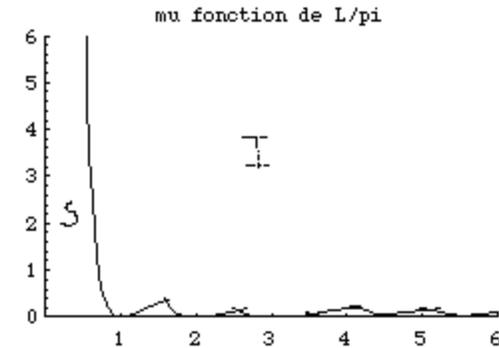
La solution s'écrit  $A_n(x,t) = A_n(0)e^{\sigma_n t}$ . Chacun des modes varie exponentiellement avec un taux de croissance

$$\sigma_n = \mu - ((n\pi/L)^2 + 1)^2$$

Le mode  $n$  devient marginal lorsque  $\sigma_n = 0$ . Ceci se produit pour des valeurs de  $\mu$  fonction de  $L/\pi$ .



Si on fixe  $L$ , tant que  $\mu$  est inférieur aux courbes ci-dessus, l'état de base  $u=0$  est stable.



On fixe le rapport d'aspect  $\pi/L$  dans la région en  $L$  proche du point  $\pi/L = 1$  (le mode  $n=1$  est alors le premier à être destabilisé).

Plaçons nous près du seuil. S'il y a une perturbation quelconque, cette dernière se décompose dans la base des sinus. On distingue l'évolution du mode critique  $n=1$  qui évolue lentement et l'ensemble des autres modes qui sont tous rapidement atténués:

$$u = A_1(t) \sin(x\pi/L) + \sum_{n>1} A_n(t) \sin(n\pi/Lx)$$

L'évolution temporelle est telle que la structure de l'écoulement aux temps grands est donc associée à celle du mode critique  $n=1$ .

Près du seuil, ce mode critique est l'équivalent, dans l'écoulement de Couette Taylor, aux vortex toriques de Taylor et dans l'écoulement de Rayleigh Bénard aux rouleaux convectifs.

#### 6. Généralisation

L'équation générale est de la forme

$$d\tilde{u}/dt = L(u_B)\tilde{u} + NL(u_B, \tilde{u})$$

L'opérateur peut dépendre via l'écoulement de base de  $x$  et de  $t$ . Si on suppose des symétries pour la solution de base, on peut simplifier le problème pour éliminer des variables.

Si  $u_B$  est stationnaire,  $L_m$  est autonome et on cherche des solutions de la forme:

$$\tilde{u}(x,t) = e^{\sigma t} \tilde{u}(x)$$

On se ramène donc à un problème aux valeurs propres:

$$\sigma \tilde{u}(x) = L(u_B) \tilde{u}(x)$$

Nous utiliserons en permanence cette méthode de décomposition en modes propres.

Si  $u_B$  est stationnaire et indépendant de variables spatiales  $x$  et  $z$  par exemple,  $L_m$  est autonome en  $x$ ,  $z$ ,  $t$ . Par exemple l'écoulement de Poiseuille ne dépend ni de  $x$  ni de  $z$  ni de  $t$ . Si on cherche les modes tels que

$$\tilde{u} = e^{i(kx + \beta z)} e^{\sigma t} U(y)$$

Ces solutions vérifient le système aux v.p.

$$\sigma U(y) = L(u_B, k, \beta) U(y)$$

Cette procédure permet de réduire la résolution d'un PDE à un problème aux valeurs propres à une seule dimension d'espace.

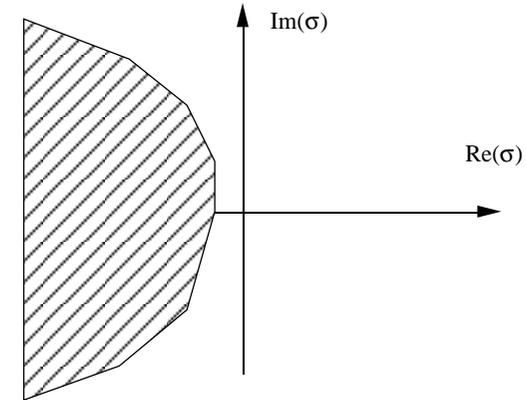
Chacun des modes propres varie exponentiellement avec un taux de croissance  $\sigma(\mu, k, \beta)$ . L'ensemble des  $\sigma$  pour tous les nombres d'onde  $k$ ,  $\beta$  mais à paramètres de contrôle fixés forme le *spectre* de l'opérateur linéarisé. Le maximum noté  $\gamma(\mu)$  des parties réelles des valeurs propres  $\sigma$  du *spectre* permet de conclure quant à la stabilité de l'écoulement de base associé. Si  $\gamma(\mu)$  est strictement positif (resp. strictement négatif) l'écoulement est instable (resp. stable).

NB Ce que nous avons fait dans l'exemple précédent n'est ni plus ni moins qu'une décomposition de Fourier et le calcul du *spectre* sans le dire

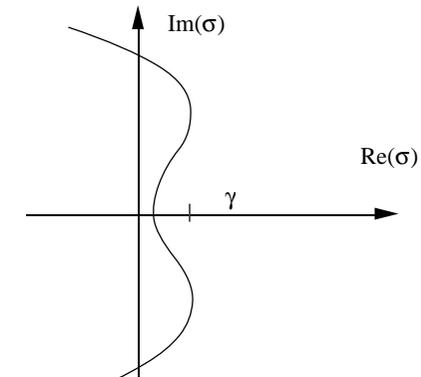
$$\sigma_n = \mu - (n\pi/L)^2 + 1)^2$$

### 6.1 Cas possibles:

On trace le lieu des valeurs de  $\sigma_n$  pour tous les paramètres: on observe les configurations suivantes:



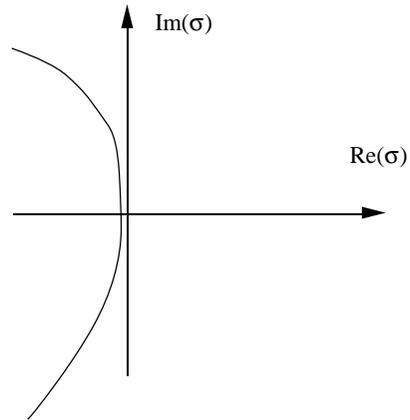
Cas stable:  $\gamma < 0$ .



instable on a  $\gamma > 0$ .

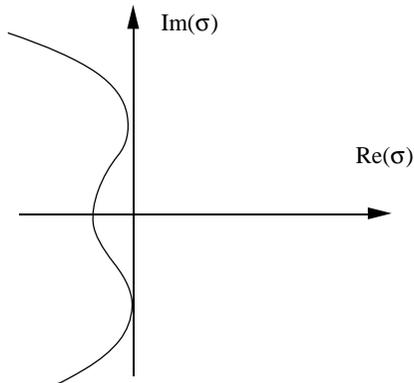
Lors de la traversé de  $\gamma=0$  deux cas particuliers peuvent se produire:

i)



On appelle cette configuration un "échange de stabilité" une valeur propre réelle s'annule.

ii)



Dans cette nouvelle configuration, on parle d'instabilité oscillatoire: apparition de deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées. C'est une "Bifurcation de Hopf" vers une solution périodique.

Si le paramètre  $\mu$  est très légèrement au dessus du  $\mu$  critique,

- une solution croît exponentiellement mais la croissance est lente (cas de la configuration

i))

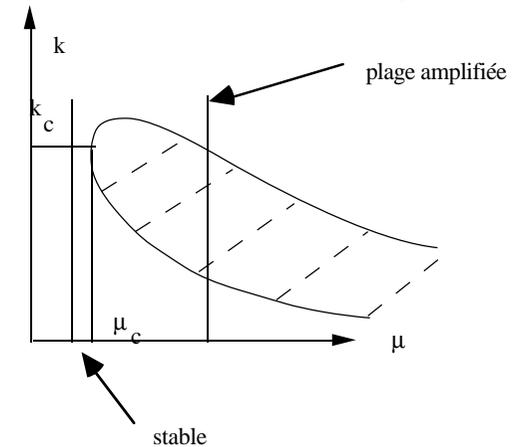
- une solution croît lentement en amplitude et en oscillant (cas de la configuration ii))

Dans les deux cas, la solution possède la structure du mode critique en particulier les nombres d'ondes  $k$  et  $\beta$  associés aux valeurs propres nulles ou imaginaires pures du spectre.

## 6.2 Notion de Courbe neutre

La courbe neutre sépare, dans le plan "nombres d'onde  $k$  -- paramètre de contrôle  $\mu$ ", la région où la partie réelle de  $\sigma$  est positive (région instable), de la région stable.

Ce graphe permet de caractériser les nombres d'ondes "dangereux".



Le nez de cette courbe indique le nombre d'onde critique  $k_c$  et le paramètre de contrôle critique  $\mu_c$ .

## 6.2 Effets nonlinéaires

Bien entendu, l'amplitude asymptotique est inconnue dans le cadre linéaire, ce sont les termes nonlinéaires qui la déterminent. Si on dépasse le seuil d'instabilité, le mode critique croît exponentiellement et devient grand. On doit alors réintroduire les termes nonlinéaires qui ne sont plus négligeables et modifient l'évolution temporelle.

Près du seuil, on sépare la dynamique en deux parties, la dynamique du mode instable, lentement croissant, et les autres modes qui sont atténués (ils décroissent vite).

Les modes atténués sont "esclaves": ils suivent rapidement le mode instable

$$A_{k \neq k_c} = G(A_{k_c}).$$

Toute la dynamique se réduit à une équation sur  $A_{kc}(t)$ , appelée équation d'amplitude:

$$\frac{dA_{kc}}{dt} = F(A_{kc}) \text{ et .}$$

On comprend ainsi l'intérêt des bifurcations que l'on a vues plus haut.

Dans le cas d'une bifurcation de Hopf, on a

$$u = A \phi + A^* \phi^* + (\text{autres modes qui décroissent})$$

où le mode  $\phi$  est associé à  $i\omega_c$ .  $A$  est donc complexe :

$$\frac{dA_{kc}}{dt} = F(A_{kc})$$

Il s'agit d'un système de dimension 2.

La dynamique se ramène près du seuil à une équation de Landau:

$$\frac{dA}{dt} = ((\mu - \mu_c) + i \omega_c) A - (a_r + i a_i) |A|^2 A$$

On retrouve l'évolution linéaire (terme en  $i \omega_c$ ). Substituons  $A = r e^{i\phi}$  dans l'équation de Landau on déduit que l'amplitude est découplée de la phase (la réciproque est fautive!):

$$\frac{dr}{dt} = (\mu - \mu_c) r - a_r r^3,$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_c - a_i r^2.$$

si  $(\mu - \mu_c) > 0$  et  $a_i > 0$  bifurcation supercritique  $r = \pm \sqrt{((\mu - \mu_c)/a_i)}$  et la phase varie dans le temps:  $\phi = \phi_0 + (\omega_c - a_i(\mu - \mu_c)/a_i)t$ . Dans ce cas, les termes non linéaires saturent l'instabilité. Un nouvel écoulement périodique en temps (brisure de la symétrie d'invariance en temps) apparaît.

## 7. Exemple de système dynamique: le Modèle de Lorenz

On rappelle les équations

$$x' = \sigma (y - x)$$

$$y' = \rho x - y - xz$$

$$z' = -\beta z + xy.$$

Ce système a été obtenu par troncature des équations de la convection naturelle (Rayleigh Bénard).  $\rho$  est l'analogue de nombre de Rayleigh  $R_a$ . On utilise souvent les valeurs "canoniques"  $\beta = 8/3 = 2.66666$  et  $\sigma = 10$ .

On note que la symétrie  $x, y, z \rightarrow -x, -y, z$  laisse invariant le système.

Étudions les points fixes:

\*) si  $0 < \rho < 1$ :

$x=y=z=0$  est un point fixe, la linéarisation autour de  $(0,0,0)$  conduit au système linéaire:

$$x' = \sigma (y - x)$$

$$y' = \rho x - y$$

$$z' = -\beta z.$$

On cherche des solutions en  $e^{\lambda t}$ , ce qui impose de résoudre un problème aux valeurs propres:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \sigma & \sigma & 0 \\ \rho & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \beta \end{pmatrix} = 0$$

*i.e.*

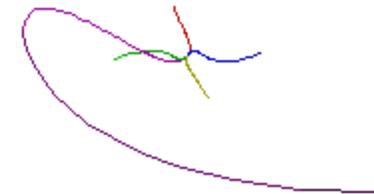
$$(\lambda + \beta) (\lambda^2 + (\sigma + 1) \lambda + \sigma (1 - \rho)) = 0.$$

On obtient trois valeurs propres,

$$\lambda = -\beta, \quad \lambda = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{((\sigma + 1)^2 - 4 \sigma (1 - \rho))}}{2}$$

Pour  $\rho < 1$  stable,  $\rho > 1$ : instable.

Par exemple, on trace pour  $\rho = 0.2$  quelques trajectoires issues de différentes conditions initiales (résolution numérique par la méthode de Runge Kutta à l'ordre 4).



5 trajectoires  $(x(t), y(t), z(t))$  aboutissant toutes au point fixe  $(0,0,0)$

On constate que plusieurs points de départ aboutissent au même endroit  $(0,0,0)$ .

\*) si  $1 < \rho < 1.34$ :

O est maintenant instable, et par ailleurs, il existe de nouveaux points fixes :

$$x = y = \pm (\beta(\rho - 1))^{1/2} \quad z = \rho - 1$$

Remarquer l'écart en racine:  $(\rho-1)^{1/2}$ , c'est à dire en  $(\rho-\rho_{\text{critique}})^{1/2}$ , caractéristique d'une bifurcation supercritique.

La symétrie du système relie ces deux solutions.

étude de la stabilité des points fixes:

Soit  $x=y=(\beta(\rho-1))^{1/2}$ ,  $z=\rho-1$ , un des points fixes (l'évolution de l'autre se déduit par symétrie), la linéarisation autour de ce point du système de Lorenz conduit à un système linéaire dont on cherche des solutions en  $e^{\lambda t}$ . Il faut résoudre à nouveau un problème aux valeurs propres:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda - \sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -\lambda - 1 & -(\beta(\rho-1))^{1/2} \\ (\beta(\rho-1))^{1/2} & (\beta(\rho-1))^{1/2} & -\lambda - \beta \end{pmatrix} = 0$$

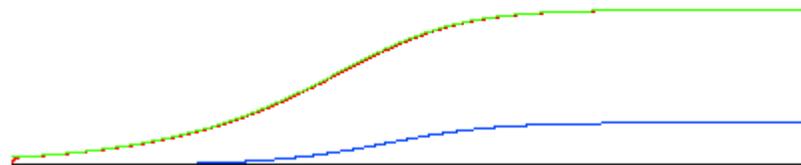
i.e.

$$-(\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + \beta + 1) + \lambda\beta(\rho + \sigma) - 2\sigma\beta(1 - \rho)) = 0.$$

On obtient trois valeurs propres.

On peut démontrer qu'elles sont réelles et négatives, puisque deux d'entre elles deviennent complexes conjuguées de partie réelle négative jusqu'à une valeur de  $\rho$  critique = 24,74 (pour les valeurs canoniques  $\beta=8/3$   $\sigma=10$ ) pour laquelle on a une bifurcation de Hopf souscritique.

application numérique:



x y et z en fonction de t, départ du point fixe précédent vers la nouvelle position d'équilibre.

Pour  $\rho=1.2$ , les orbites issues des points proches du centre (proches de (0,0,0)) s'en éloignent et se dirigent vers la nouvelle position d'équilibre sans oscillations. On s'éloigne du premier point fixe (déstabilisation du point fixe correspondant à  $\rho < 1$ ) vers l'un des deux autres (saturation) qui est stable.

idem on trace 4 trajectoires:

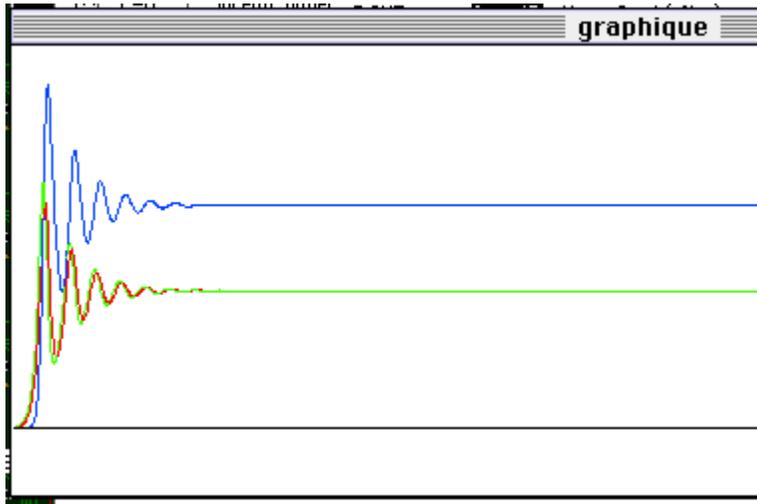


4 trajectoires  $(x(t), y(t), z(t))$ , et deux points fixes.

Plusieurs points de départ aboutissent au même endroit: soit un point fixe, soit l'autre, mais le bassin d'attraction est différent.

\*) si  $1.34 < \rho$  une racine réelle et 2 complexes conjuguées: reste stable. Dans ce cas, l'approche vers la position d'équilibre s'effectue en oscillant.

Par exemple, si  $\rho=8$ :



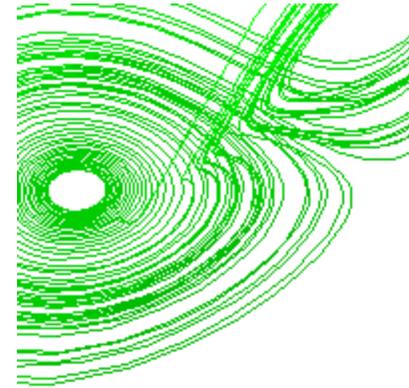
x y et z en fonction de t

\*) si  $24.74 < \rho$

Le comportement devient beaucoup plus complexe: il est apériodique. On observe le célèbre attracteur étrange. Par exemple  $\rho=28$ :

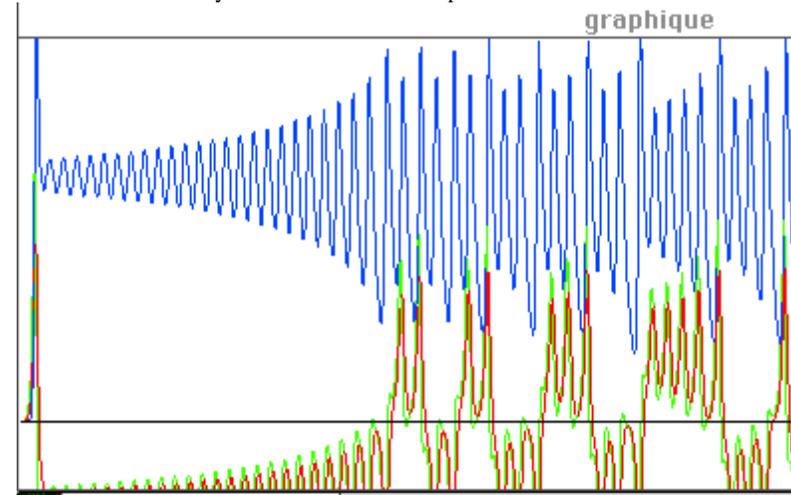


une trajectoire  $(x(t),y(t),z(t))$



une trajectoire  $(x(t),y(t),z(t))$

On trace ci dessous x y et z en fonction du temps:



x y et z en fonction de t

## 8. bibliographie pour ce chapitre:

Manneville  
 Bergé Pomeau Vidal.  
 Numerical Recipes in C.