# M2EMN

# Master 2 Ecoulements en Milieu Naturel

P-Y Lagrée + M2EMN

Institut d'Alembert, Sorbonne Université CNRS version du July 8, 2025

Cours de Master SU: MU5MEF05 - Écoulements et Transferts en Milieu Naturel (P.-Y. Lagrée)

 $Agenda: \ https://sciences.sorbonne-universite.fr/formation-sciences/masters/master-de-mecanique/parcours-mecanique-des-fluides-fondements-et#m2msh$ 

2024-2025 vendredi., 08:45 - 12:45 Salle: 46-56.110 (12P +  $Vid\'{e}o$ )

exam le 2X Février 2025

Basilisk http://m2.basilisk.dalembert.upmc.fr/sandbox/PYL/README

Moodle https://moodle-sciences.upmc.fr/moodle-2022/course/view.php?id=4002

Il s'agit d'étudier les écoulements de fluides non newtoniens en couche mince modélisant les écoulements de boue ou de matériaux granulaires. Pour fixer les idées on commence par le cas laminaire.

### 1 Introduction

#### 1.1 Contexte

Nous nous sommes déjà intéressés aux écoulements d'eau à surface libre pour les vagues (houle de Airy et introduction à la dispersion) :

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEhoule.pdf et pour les écoulements côtiers ou rivières (équations de Saint-Venant, équations en eaux peu profondes): http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf. et pour les écoulements souterrains (équations de Darcy et de Dupuit pour des nappes d'eau captives):

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv\_aquifere.pdf.

Nous continuons à nous intéresser aux écoulements en milieu naturel, tels que chute de pierres, éboulement, écroulement, glissements de terrains (landslide), coulée de boue (mudflow), lave torrentielle (attention: il s'agit d'un mélange de roches, rochers, arbres, terre, en anglais debris flow), lahars (coulée boueuse dont l'eau est issue de la neige fondue par l'activité volcanique), coulée de lave (lava flows), avalanche de neige.... mais aussi écoulement du béton, du ciment (fig. 66)... Le fluide change, mais les idées de simplification demeurent.

Il s'agit d'écoulements maintenus en mouvement par la gravité (notée g): ce sont des "écoulements gravitaires". Les forces de friction freinent ces écoulements. Toute la difficulté est là car on connaît mal la forme de ces termes de dissipation d'énergie pour les écoulements de cailloux, de boue ou de neige.





Figure 1: deux captures d'écran issues de "Epic Landslide captured in video in french Alps april 19, 2013" [13] à la via ferrata de St-Christophe-en-Oisans montrant qu'un écoulement de matériaux différents (roches, boue, neige...) ressemble de loin à un écoulement fluide en couche mince. (Attention: contenu sexuel explicite)

On suppose que l'on regarde de loin ces écoulements. La figure 2 issue de "Epic Landslide captured in video in french Alps april 19, 2013" [13] est un exemple type que l'on peut trouver sur le ouèbe. On voit alors que ces écoulements sont généralement en couche mince, l'avalanche s'étend sur une distance grande par rapport à son épaisseur.

Cette observation nous servira d'hypothèse fondamentale par la suite car nous étudierons encore principalement des écoulements en couche mince. Par rapport à la description stricte Saint-Venant de :

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf. nous allons aussi nous poser des questions sur la rhéologie du fluide.

#### 1.2 in situ

Sur le terrain, on peut observer et mesurer différents paramètres (locaux ou globaux) tels que :  $h_m$  : l'épaisseur max de la couche en mouvement,  $L_m$  : longueur max de l'écoulement,  $t_m$  : la durée, u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z) : les vitesses, h(x,y,t) la surface complète de l'écoulement, mais aussi la densité, la composition etc. On prendra des échantillons que l'on passera dans un rhéomètre...

Cependant, il n'est pas évident du tout du tout de collecter toutes ces données - avant, pendant, après - l'écoulement: les évènements naturels ne génèrent pas de big data!

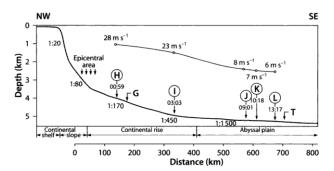


Fig. 4.2. The Grand Banks earthquake of 1929 and subsequent cable breaks. Longitudinal profile of the ocean bottom along the postulated paths of the sediment-gravity flow and turbidity current. Arrows show the position or projected position of the breaks. The timing of those not broken immediately are indicated (e.g., 00:59, signifying 59 min after the earthquake). The ratio (e.g., 1:20) shows the slope gradient. Gravel deposit (G) is present at the base of the slope, and turbidite (T) on the abyssal plain. The postulated speed of the current (in knots) is shown by the upper diagram. The profile has a vertical exaggeration of 60 ×

Figure 2: Issu de Plapp [36], "Grand Banks 1929" : la première avalanche sous marine observée de tous les temps (et ce de manière indirecte): elle détruisit les lignes téléphoniques sous marines.

• Lors de glissements de terrains des avalanches sous marines peuvent se former. Elles dévalent les pentes continentales en entraînant du sable, des roches et des sédiments. Avant 1929, elles étaient inconnues car jamais observées. Leur étude est importante par exemple pour la modélisation d'empilement de dépôts sous marins (couches géologiques de sédiments, intérêt en recherche pétrolifère), leur extension peut bouleverser la faune et la flore (et faire du pétrole au bout de dizaines de mil-

lions d'années). L'avalanche sous marine peut détruire des pipelines, l'avalanche peut aussi détruire les lignes téléphoniques sous marines (ex. Grand Banks 1929, Nice 1979) et c'est comme cela que l'on a découvert le phénomène. De nos jours elles peuvent être une cause naturelle de coupure des communications internet, de plus, l'avalanche crée en surface une vague qui peut produire des mini raz de marée mortels (Nice 16 oct 1979).

- 1966 effondrements de terrils Irlande https://fr.wikipedia.org/wiki/Catastrophe\_d%27Aberfan
- Noter l'actualité et les récentes (2017) avalanches de neige meurtrières, article du monde sur un point sur les recherches à Grenoble sur les avalanches de neige: http://www.lemonde.fr/sciences/article/2017/02/06/la-science-mouvante-des-avalanches\_5075339\_1650684.html.
- Un article de 2014 montrant que le journaliste oppose pour les besoins de la polémique deux chercheurs qui n'ont en réalité aucun différents car sachant parfaitement chacun les limites de leur approche, à lire au second degré: http://www.lemonde.fr/sciences/article/2014/02/24/des-modeles-d-avalanches-brumeux\_4372452\_1650684.html, car effectivement les modèles marchent mal, mais en suivant ce cours vous participez à leur amélioration.
- Au brésil, une rupture de barrage provoque en 2015 une coulée de boue rouge toxique

toxique https://www.lemonde.fr/planete/article/2015/11/17/catastrophe-ecologique-au-bresil

- 4811803\_3244.html, En 2018 "Le Rio Doce fleuve mort" le monde 2018

   Au Pérou à Llusco un glissement de terrain en 2018: https://geomodelsvt.
  wordpress.com/2019/06/19/a-sand-model-landslide-compared-to-the-2018-llusco-event-
- People swept away by mudslide as mountainside collapses in Bolivia Astonished face (Feb 4, 2019). A mudslide in Bolivia was captured on camera as people attempted to traverse a track on foot in an area of the mountains north-east of Sucre. https://www.youtube.com/watch?v=ZtLaEKaI13g
- https://www.youtube.com/watch?v=ztVIBlDnYfI&t=18s "Top-5 Massive land-slide Caught on Camera"
- Le plus grand glissement de terrain en 2015 non volcanique https://blogs.agu.org/landslideblog/2016/01/02/tyndall-glacier-landslide-1/
- On the 29th of April 1978, a quick clay landslide devastated large areas of the rural district of Rissa I mid-Norway. One person died whilst 13 farms; 2 homes; a cabin and a community centre were taken by the clay masses. https://www.youtube.com/watch?v=3q-qfNlEP4A
- 7 févr. 2014 Lawine Passeier Südtirol Valanga Alto Adige Avalanche South Tyrol (avalanche aérienne, puis dense, remarque le faible cisaillement) https://www.youtube.com/watch?v=f5waSw2mMfY

# 1.3 Evénements des Actualités et historiques

- Mégatsunami de 1958 de la baie Lituya créé par une avalanche https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9gatsunami\_de\_1958\_de\_la\_baie\_Lituya Noter l'actualité de fin mai/ juin 2018 avec de nombreuses coulées de boue , si on cherche "coulée de Boue" dans Google en juin 2018:
- L'orage provoque des coulées de boue dans le Fezensac ladepeche.fr-2 juin 2018
- Orages, coulées de boue, inondations : le Bas-Rhin frappé par de ... Le Figaro-1 juin 2018
- Après les coulées de boue en Alsace, l'heure est à l'expertise des ... LCI-2 juin 2018
- Coulées de boue, routes coupées, inondations... Les orages ont ... Le Parisien-1 juin 2018
- Les inondations et coulées de boue s'enchaînent cette semaine dans tout le pays à cause du nombre exceptionnel d'orages qui se produisent. Orages violents : inondations, coulées de boue, routes coupées dans ... Source locale-Franceinfo-31 mai 2018
- Après les coulées de boue, la solidarité DNA Dernières Nouvelles d'Alsace-2 juin 2018
- Pluies et orages : pour les sinistrés, l'heure du nettoyage Franceinfo-2 juin 2018
- EN IMAGES. Orages : Coulées de boue, inondations, incendies, retour ... Ouest-France-30 mai 2018
- En moins de dix minutes, plusieurs torrents de boue ont dévalé les rues du village d'Amou (Landes). Vers 20 heures hier soir, il est tombé plus ... Des maisons inondées et des coulées de boues dans les Landes ... Source locale-France Bleu-30 mai 2018
- $\bullet$  Pilote d'avion, il photographie les coulées de boue dues à l'agriculture ... POSITIVR-1 juin 2018
- $\bullet$  Intempéries au Japon : au moins 100 morts, le premier ministre Abe annule ses voyages Les pluies torrentielles, qui ont ravagé l'ouest du pays, ont provoqué inondations et glissements de terrain. LE MONDE 09.07.2018 à 08h44 Mis à jour le 09.07.2018 à 12h42 —
- coulée de boue meurtrière de Brumadinho 2019

https://www.lemonde.fr/tiny/5414724/#xtor=AL-32280270 Le Monde.fr avec AFP — 26.01.19 — 16:22

https://www.lci.fr/international/video-bresil-les-images-siderantes-de-la-coulee-de

- https://www.youtube.com/watch?v=6KXGI63qWHI Vésubie et vallée de la Roya, inondation et glissements de terrain octobre 2020
- Le Puy-de-Dôme balayé par les orages, coulée de boue à Sauvagnat-Sainte-Marthe Lundi 28 juin 2021

- Dans le centre du Japon, deux morts et une vingtaine de disparus dans des coulées de boue Publié le 04/07/2021 à 00:52 https://www.lemonde.fr/international/article/2021/07/04/dans-le-centre-du-japon-une-vingtaine-de-personnes-portees-disp6086908\_3210.html#xtor=AL-32280270-%5Bmail%5D-%5Bios%5D
- importantes inondations en novembre 2021 au Canada, dans le sud-ouest de la Colombie-Britannique, provoquant des glissements de terrain. Plusieurs personnes sont portées disparues.
- Localité de Gjerdrum ravagée le 30 décembre 2021 par un glissement de terrain qui a fait sept morts et trois disparus. Le lieu du sinistre, un périmètre d'environ 300 x 700 mètres. La terre qui a glissé est une argile spécifique, présente en Norvège et en Suède, qui peut se fluidifier et s'effondrer rapidement. https://www.lemonde.fr/international/article/2021/01/04/glissement-de-terrain-en-norvege-les-s
- 6065184\_3210.html
   Italie, 26 Novembre 2022, un glissement de terrain meurtrier frappe l'île d'Ischia
- $\bullet$  En Colombie, 7 décembre 2022 un glissement de terrain a causé la mort de 34 personnes
- Dans l'Himalaya, une ville de 20 000 habitants menace de s'effondrer La ville de Joshimath, en Inde, est victime de travaux routiers et hydrauliques voulus par Narendra Modi pour développer massivement le tourisme religieux dans cette région. https://www.lemonde.fr/planete/article/2023/01/10/dans-l-himalaya-une-ville-6157270\_3244.html "Les catastrophes se multiplient pourtant dans l'Himalaya. En février 2021, non loin de Joshimath, un tsunami des montagnes, provoqué par une avalanche de roc et de glace, avait ravagé le district de Chamoli, emportant une centrale électrique où travaillait un grand nombre d'ouvriers, faisant 200 morts. En juin 2013, des inondations massives avaient fait plus de 5 000 victimes."
- Brienz, village suisse, menace de s'effondrer mai 2023
- En Papouasie-Nouvelle-Guinée: un glissement de terrain fait au moins deux mille morts, 23-24 mai 2024 https://www.lemonde.fr/international/article/2024/05/27/papouasie-nouvelle-guinee-l-important-glissement-de-terrain-a-fait-au-moins-6235800\_3210.html
- 02 février caillou sur la RN90 en savoie
- Effondrement de falaise à Port en Bessin

etc.

après de fortes pluies

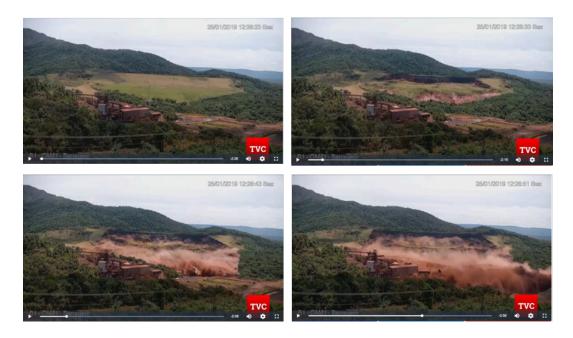


Figure 3: Coulée de boue de Brumadinho, Observation de l'effondrement de tout le pan de montagne, on pourrait modéliser cet effondrement par un triangle se détachant https://www.koreus.com/video/rupture-barrage-brumadinho.html



Figure 4: Coulée de boue de Brumadinho, France 2 https://www.francetvinfo.fr/replay-jt/france-2/20-heures/jt-de-20h-du-vendredi-1-fevrier-2019\_3141489.html, images en aval des précédentes.



Figure 5: Issu de Tintin le Lotus bleu, 1935. En 1931, suite à des cyclones exceptionnels le Yang-Tsé-Kiang est en crue et provoque de nombreux glissements de terrain. Une inondation de 1.7 m durant deux mois dévaste la région de Hankou. 4 millions de pertes humaines, plus de 10 millions d'individus se retrouvent sans habitation. https://tintinomania.com/tintin-en-savoir-plus-lotus

#### Quelques exemples sur Youtube

- Hill Collapse Earthquake Nepal 2015 https://www.youtube.com/watch?v= jwPdEHsQoSM
- Massive hills down nepal 2015 https://www.youtube.com/watch?v=KXI7vMyqO5s
- Dart Landslide January 2014 https://www.youtube.com/watch?v=Y6vs\_lnBqwY
- landslide caught on tape https://www.youtube.com/watch?v=7RKSNTUORsY
- Glissement de terrain filmé en direct https://www.youtube.com/watch?v=\_yVu53jR2Mc
- Illgraben 28 juillet 2014, front de lave https://www.youtube.com/watch?v=43R3mjiNBKc
- Illgraben le torrent fou et ses laves torrentielles https://www.youtube.com/watch?v=GsWDVCNHA\_4
- Raw Footage of Gigantic Mudflow in Austria https://www.youtube.com/watch?v=RR400jDr0w8
- AGU 2012 Real-scale field experiment of debris flow https://www.youtube.com/watch?v=8CHF11fI1-c
- Amazing Mega Flood At Dam In Taiwan https://www.youtube.com/watch? v=vFQTDuFecLw
- volcano Web Shorts: Debris Flows https://www.youtube.com/watch?v=dx6ZQObNMmg
- Debris Flow Dynamic 1 of 3 https://www.youtube.com/watch?v=zpGP1uoCHr4s
- Debris flow, awesome rockfall in Afghanistan https://www.youtube.com/watch?v=mnIOd8iqfNU
- Illgraben 22.07.2013, arrivée du front illgraben https://www.youtube.com/watch?v=XNLYFyK5ZZc
- Big Avalanches YouTube Avalanches 101, Video Choc Glissement Terrain San Fratello Italie France2 Blogparfait https://www.youtube.com/watch?v=6JxmFHFGF2I

- Devastating Avalanche accident caught on Camera, destroys houses https://www.youtube.com/watch?v=6JxmFHFGF2I
- Mount Ruapehu avalanche Big Avalanche at Mt Ruapeu/ NZ YouTube
- Manival debris flow https://www.youtube.com/watch?v=rQj\_WKsxuGM
- cornwall 2011 https://www.youtube.com/watch?v=QdsxtCtX5nk
- https://www.youtube.com/watch?v=oyBvARsJUYI
- https://www.youtube.com/watch?v=aajUXQmec-Q
- https://www.youtube.com/watch?v=BKTG58Bpziw
- https://www.youtube.com/watch?v=WEQrt\_w7gN4
- North Cliffs Failure Amazing Cliff Collapse caught on Camera! https://www.youtube.com/watch?v=ZVjr4mii3cE
- Cliff fall at Birling Gap 4/3/14 https://www.youtube.com/watch?v=ffxCBnrATe8
- "tsunami landslide" 2016? https://www.youtube.com/watch?v=1sKKULTp3mA
- Malaysia Landslide st helen https://www.youtube.com/watch?v=K5pidzTZslo
- Mt St Helens blast and landslide recreation mov Mount St. Helens Disintegrates in Enormous Landslide https://www.youtube.com/watch?v=UK--hvgP2uY
- Epic Landslide Captured On Video In French Alps April 19, 2013 https://www.youtube.com/watch?v=SlGTirtRP4c https://www.spi0n.com/avalanches-de-printemps/
- Incredible Rock Slide Caught on Tape https://www.youtube.com/watch?v=w40JgaKNihY
- Dramatic amateur footage of deadly mudslide in Colombia https://www.youtube.com/watch?v=BKTG58Bpziw
- https://www.youtube.com/watch?v=iciLigLgsWc Biggest landslides worldwide 12:32
- https://www.youtube.com/watch?v=KGh4g399wpc&list=PL153CDBA27D796CEC

- https://www.youtube.com/watch?v=mknStAMiaOQ&index=4&list=PL153CDBA27D796CEC
- mudflow brésil https://www.youtube.com/watch?v=XvIg6oI\_Obg
- inondations survenues à Trèbes dans l'Aude 15-octobre-2018 https://www.francetvinfo.fr/replay-jt/france-2/20-heures/jt-de-20h-du-lundi-15-octobre-202959049.html
- "Pacifica" érosion de la côte aux US, recul en 20 ans https://www.youtube.com/watch?v=CzrymETf9hY
- Vésubie octobre 2020 https://www.youtube.com/watch?v=6KXGI63qWHI Vésubie inondation et glissements de terrain octobre 2020
- Brienz, mai 2023 https://www.youtube.com/watch?v=2CX4aJE1Fmg Brienz, village suisse, menace de s'effondrer
- Environ 700 mètres cubes de roche se sont effondrés, dimanche 27 août, ur la commune de Saint-André vers 17 h 15. La circulation ferroviaire entre la France et l'Italie est interrompue jusqu'au 31 août minimum. https://www.youtube.com/watch?v=X-HoEpWwZmc
- Lave torrentielle au Hameau du Tour en Haute Savoie, https://www.france.tv/france-2/journal-20h00/5394822-edition-du-lundi-20-novembre-2023.html
- Glissement de terrain à Habère-Poche, 14/12/2023 https://www.tiktok.com/@hautesavoiedepartement/video/7312506807677717793?lang=fr

# 1.4 Plan et Objectifs

Etant convaincus de l'existence de ces écoulements et de l'intérêt pratique de la comprendre et de les éviter, passons à leur "modélisation".

On veut "modéliser" un écoulement de boues et de cailloux.

Nous allons définir dans la section 1 ce qu'est un "modèle" et simplifier au maximum (géométrie, rhéologie...) ce problème complexe. Nous considérons l'effondrement sous gravité g d'un tas de fluide Newtonien très visqueux (de viscosité dynamique  $\nu$ ) et très lourd par rapport à l'air qui l'entoure. Ce problème sera considéré comme une simplification pertinente de nombre de problèmes. Nous regarderons dans un premier temps ce que l'on peut dire avec le  $\Pi$ -théorème puis, nous trouverons des lois d'échelle en estimant les ordres de grandeurs en jeu (par une analyse dimensionnelle épaulée par des considérations mécaniques). Ensuite, nous examinerons les équations du mouvement (Navier Stokes) en tenant compte du fait que la couche est mince (équation encadrée (Eq. 20)). En intégrant ces équations nous obtiendrons une équation portant sur l'épaisseur du tas en fonction du temps h(x,t) et de l'espace (équation encadrée (33)):

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{g}{3\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 \text{ avec la donnée de } h(x, t = 0).$$

Nous résoudrons le problème dégagé numériquement en volumes finis puis par une solution exacte auto semblable (car c'est possible ici), et nous montrerons quelques autres écoulements en couche mince visqueuse gouvernés par la gravité. Ce problème s'appelle aussi le "problème de Huppert" puisqu'il l'a posé et résolu en 1982. Les écoulements géophysiques de type écoulement de lave étaient parmi les motivations de Huppert.

Ceci sera fait en Newtonien tout le long de la section 2. La section 3 sera consacrée aux fluides de Bingham qui sont non newtoniens (pour la boue, le béton...). On traitera les mêmes exemples de collapses lents de tas sur un fond plat puis incliné.

Enfin, nous parlerons des milieux granulaires en écoulement dans la section 5.

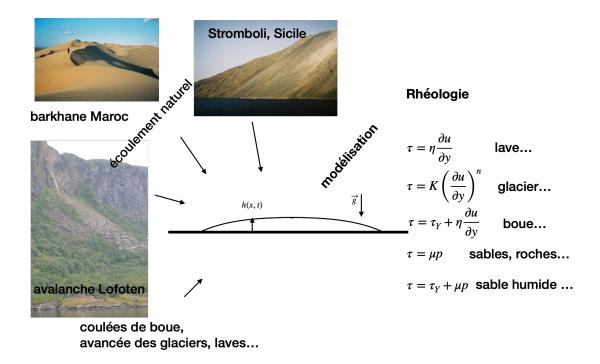


Figure 6: La "réalité" et sa modélisation, résumé visuel de ce cours

#### 1.5 in vitro

En Mécanique, on insiste sur la notion de "modélisation" et sur le fait que l'on fait des maquettes à l'échelle réduite (par exemple les avions dans une soufflerie, par exemple les bateaux en bassin d'essais des carènes, par exemple des maquettes de barrage dans la halle technique du centre de recherche EDF de Chatou...). Maquette se dit en anglais: *Model*, d'où "modélisation". Rappelons que "le mot modèle serait un emprunt à l'italien *modello* du XVIe siècle. Il était alors employé dans le sens d'une représentation miniature de ce qui sera construit en grand (au sens de "modèle réduit")" [source wikipedia https://fr.wiktionary.org/wiki/mod%C3%A81e].

Nous ferons une différentiation entre différents modèles en fonction de ce que l'on souhaite observer. Par exemple, une maquette de bateau que l'on pose sur une cheminée, n'est pas une maquette que l'on fait naviguer sur un canal. Dans les deux cas c'est pourtant une maquette, mais dans le premier on cherche le réalisme représentatif pur, dans l'autre on veut faire flotter et avancer le vaisseau pour extrapoler au vrai bateau. En anglais/américain on emploie aussi le mot "mockup", ou "mock-up" mais dans ce cas il s'agit plus d'un prototype à l'échelle 1:1 [source wikipedia https://fr.wiktionary.org/wiki/mockup], "mok-up" est une déformation de "maquette" prononcée par un anglosaxon.

Une fois que l'on a construit cette maquette, on fait des mesures dessus de l'écoulement. Par exemple on fait des captures photographiques ou à la caméra (le logiciel pour traitement video ImageJ [29] permet d'extraire d'un film des mesures de hauteurs, de vitesses..., il est très utilisé au laboratoire pour capturer des mouvements). Bien sûr d'autres nombreuses techniques de mesures existent. Puis, pour extrapoler de la maquette au vrai objet, on utilise les techniques de Similitude (l'art du changement d'échelle).



Figure 7: Différents *Modèles* de bateaux à voiles, en haut à gauche, un "vrai" bateau: "L'Étoile Molène", dundee thonier construit en 1954 (photo PYL), en haut à droite, "l'Étoile du Roy" trois-mâts réplique (maquette à l'échelle 1:1) proche d'une frégate britannique (type sixième rang de 20 canons) du XVIIIème siècle construit en 1996 (photo PYL), au centre à gauche une maquette de bateau navigant sur le plan d'eau du Luxembourg vers 1995 (bateau et photo PYL), au centre à droite, la maquette d'exposition "La Licorne" de Tintin (1943), D.R. Hergé (double modèle, car un dessin est aussi un modèle en tant que représentation simplifiée à l'échelle réduite). En bas, encore d'autres modèles renvoyant au bateau: bateau en papier, et coque de noix. En haut à droite un modèle numérique *Gerris*, en bas à droite polaires d'un voilier Océanis 31 Bénéteau, modèle numérique pratique de bateau.

Pour l'avalanche ou l'écoulement géophysique sur une montagne, la maquette ou le modèle le plus simple est une pente droite caractérisée par un angle  $\theta$ . Un plan incliné simple est le "modèle" le plus simple de montagne.

Sur la pente, on peut faire s'écouler du sable, ou du sable avec de l'eau. En laboratoire, on utilise par exemple des billes de verre pour les avalanches sèches et du "carbopol" (qui est un fluide à seuil, pour les écoulements de débris). Actuellement, ceci est un sujet de recherche nommé "écoulements de fluides complexes" (granulaires mais aussi fluides à seuil). Ce domaine est très actif notamment dans la communauté française.

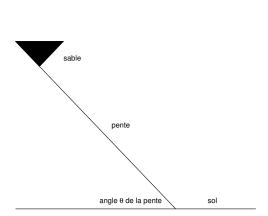




Figure 8: Gauche schéma (donc modèle) simplifié d'une expérience possible: un réservoir en hauteur est placé en haut d'un plan incliné. Droite réalisation expérimentale (expérience, donc modèle expérimental, faite à  $\partial$ 'Alembert [41]) d'un plan incliné pour étudier les avalanches de grains de billes de verre. Il s'agit d'un modèle d'avalanche sur une montagne...

Bien entendu, les communautés moins mécaniciennes sont réticentes à ces modélisations et pensent qu'un écoulement de billes de verre ne sera jamais représentatif d'une avalanche de roches. En effet, les cailloux ont des tailles diverses, il y a de la terre avec des l'herbe et des arbres, la montagne est bosselée, le zones sont plus ou moins humides... Tout cela va modifier l'écoulement et le complexifier, ce qui ne peut être rendu par les modèles simples. Certaines communautés s'en amusent et parlent de manips de "bac à sable" (sous entendu: les mécanos sont des enfants qui jouent... ça nous va!).

On aura compris que la démarche de modélisation est très puissante et a permis toutes les réalisations de l'ingénierie moderne (bateaux, avions, voitures, centrales, éoliennes, hydroliennes, ponts, etc). Cette démarche va à l'envers de celle de complexification voulant rajouter trop de détails dont les effets sont inconnus et noyés dans la méconnaissance des paramètres initiaux. Cette controverse fait partie de la nature de la modélisation.

Récemment, on parle de "jumeaux numériques", il ne s'agit en fait que de modèle de plus en plus performant et de plus en plus interagissant : https://www.ibm.com/fr-fr/topics/what-is-a-digital-twin "Un jumeau numérique est un modèle virtuel conçu pour refléter fidèlement un objet physique. L'objet étudié — par exemple, une éolienne — est équipé de divers capteurs liés à des domaines vitaux de sa fonctionnalité. Ces capteurs produisent des données sur différents aspects des performances de l'objet physique, comme la production d'énergie, la température, les conditions météorologiques, etc. Ces données sont ensuite transmises à un système de traitement et appliquées à la copie numérique."

C'est bien cela, un jumeau est un modèle, ni plus ni moins.

Enfin, pour terminer cette longue introduction, il faut ici laisser parler Madame du Châtelet (1706-1749) (https://fr.wikipedia.org/wiki/Emilie\_du\_Chatelet), dont Voltaire était l'amant, elle a traduit les "principia" de Newton et elle a écrit le premier livre de physique, en fait de mécanique du point "Institutions de Physique 1740" https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k75646k. Elle fut une des premières à comprendre la différence entre mv et  $mv^2/2$ . Dans ce livre, elle insiste bien sur l'importance de l'observation et de l'expérience avant la théorie "Souvenez-vous, mon fils, dans toutes vos Etudes, que l'Expérience est le bâton que la Nature a donné à nous autres aveugles, pour nous conduire dans nos recherches; nous ne laissons pas avec son secours de faire bien du chemin, mais nous ne pouvons manquer de tomber si nous cessons de nous en servir; c'est à l'Expérience à nous faire connaître les qualités Physiques, & c'est à notre raison à en faire usage & à en tirer de nouvelles connaissances & de nouvelles lumières".

La conclusion est qu'il faut faire des modélisations théoriques en s'appuyant toujours sur l'expérience (l'expérience de laboratoire étant elle même une modélisation)...



Figure 9: Emilie du Châtelet (1706- 1749), siècle des Lumières

# 2 Cas des écoulements newtoniens: Premier exemple, effondrement simple d'un fluide initialement en tas sur un sol horizontal

Ce premier exemple est consacré au modèle le plus simple d'effondrement d'une montagne. On considère que le matériau fluide est un fluide visqueux de viscosité constante.

# 2.1 Premier exemple, effondrement simple d'un fluide initialement en tas sur un sol horizontal: le "sploutch" slump, premier problème de Huppert

Dans ce premier exemple, nous examinons l'effondrement très simplifié d'un fluide initialement en tas sur un sol horizontal en 2D. Cela peut aussi être interprété comme une double rupture de barrage. Cette solution de rupture de barrage (dam break) a été étudiée en fluide parfait dans le cours sur Saint-Venant. Nous commençons par le cas Newtonien simple ce qui va nous permettre de fixer les idées par la suite. C'est donc le modèle le plus simple d'écoulement d'un fluide sous son propre poids. Cet exemple est présenté dans [23] (problème de Huppert) qui est l'article fondamental (on lira aussi [24] qui présente une perspective des écoulements gravitaires dont Huppert est spécialiste).

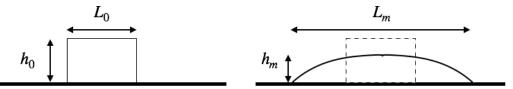


Figure 10: Schéma simplifié du "sploutch": un tas de dimension  $L_0$  et  $h_0$  à t=0 s'effondre sur lui même sous l'action de la gravité g. Soient  $h_m$  sa hauteur maximum caractéristique et  $L_m$ , l'ordre de grandeur de l'extension maximale tous les deux au bout d'un temps caractéristique t. On cherche à estimer  $h_m$  et  $L_m$  au cours du temps.

#### 2.2 Il théorème, Ordres de grandeur, loi d'échelle

# 2.2.1 $\Pi$ théorème, premier choix de nombres sans dimension, cas non visqueux

Nous avons disons  $h_0$  et  $L_0$  la taille initiale (hauteur longueur) du tas, nous avons la gravité g qui est motrice et c'est tout. Si on veut la hauteur maximale  $h_m$  en fonction du temps t, on a 6 paramètres  $(h_m, t, h_0, L_0, g, \rho)$  et trois unités (longueur, temps et masse), donc 6-3=3, on peut construire trois nombres sans dimension. Comme les longueurs et g et t n'ont pas de dimensions de masse,  $\rho$  ne joue pas. Il reste 5-2=3 nombres sans dimension. Par exemple  $h_m/h_0$ ,  $h_0/L_0$  et  $h_0/(gt^2)$ . On peut donc proposer:

$$h_m = h_0 f_0(\frac{h_0}{L_0}, \frac{gt^2}{h_0}).$$

ou

$$h_m = h_0 f_1(\frac{h_0}{L_0}, \frac{gt^2}{L_0}), \text{ ou } h_m = h_0 f_2(\frac{h_0}{L_0}, \frac{t}{\sqrt{h_0/g}}) \text{ ou } h_m = h_0 f_3(\frac{h_0}{L_0}, \frac{t}{\sqrt{L_0/g}})...$$

Par la suite, nous faisons semblant de ne pas voir que  $\frac{gt^2}{h_0}$  est un nombre sans dimensions pertinent.

# 2.2.2 $\Pi$ théorème, premier choix de nombres sans dimension, cas visqueux

Nous avons disons  $h_0$  et  $L_0$  la taille initiale du tas, nous avons la gravité g qui est motrice et la viscosité  $\nu$  qui dissipe. Si on veut la hauteur maximale  $h_m$  en fonction du temps t, on a 7 paramètres  $(h_m, t, h_0, L_0, g, \mu, \rho)$  et trois unités (longueur, temps et masse), donc 7-3=4, on peut construire quatre nombres sans dimension.  $h_m, h_0, L_0$  sont des longueurs, restent  $g, \mu, \rho$  et t. Comme  $\nu = \mu/\rho = [L^2]/[T], g = [L]/[T]^2$  le rapport  $\nu/(gt) = [L]$  est une nouvelle longueur, et  $g^2t^3/\nu$  est sans dimension. On peut donc proposer:

$$h_m = \frac{\nu}{qt} f_1(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0 qt}, \frac{g^2 t^3}{\nu}),$$

Dans cette analyse  $L_m$  est une autre observable et n'est donc pas considérée comme un  $8^{\text{ème}}$  paramètre. Et de même on pourra écrire

$$L_m = \frac{\nu}{gt} f_2(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0 gt}, \frac{g^2 t^3}{\nu}).$$

Lors de l'analyse du problème, on peut des fois rajouter des variables qui seront en fait peu pertinentes. Ainsi, on aurait aussi pu rajouter un paramètre  $P_0$  la

pression extérieure exercée à la surface. Si on veut la hauteur maximale  $h_m$  en fonction du temps t, on a maintenant 9 paramètres (notons que  $\rho$  va jouer avec  $P_0$ ), ce qui donne  $(h_m, t, h_0, L_0, g, \mu, \rho, P_0)$  et trois unités (longueur, temps, masse), donc 8-3=5, on peut construire cinq nombres sans dimension, un de plus qu'avant, par exemple:

$$h_m = \frac{\nu}{gt} f_3(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0 gt}, \frac{P_0}{\rho g h_0}, \frac{g^2 t^3}{\nu})$$

C'est pire qu'avant ! Mais, on verra que la bonne condition est une pression nulle à la surface, donc qu'effectivement

$$h_m = \frac{\nu}{qt} f_3(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0 qt}, 0, \frac{g^2 t^3}{\nu}) = \frac{\nu}{qt} f_1(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0 qt}, \frac{g^2 t^3}{\nu}).$$

#### 2.2.3 Il théorème, second choix de nombres sans dimension

Nous venons de choisir, un peu par hasard pour le choix des rapports:

$$h_m = \frac{\nu}{qt} f_1(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0 qt}, \frac{g^2 t^3}{\nu}),$$

en divisant  $h_m$  par  $h_0$  on fait apparaître  $h_m/h_0 = \frac{\nu}{h_0gt}f_1(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0gt}, \frac{g^2t^3}{\nu})$ . Donc  $h_m/h_0 = f_4(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0gt}, \frac{g^2t^3}{\nu})$  puis en multipliant  $\frac{\nu}{h_0gt}$  par  $\frac{g^2t^3}{\nu}$  on obtient  $\frac{gt^2}{h_0}$ . Enfin, en multipliant  $\frac{\nu}{h_0gt}$  au cube par  $\frac{g^2t^3}{\nu}$  on obtient  $\nu^2/gh_0^3$ , remultiplié par  $\frac{h_0}{L_0}$ , au cube cela donne  $\nu^2/gL_0^3$  en prenant l'inverse:

$$\frac{h_m}{h_0} = f_5(\frac{h_0}{L_0}, \frac{gt^2}{h_0}, \frac{gL_0^3}{\nu^2}).$$

- $h_m/h_0$  est le rapport représentant l'effondrement relatif du tas.
- $\bullet h_0/L_0$  est le rapport d'aspect initial.
- $\frac{gt^2}{h_0}$  est un paramètre qui représente rapport entre la chute libre et la hauteur initiale (comparer  $gt^2/2$  à  $h_0$ ), ce paramètre est apparu naturellement lorsque nous avons fait l'analyse non visqueuse.
- $\frac{gL_0^3}{\nu^2}$  est un nombre sans dimension: le nombre de Galilée (un genre de nombre de Grashof) que nous verrons apparaître dans l'analyse des équations.

Il y a donc plusieurs manière de créer les nombres sans dimension. Ce dernier choix est assez pertinent car on aime bien mesurer les temps avec  $\sqrt{h_0/g}$  (de la chute libre), et le nombre de Galilée sera effectivement un nombre pertinent. Il faut donc faire attention et tester plusieurs cas.

#### 2.2.4 Ordres de grandeur des mécanismes mis en jeu

Dans cette section, on va analyser en ordres de grandeur le phénomène. D'une certaine manière, c'est redondant avec l'adimensionnement de la section suivante.

C'est en fait la technique que l'on va utiliser en pratique par la suite, une sorte d'analyse dimensionnelle guidée par les mécanismes mis en jeu. C'est là toute l'expérience du modélisateur...

On recherche les ordres dominants des termes sans en faire le détail qui sera fait après. On va faire mieux que le  $\Pi$ -théorème car on va introduire par des hypothèses physiques des ordres de grandeurs. Si on veut il s'agit d'un  $\Pi$ -théorème assisté par des connaissances de mécanique. On cherche toujours l'ordre de grandeur de la hauteur maximale  $h_m$  en fonction des paramètres (et soit  $L_m$  l'excursion du tas). Très simplement par conservation de la masse, nous avons une première relation

$$h_m L_m = h_0 L_0. (1)$$

Nous ajoutons maintenant une nouvelle relation liée au mouvement. Le terme de pression est important car il sera moteur, manifestement on peut estimer la pression par la pression hydrostatique (on vient d'introduire une première hypothèse mécanico-physique):

$$P \sim \rho g h_m$$

nous avons introduit la longueur  $L_m$ , l'excursion maximale du tas. Les variations de hauteur vont créer un gradient de pression  $P/L_m$  qui est moteur.

On obtient l'équilibre entre ce terme moteur et le terme de frein par la viscosité (on vient d'introduire une deuxième hypothèse mécanico-physique):

$$\frac{P}{\rho L_m} \sim \frac{\nu U}{h_m^2} \text{ soit } g \frac{h_m}{L_m} \sim \frac{\nu U}{h_m^2}$$
 (2)

[une autre vision pour cette relation, plus "simple", est de faire un bilan d'énergie. L'énergie potentielle  $Mgh_m$  avec la masse  $M=(\rho gh_m L_m)$  est dissipée par le travail  $F_vL_m$  des frottements visqueux  $F_v=((\mu U/h_m)L_m)$ . Avec ce bilan, on retrouve le même ordre de grandeur  $gh_m/L_m \sim \nu U/h_m^2$ ].

Comme il est raisonnable de prendre  $U = L_m/t$ 

$$g\frac{h_m^3}{L_m} \sim \frac{\nu L_m}{t} \text{ soit } \frac{h_m^3}{L_m^2} \sim \frac{\nu}{qt}.$$
 (3)

Avec la conservation de la masse  $h_m L_m = h_0 L_0$ , on a donc

$$h_m^5 \sim \frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{gt}$$
 ou encore  $h_m \sim \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{1/5} t^{-1/5}$ , (4)

la hauteur maximale décroît en  $t^{-1/5}$ . On calcule de même la longueur par conservation de la masse qui croît en  $t^{1/5}$ .

$$L_m \sim h_0 L_0 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{-1/5} t^{1/5}.$$

Par rapport au théorème  $\Pi$ , on a plus d'information. Reprenons le, on remarque que la relation f(x, y, z) fournie par le théorème  $\Pi$  s'écrit

$$f_1(x, y, z) = x^{-2/5}y^{-4/5}z^0$$

en effet

$$h_m = \frac{\nu}{gt} f_1(\frac{h_0}{L_0}, \frac{\nu}{h_0 gt}) = \frac{\nu}{gt} \frac{L_0^{2/5}}{h_0^{2/5}} \left(\frac{h_0 gt}{\nu}\right)^{4/5} \left(\frac{g^2 t^3}{\nu}\right)^0 = \frac{\nu^{1/5} L_0^{2/5} h_0^{2/5}}{(gt)^{1/5}}$$

c'est bien la relation que nous avons trouvée avec l'analyse en ordre de grandeurs. Mais en partant du théorème  $\Pi$  on n'a pas d'indication sur  $f_1$ , ce sont des hypothèses mécaniques qui nous ont donné  $f_1$ .

En utilisant les nombres sans dimension dégagés ensuite, le rapport d'aspect  $h_0/L_0$  et le Galilée  $\frac{gL_0^3}{\nu^2}$ :

$$\frac{h_m}{h_0} \sim \left(\frac{h_0}{L_0}\right)^{-7/10} \left(\frac{gL_0^3}{\nu^2}\right)^{-1/10} \left(\frac{t}{\sqrt{h_0/g}}\right)^{-1/5} \text{ et } \frac{L_m}{L_0} \sim \left(\frac{h_0}{L_0}\right)^{7/10} \left(\frac{gL_0^3}{\nu^2}\right)^{1/10} \left(\frac{t}{\sqrt{h_0/g}}\right)^{1/5}$$
(5)

On pourrait s'arrêter à ce point, car en effet on peut considérer avoir résolu le problème: on a trouvé les "lois d'échelles" d'évolution de la hauteur et de la longueur du tas:

$$h_m \sim \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{1/5} t^{-1/5} \text{ et } L_m \sim h_0 L_0 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{-1/5} t^{1/5}$$
 (6)

mais ce qui nous intéresse c'est de faire encore mieux et de calculer le "préfacteur", c'est à dire la valeur numérique exacte (et sans dimension) qui permet d'écrire l'égalité.

On va voir que ça n'est pas facile du tout...

# 2.3 Equations de Navier-Stokes sans dimension

#### 2.3.1 démarche habituelle

Nous repartons à zéro, et nous adoptons l'approche complète.



Figure 11: Définition du problème, position de la surface h, effondrement d'un tas visqueux sur une surface horizontale.

Nous allons écrire les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux newtonien f en dessous d'une surface h(x,t), puis nous rappelons la condition à la surface h (condition cinématique).

Il s'agit d'un écoulement à deux phases, une phase fluide supposée lourde et visqueuse (densité  $\rho_f$  et viscosité  $\mu_f$ , nous spécifions bien f pour fluide) située en y < h et une phase gazeuse supposée plus légère et peu visqueuse ( $\rho_a \ll \rho$  et  $\mu_a \ll \mu$ ) en y > h. Le fluide extérieur est de l'air en pratique. Quand nous aurons fini ce paragraphe nous reprendrons les notations de densité  $\rho$  et viscosité  $\mu$  pour le fluide (et non plus densité  $\rho_f$  et viscosité  $\mu_f$ ) car il n'y aura plus d'ambiguïté avec l'air a.

Que l'on soit en y > h et en y < h, l'écoulement est incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

On introduira ensuite la condition cinématique pour l'interface séparant le fluide de l'air extérieur, l'équation de transport de l'interface, sub section suivante. Pour les équations dynamiques:

$$\rho_f(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
(8)

$$\rho_f(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_f \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu_f \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho_f g \tag{9}$$

valide pour y < h(x,t), et les mêmes équations avec  $\mu_a$  et  $\rho_a$ , valides pour y > h(x,t).

#### 2.3.2 démarche dans Basilisk

À présent, nous effectuons l'adimensionnement des équations de Navier-Stokes en supposant que  $\rho$  et  $\mu$  varient. En pratique, dans cette première section, la variation est brusque au niveau de l'interface. Dans le cas des fluides non newtoniens que nous verrons plus tard la viscosité dépend du cisaillement et donc  $\mu$  va varier continuellement et partout. Il est donc très important d'écrire  $\underline{\tau} = 2\mu\underline{D}$  pour un  $\mu$  qui varie.

Commençons par définir un traceur c, de concentration qui vaut 1 dans le fluide qui s'effondre et 0 dans le fluide extérieur. Cette quantité doit être transportée du mieux possible numériquement (par la méthode VOF). D'un point de vue équation, c'est simplement

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\nabla} c = 0.$$

On a donc  $\rho$  et  $\mu$  qui varient de  $\rho_f$  à  $\rho_a$  et de  $\mu_f$  à  $\mu_a$  pour c variant de 1 à 0.

Le tenseur des contraintes s'écrit en 2D plan, en décomposant la partie pression p et la partie contrainte visqueuse  $\underline{\tau} = 2\mu\underline{\underline{D}}$  (le terme avec  $\lambda$  est absent par incompressibilité:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} - p & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} - p \end{pmatrix}.$$

Le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit pour un fluide incompressible newtonien en  $2\mathrm{D}$  :

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} 2\mu\partial_x u & \mu(\partial_x v + \partial_y u) \\ \mu(\partial_u u + \partial_x v) & 2\mu\partial_u v \end{pmatrix}.$$

La divergence de  $\underline{\underline{\tau}}$  donne puisque  $2\underline{\underline{D}} = \underline{\nabla} \cdot (\mu \underline{\nabla} \ \underline{\underline{u}} + \mu \underline{\nabla} \ \underline{\underline{u}}^T)$  donc

$$\underline{\nabla} \cdot (2\mu \underline{\underline{D}}) = \underline{\nabla} \cdot (\mu \underline{\nabla} \underline{u}) + \underline{\nabla} \cdot (\mu \underline{\nabla} \underline{u}^T).$$

On sait que dans le cas habituel, qui correspond à  $\mu$  constant, on retrouve le Laplacien:

$$(\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\;\underline{u})+\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\;\underline{u}^T))=\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\;\underline{u})=(\underline{\nabla}^2\underline{u})$$

car  $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \underline{u}^T) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = 0$  par incompressibilité, ici on va considérer que  $\mu$  varie quand on passe d'un fluide à l'autre, il y a donc un terme supplémentaire :

$$\underline{\nabla} \cdot (2\mu \underline{\underline{D}}) = \underline{\nabla} \cdot (\mu \underline{\nabla} \ \underline{u}) + \underline{\nabla} \cdot (\mu \underline{\nabla} \ \underline{u}^T).$$

le deuxième terme peut être ré arrangé

$$\nabla \cdot (\mu \nabla u^T) = \nabla u^T \cdot \nabla \mu + \mu \nabla \cdot \nabla u^T = \nabla u^T \cdot \nabla \mu + \mu \nabla (\nabla \cdot u) = \nabla u^T \cdot \nabla \mu,$$

c'est l'expression suivante qui est utilisée en pratique dans Basilisk;

$$\underline{\nabla} \cdot (2\mu\underline{D}) = \underline{\nabla} \cdot (\mu\underline{\nabla} \,\underline{u}) + \underline{\nabla} \,\underline{u}^T \cdot \underline{\nabla}\mu.$$

Retenons que les codes Navier Stokes diphasiques comme *Basilisk* modélisent les deux phases, la phase liquide mais aussi la phase gazeuse au dessus. Cette phase supérieure en pratique ne sert à rien dans la dynamique (ou qui peut être négligée en première approximation lorsque l'on cherche à résoudre les équations sur le papier).

#### 2.3.3 En 2D

Développons en 2D

$$\underline{\nabla} \ \underline{u} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\nabla} \ \underline{u}^T = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla} \cdot (\mu \underline{\nabla} \ \underline{u}) = (\partial_x \ \partial_y) \cdot \begin{pmatrix} \mu \partial_x u & \mu \partial_x v \\ \mu \partial_y u & \mu \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \mu \partial_x u + \partial_y \mu \partial_y u \\ \partial_x \mu \partial_x v + \partial_y \mu \partial_y v \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla} \ \underline{u}^T \cdot \underline{\nabla} \mu = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \mu \\ \partial_y \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u \partial_x \mu + \partial_y u \partial_y \mu \\ \partial_x v \partial_x \mu + \partial_y v \partial_y \mu \end{pmatrix}$$

#### 2.3.4 NS en 2D, sans dimension

On va poser  $\rho = \rho_f \bar{\rho}$ , avec  $\bar{\rho}$  une fonction qui vaut 1 dans le fluide qui s'étale et qui vaut  $\rho_a/\rho_f$  dans l'air extérieur. De même, on pose  $\bar{\mu} = \mu/\mu_f$ , ainsi  $\bar{\mu} = 1$  dans le fluide qui s'étale et  $\bar{\mu} = \mu_a/\mu_f$  dans l'air extérieur.

Les échelles utilisées ici :

$$x = L\tilde{x}, \qquad y = L\tilde{y}, \qquad u = U\tilde{u}, \qquad v = U\tilde{v}, \qquad t = \tau\tilde{t}, \quad \text{et} \quad p = p_0 + P\tilde{p}.$$
(10)

 $\rho = \rho_f \bar{\rho}$ , avec  $\bar{\rho}$  une fonction qui vaut 1 dans le fluide qui s'étale et qui vaut  $\rho_a/\rho_f$  dans l'air extérieur. De même, on pose  $\bar{\mu} = \mu/\mu_f$ ,

la longueur L est une longueur caractéristique pertinente... on commence toujours avec une même longueur partout. Nous allons préciser  $\tau$ , P et U en supposant l'écoulement très visqueux et gouverné par la gravité. On choisit  $P = \rho_f g L$  car on étudie des écoulements créés par la gravité. De fait, en posant  $\nu_f = (\mu_f/\rho_f)$ 

donc

$$\bar{\rho}\left(\frac{U}{\tau}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}+\frac{U^2}{L}\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)\right)=$$

$$= -g \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu_f U}{L^2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{y}} \right)$$
(11)

et

$$\bar{\rho} \left( \frac{U}{\tau} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{U^2}{L} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right) = 
= -g \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\nu_f U}{L^2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{y}} \right) - \bar{\rho}g.$$
(12)

À l'aide de principe de moindre dégénérescence (least degeneracy principle) il paraît judicieux de choisir  $\tau = L/U$ . Pour la vitesse, on pourrait prendre  $U^2/L = g$  pour privilégier l'inertie, mais le moteur de l'écoulement est bien la gravité g et le frein est bien la viscosité  $\nu_f \frac{U}{L^2}$ , ce qui nous suggère de prendre comme échelle de vitesse (puis de temps):

$$U = \frac{gL^2}{\nu_f}, \qquad (\tau = L/U = \frac{\nu_f}{gL}).$$

Nous verrons cependant à la section §2.16 que prendre  $U = \frac{gL^2}{\nu_f}$  au lieu de  $U = \sqrt{gL}$  ne change rien dans la solution finale.

Cette dernière équation s'écrit alors

$$\bar{\rho} \left( \frac{U^2}{gL} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right) =$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left( \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{y}} \right) - \bar{\rho}.$$
(13)

On pose la définition du nombre de Froude:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{aL}}.$$

On se doute que ce nombre va être petit car l'écoulement est toujours freiné, il va de moins en moins vite  $Fr \ll 1$ . Compte tenu de la définition de U, on en déduit que

$$Fr^2 = \frac{gL^3}{\nu_f^2} \ll 1$$

qui correspond bien au fait que la viscosité est forte. Ce nombre:  $\frac{gL^3}{\nu_f^2}$  est le nombre de Galilée, c'est un genre de nombre de Grashof.

Au final on a obtenu les équations avec  $\left(\frac{gL^3}{\nu_f^2}\right)$  en facteur du terme d'inertie et avec  $\bar{\rho}=1$  et  $\bar{\mu}=1$  dans le fluide qui s'étale et  $\bar{\rho}\ll 1$  et  $\bar{\mu}\ll 1$  dans le fluide extérieur.

A partir de maintenant, on va négliger les variations de mouvement dans l'air puisque  $\bar{\rho} \ll 1$ , et que  $\bar{\mu} \ll 1$ . On pose  $\nu = \nu_f$  et  $\mu = \mu_f$ , on oublie l'air de densité  $\rho_a$  et de viscosité  $\mu_a$ .

On ne va considérer Navier Stokes que, pour  $\bar{y} < \bar{h}(\bar{x}, \bar{t})$ :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\
\left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\
\left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - 1.
\end{cases} (14)$$

# 2.4 Rappel équation de l'interface, condition cinématique

Reprenons nos fluides f et a de densité  $\rho_f$  et  $\rho_a$ .

Les deux fluides ne "décollent" pas de la surface qui les sépare et ne s'interpénètrent pas: intuitivement, les vitesses normales sont donc continues à la traversée de l'interface:

$$u_1 \cdot n_{12} = u_2 \cdot n_{12}$$
 en  $y - h(x, t) = 0$ .

On retrouve cette même relation à partir de  $\nabla \cdot u = 0$  intégrée sur une petite épaisseur.

Une autre manière de voir les choses est de considérer l'interface entre l'eau et l'air. L'eau reste eau et l'air reste air, ce que nous dit la conservation de la masse (réécrite)

$$\nabla \cdot u = -(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\rho).$$

dans chacun des deux fluides, l'écoulement est incompressible donc  $\nabla \cdot u = 0$ , et il reste que  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ; la densité est transportée dans l'écoulement, sa dérivée totale est nulle. Nous allons exploiter cette idée en appelant F(x,y,t) = 0 la fonction qui est nulle à l'interface entre les deux fluides. F(x,y,t) = 0 est la forme implicite de l'équation de l'interface écrite sous forme explicite y = h(x,t).

En fait, la description que nous allons examiner est celle d'un fluide entouré d'une surface le limitant à un extérieur à pression constante. On a donc pour la forme implicite de l'équation de l'interface

$$F(x, y, t) = y - h(x, t) = 0$$

c'est l'équation de l'interface, on remarque également que l'interface étant matérielle, F est transporté le long des lignes de courant:  $\frac{dF}{dt} = 0$ ; (dérivée totale). Par définition de la dérivée lagrangienne  $\frac{dy}{dt} = v(x, h, t)$  et  $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$ , donc

$$\frac{d}{dt}F(x,y,t) = v(x,h,t) - \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0$$

et ainsi dF/dt = 0 s'écrit :

$$v(x, h, t) = \frac{\partial h}{\partial t}(x, h, t) + u \frac{\partial h}{\partial x}(x, h, t).$$

#### Remarque

On peut le réécrire en faisant apparaître la normale à la surface (voir figure 12, avec ici  $Z_b = 0$  et  $h = \eta$ )

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x h)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x h \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \underline{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x \eta \end{pmatrix}$$

normale et tangente à la surface libre qui permettent d'écrire :

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = \frac{\frac{\partial h}{\partial t}}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial x)^2}}$$

#### Sans dimension

On trouve au final sans dimension:

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{h}, \bar{t}) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}}(\bar{x}, \bar{h}, \bar{t}) + \bar{u}(\bar{x}, \bar{h}, \bar{t}) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{h}, \bar{t})$$

# 2.5 Rappel pour les contraintes

Le tenseur des contraintes s'écrit en décomposant la partie pression et la partie contrainte visqueuse:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

en 2D plan,:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} - p & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} - p \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes s'écrit pour un fluide newtonien en général:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \lambda(\underline{\nabla} \cdot \underline{u})\underline{I} + 2\mu\underline{D}$$

(dans le cas incompressible il faut enlever  $\lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{u}\underline{I}$ ). En incompressible et en 2D plan:

$$\underline{\sigma} = -p\underline{I} + 2\mu\underline{D}$$

avec  $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^t)$  le tenseur de taux de déformation (strain rate tensor)

$$\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \mu(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^t)$$

composantes en 2D:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2\mu\partial_x u - p & \mu(\partial_x v + \partial_y u) \\ \mu(\partial_y u + \partial_x v) & 2\mu\partial_y v - p \end{pmatrix}$$

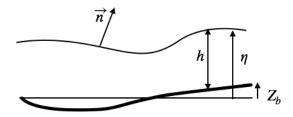


Figure 12: Définitions,  $Z_b$  position du fond,  $\eta$  position de la surface libre h hauteur d'eau.

Pour les contraintes à l'interface on a continuité du tenseur des contraintes, mais comme on suppose que l'extérieur du tas est sans influence (pression de référence nulle), cela donne

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0$$
, avec  $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x \eta \\ 1 \end{pmatrix}$  avec  $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \eta)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x \eta \end{pmatrix}$ 

normale et tangente à la surface libre.

$$\underline{n} \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} = \frac{1}{1 + (\partial_x \eta)^2} \left( -2\mu \left( (\partial_x v + \partial_y u) - (\partial_x \eta)^2 \partial_x u - \partial_y v \right) \right)$$

$$\underline{t} \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} = \frac{1}{1 + (\partial_x \eta)^2} \left( \mu \left( 2(\partial_x \eta)(\partial_y v - \partial_x u) + (1 - (\partial_x \eta)^2)(\partial_x v + \partial_y u) \right) \right)$$

#### avec tension de surface

Il faut rajouter la tension de surface (notée ici  $\gamma$ ), et tenir compte du saut de contrainte normale (la tension de surface ajoute la courbure):

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p\underline{n} + \mu(\underline{\nabla} \ \underline{u} + \underline{\nabla} \ \underline{u}^t) \cdot \underline{n} = -\gamma(\underline{\nabla} \cdot \underline{n})\underline{n}$$

#### sans dimension

Avec l'adimensionnement choisi, la contrainte est dimensionée avec  $\rho gL$  et sans dimension

$$\begin{pmatrix} 2\partial_{\bar{x}}\bar{u} - \bar{p} & (\partial_{\bar{x}}\bar{v} + \partial_{\bar{y}}\bar{u}) \\ (\partial_{\bar{y}}\bar{u} + \partial_{\bar{x}}\bar{v}) & 2\partial_{\bar{y}}\bar{v} - \bar{p} \end{pmatrix}$$

avec pour la normale  $\frac{1}{\sqrt{1+(\partial_{\bar{x}}\bar{h})^2}}\begin{pmatrix} -\partial_{\bar{x}}\bar{h}\\ 1 \end{pmatrix}$ .

sans dimension avec tension de surface

On obtient:

$$-\bar{p}\underline{n} + \mu(\underline{\nabla}\ \underline{\bar{u}} + \underline{\nabla}\ \underline{\bar{u}}^t) \cdot \underline{n} = -\frac{\gamma}{\rho g L^2} (\underline{\nabla}\cdot\underline{n})\underline{n}$$

où on a fait apparaître un nombre sans dimension

$$\frac{\gamma}{\rho q L^2} = \frac{\ell_c^2}{L^2}$$
, avec la longueur capillaire  $\ell_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ .

# 2.6 Rappel pour l'équation de la masse

#### Règle de Leibniz

Etablissons tout de suite la relation de conservation de la masse car elle ne nécessite aucune autre hypothèse. Auparavant, nous rappelons la règle de Leibniz de dérivation  $\partial_x$  d'une intégrale  $\int_0^{\eta(x,t)} g(x,y,t)dy$  dont la borne varie.

Définissons la primitive de g (par définition  $\partial_y G = g$ ):

$$G(x,\eta(x,t),t) = \int_0^{\eta(x,t)} g(x,y,t)dy$$

donc quand on dérive:

$$\partial_x(G(x,\eta(x,t),t)) = \partial_x \int_0^{\eta} g dy$$

en faisant attention à la borne qui varie : comme G dépend de x par son premier argument et de manière composée par son second;

$$\partial_x (G(x, \eta(x, t), t)) = \partial_x G(x, \eta(x, t), t) + \partial_y G(x, \eta, t) \partial_x \eta$$

le premier argument s'écrit  $\partial_x G(x,\eta(x,t),t)=\int_0^\eta \partial_x g(x,y,t)dy$  car la borne est ici indépendente, le second de par la définition de G est  $\partial_y G=g$  donc ceci établit la règle de dérivation:

$$\partial_x \int_0^{\eta} g dx = \int_0^{\eta} \partial_x g(x, y, t) dy + g(x, \eta, t) \partial_x \eta.$$

On a aussi

$$\partial_t \int_0^{\eta} g dx = \int_0^{\eta} \partial_t g dx + g(\eta, t) \partial_t \eta.$$

donc

$$\partial_t \int_f^{\eta} g dx = \int_f^{\eta} \partial_t g dx + g(\eta, t) \partial_t \eta - g(f, t) \partial_t f,$$

en faisant apparaître la vitesse de l'interface

$$\partial_t \int_f^{\eta} g dx = \int_f^{\eta} \partial_t g dx + \int_f^{\eta} \partial_x (g(x, \eta, t)u) dx$$

C'est bien sûr le théorème de Green-Ostrogradski.

#### pour l'équation de la masse

Reprenons:

$$\partial_x \int_0^{\eta} g dy = \int_0^{\eta} \partial_x g(x, y, t) dy + g(x, \eta, t) \partial_x \eta.$$

Utilisons cette relation, intégrons l'équation de conservation de la masse du fond 0 à la surface  $\tilde{h}$ 

$$\int_0^{\tilde{h}} (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}) d\tilde{y} = 0$$

cela donne la relation suivante où sont apparues les vitesses transversales en bas et en haut de la couche liquide:

$$\int_{0}^{\tilde{h}} (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}) d\tilde{y} + \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = \tilde{h}, \tilde{t}) - \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = 0, \tilde{t}) = 0$$

puis par Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \int_{0}^{\tilde{h}} \tilde{u} d\tilde{y} \right) - \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{h}, \tilde{t}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = \tilde{h}, \tilde{t}) - \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = 0, \tilde{t}) = 0$$

au fond,  $\tilde{y} = 0$ , les vitesses sont nulles  $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = 0, \tilde{t}) = 0$ .

Il faut aussi maintenant écrire la vitesse à la surface. On rappelle qu'à la surface on a vu que:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{h}, \tilde{t}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{h}, \tilde{t}),$$

on obtient donc au final:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \int_0^{\tilde{h}} \tilde{u} d\tilde{y} \right) = 0$$

Remarque, la formule est également vraie en fluide parfait. Dans le cas d'un fluide parfait au fond  $\tilde{f} = \tilde{Z}_b$ , on  $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{t})$ , la vitesse transverse n'est pas nulle, mais  $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}), \tilde{t}) = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{f}, \tilde{t}) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}$ , la vitesse à la surface est toujours la même et le résultat global est toujours valide.

#### 2.7 Equations de Stokes

Nous venons de voir les équations sans dimension (en supposant que  $Fr^2 = Ga = \frac{gL^3}{\nu^2}$  petit, bien que cette hypothèse n'ait pas encore été utilisée pour simplifier le système). Le système complet avec x et y mesurés par la même échelle L, les vitesses mesurées par  $gL^3/\nu$  et la pression par  $\rho gL$ :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\
\left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\
\left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - 1.
\end{cases} (15)$$

donc si  $Fr^2 = \frac{gL^3}{\nu^2} \to 0$ , c'est à dire si l'écoulement est très visqueux, on obtient des équations sans effet inertiel. Il n'y a plus que les effets visqueux et la gravité. Ce sont donc les équations de Stokes (avec gravité):

$$\begin{cases}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\
0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\
0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - 1.
\end{cases} (16)$$

C'est une simplification de ce système que nous allons résoudre ensuite en utilisant l'observation que l'écoulement est en couche mince.

# 2.8 Analyse de type couche mince/ couche limite

Nous venons de voir que les équations sont (en supposant que  $Ga = Fr^2 = \frac{gL^3}{\nu^2}$  petit). Le système complet avec x et y mesurés par L et les vitesses mesurées par  $gL^3/\nu$  la pression par  $\rho gL$ :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\
\left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\
\left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - 1.
\end{cases} (17)$$

Adoptons le point de vue couche limite, c'est à dire que la couche est mince, elle est d'épaisseur relative  $\varepsilon$  avec  $\varepsilon = h/L$ . Posons  $\bar{x} = \tilde{x}$  et  $\bar{y} = \varepsilon \tilde{y}$  la moindre

dégénérescence appliquée à l'incompressibilité donne que si on écrit, avec  $\varpi \ll 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ;  $\bar{u} = \varpi \tilde{u}$  alors  $\bar{v} = \varepsilon \varpi \tilde{v}$  pour la pression,  $\bar{p} = \pi \tilde{p}$ ,  $(\pi \ll 1)$  et la moindre dégénérescence donne que  $\pi = \varepsilon$  pour conserver le terme moteur de chute. De même pour conserver par moindre dégénérescence l'équilibre pression, freinage visqueux, on va avoir

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \simeq \frac{\varpi}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

donc  $\varpi = \varepsilon^3$ , ce qui donne:  $\bar{x} = \tilde{x}$  et  $\bar{y} = \varepsilon \tilde{y}$ ,  $\bar{u} = \varepsilon^3 \tilde{u}$ ,  $\bar{v} = \varepsilon^4 \tilde{v}$ ,  $\bar{p} = \varepsilon \tilde{p}$ . Sans oublier  $\bar{t} = \varepsilon^{-3} \tilde{t}$ , le temps est long (puisque la vitesse est lente en  $\varepsilon^3$ ).

$$\begin{cases}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \\
Fr^{2} \varepsilon^{5} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + (\varepsilon^{2} \frac{\partial^{2} \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^{2}} + \frac{\partial^{2} \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^{2}}) \\
Fr^{2} \varepsilon^{6} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + (\varepsilon^{3} \frac{\partial^{2} \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^{2}} + \varepsilon^{2} \frac{\partial^{2} \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^{2}}) - 1.
\end{cases} (18)$$

Remarquons que le terme  $Ga = Fr^2 \varepsilon^5 = \frac{gL^3}{\nu^2} \varepsilon^5$  (équation (9) de Balmforth et al. [8]).

Remarquons aussi que l'on aurait pu directement adimensionner Navier Stokes avec une échelle L longitudinale et une échelle  $\varepsilon L$  transversale. Cela aurait été plus rapide. On aurait obtenu le même système (18) sans passer par l'étape intermédiaire. Mais nous avons voulu là faire les choses en commençant par des échelles identiques dans chaque direction, car c'est naturel. Nous discuterons aussi à la section §2.16 du fait de prendre un autre adimensionnement et que cela ne change en rien la solution finale.

Une fois ce système final sans dimension et avec un petit paramètre obtenu (18), nous faisons tendre ce petit paramètre  $\varepsilon$  vers 0 en supposant que  $\frac{gL^3}{\nu^2}$  reste d'orde un, il ne reste alors:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - 1. \tag{19}$$

Il faut aussi écrire la continuité du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0$  à l'interface soit sans dimension

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 2\partial_{\overline{x}}\overline{u} - \overline{p} & (\partial_{\overline{x}}\overline{v} + \partial_{\overline{y}}\overline{u}) \\ (\partial_{\overline{y}}\overline{u} + \partial_{\overline{x}}\overline{v}) & 2\partial_{\overline{y}}\overline{v} - \overline{p} \end{pmatrix} \text{ et } \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_{\overline{x}}\overline{h})^2}} \begin{pmatrix} -\partial_{\overline{x}}\overline{h} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la contrainte 
$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon^3\partial_{\tilde{x}}\tilde{u} - \varepsilon\tilde{p} & (\varepsilon^4\partial_{\tilde{x}}\tilde{v} + \varepsilon^2\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}) \\ (\varepsilon^4\partial_{\tilde{x}}\tilde{v} + \varepsilon^2\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}) & 2\varepsilon^3\partial_{\bar{y}}\bar{v} - \varepsilon\bar{p} \end{pmatrix} \text{ multipliée par la normale }$$
 
$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon\partial_{\tilde{x}}\tilde{h})^2}} \begin{pmatrix} -\varepsilon\partial_{\tilde{x}}\tilde{h} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donne }$$
 
$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon\partial_{\tilde{x}}\tilde{h})^2}} \begin{pmatrix} -\varepsilon^2\partial_{\tilde{x}}\tilde{h}(2\varepsilon^2\partial_{\tilde{x}}\tilde{u} - \tilde{p}) + (\varepsilon^4\partial_{\tilde{x}}\tilde{v} + \varepsilon^2\partial_{\tilde{y}}\tilde{u}) \\ -\varepsilon^3\partial_{\tilde{x}}\tilde{h}(\varepsilon^1\partial_{\tilde{x}}\tilde{v} + \partial_{\tilde{y}}\tilde{u}) + 2\varepsilon^3\partial_{\bar{y}}\bar{v} - \varepsilon\bar{p} \end{pmatrix}$$

la deuxième ligne donne  $\tilde{p}=O(\varepsilon^3)$  et subsitué dans la première ce donne  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}=O(\varepsilon^2)$ . A l'ordre dominant, à l'interface :

$$\tilde{p} = 0 \text{ et } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 0.$$

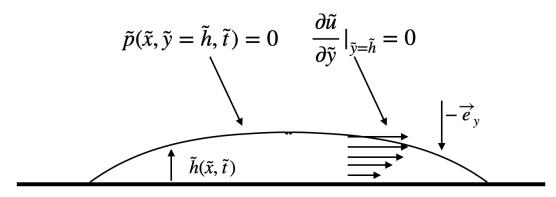


Figure 13: Conditions aux limites sur l'interface en  $\tilde{y}=\tilde{h}$ , pression  $\tilde{p}=0$  et cisaillement  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}=0$ .

# 2.9 Equations de couche mince visqueuse

Pour  $\varepsilon$  très petit (avec h comme échelle transverse, L comme échelle longitudinale et comme échelle pour la pression  $\rho g h$ , comme échelle de vitesse  $\frac{g h^3}{\nu L}$  et le temps  $\tau = \frac{L}{U}$ ) il ne reste

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - 1, \qquad \tilde{y} < \tilde{h}$$
(20)

Ce sont des équations de couche mince visqueuse, ou aussi des équations de "lubrification". Il ne manque que les conditions limites pour résoudre le problème. On a défini  $\tilde{h}$  la hauteur de l'interface qui varie selon  $\tilde{x}$ .

$$\tilde{y} = \tilde{h};$$
  $\tilde{u}(\tilde{y} = 0) = \tilde{v}(\tilde{y} = 0) = 0$   $\tilde{p}(\tilde{y} = \tilde{h}) = 0$   $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{y} = \tilde{h}) = 0.$  (21)

On a aussi en  $\tilde{y} = \tilde{h}$  la condition cinématique:

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}.$$
 (22)

# 2.10 Champ de vitesse pour la lubrification

En intégrant la dérivée transverse de la pression et comme la pression est nulle sur la surface, on a la pression hydrostatique :

$$\tilde{p} = \tilde{h}(x) - \tilde{y} \tag{23}$$

On dérive par rapport à  $\tilde{x}$  la pression, le gradient de pression ne dépend plus de  $\tilde{y}$ , on, substitue dans l'équation longitudinale puis en intégrant deux fois en  $\tilde{y}$  la vitesse  $\tilde{u}$  (en prenant l'adhérence en 0 et la dérivée nulle représentant l'absence de contrainte en  $\tilde{h}$ ) on obtient le profil parabolique:

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{h}'(\frac{\tilde{y}^2}{2} - \tilde{h}\tilde{y}) \tag{24}$$

On a ici un écoulement similaire un "Poiseuille", en fait un demi Poiseuille (ou aussi un film de Nu $\beta$ elt) dont la hauteur varie avec  $(\tilde{x})$ .

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\tilde{h}^2 \tilde{h}'(\frac{\tilde{y}}{\tilde{h}} - \frac{\tilde{y}^2}{2\tilde{h}^2}). \tag{25}$$

# 2.11 Équation d'évolution de la surface

Le débit est défini tel que :

$$\tilde{Q} = \int_0^{\tilde{h}} \tilde{u} d\tilde{y}, \tag{26}$$

à l'aide de la solution en demi Poiseuille 24 on intègre sans peine

$$\tilde{Q} = -\frac{1}{3}\tilde{h}'\tilde{h}^3.$$

Or à l'aide de la conservation de la masse on a obtenu par intégration transverse de l'incompressibilité:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{x}} \tag{27}$$

donc par substitution

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \tilde{h}^3).}$$
(28)

Cette équation est le résultat principal que nous souhaitions établir (voir "Plan et Objectifs") à partir de simplifications de Navier Stokes. On peut l'appeler le problème de "Huppert", on consultera l'article de Huppert pour l'écriture en axi (Huppert [25]). Comme on part d'un tas rectangulaire ou carré, c'est une double "rupture de barrage" visqueuse (par dérision et entre nous nous l'appelons "sploutch", mais on dit slump en anglais). Il s'agit maintenant de résoudre complètement ce problème, dans un premier temps nous avons trouvé un ordre de grandeur de la hauteur et de l'extension à partir du  $\Pi$  Théorème et de quelques ingrédients mécaniques ( $h_m \sim t^{-1/5}$  et  $L_m \sim t^{1/5}$ ). Rappelons que nous voulons toujours le "préfacteur" de cette loi d'échelle  $L_m = \alpha t^{1/5}$  avec  $\alpha$  valeur numérique. C'est cette valeur  $\alpha$  que nous cherchons maintenant.

Remarque avec dimension. Nous voulons dans un premier temps résoudre cette équation. Or, l'équation qui est de la forme:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

peut être dans un premier temps étudiée avec une linéarisation, si h est presque constant, posons  $h = h_0 + \varepsilon h_1 + ...$  alors l'équation est de la forme suivante au premier ordre:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = (kh_0^3) \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}.$$

On sait que cette équation qui est l'équation de la chaleur (équation de diffusion, équation parabolique) admet des solution autosemblables de variable de similitude  $x/\sqrt{t}$ , nous allons voir que notre nouveau problème admet lui aussi des solutions autosemblables.

Avant, nous allons faire une résolution numérique, en nous rappelant des méthodes de résolution de l'équation de la chaleur

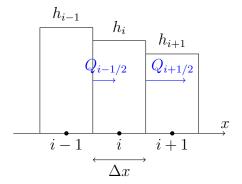


Figure 14: Discrétisation: la valeur dans la cellule i de la hauteur  $h_i$  (représentant la moyenne de h) va varier compte tenu des flux sur les faces i - 1/2 et i + 1/2.

# 2.12 Tas visqueux sur fond plat, solution numérique en volumes finis

## 2.13 La méthode numérique VF

Cette partie est détaillée dans le film suivant : https://dropsu.sorbonne-universite.fr/s/6nXz9AnxyqR86E8

Nous voulons résoudre numériquement le problème de l'effondrement visqueux. Il s'agit de la discrétisation en volumes finis, de

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$
, avec  $Q = -\frac{h^3}{3} \frac{\partial h}{\partial x}$ ,

on va intégrer sur un segment centré en i et de longueur  $\Delta x$ , l'index i se rapporte au segment  $C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) = (x_{i-1/2}, x_{i-1/2} + \Delta x)$ , n se rapporte au temps  $t_n$  avec  $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ . La quantité que l'on va faire évoluer est  $h_i^n$  que l'on définit comme la valeur moyenne sur  $C_i$ :

$$h_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} h(x, t_n) dx.$$

Avec ces définitions, prenons l'EDP, on fait une différence finie pour l'accroissement en temps

$$\frac{\partial h}{\partial t} \simeq \frac{h(x, t_{n+1}) - h(x, t_n)}{\Delta t},$$

sur le segment  $C_i$ , on a alors par moyenne:  $\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t}$ . En revanche, on a de

manière exacte par intégration de la dérivée:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dx = \frac{Q_{i+1/2}^n - Q_{i-1/2}^n}{\Delta x}$$

donc  $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ , s'écrit de manière discrétisée au premier ordre:

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{Q_{i+1/2}^n - Q_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0.$$
 (29)

Cette forme de bilan de flux sur le "volume" est toute l'essence de la méthode. Cette discrétisation est indépendante du l'approximation ultérieure de Q. Nous insistons sur le fait qu'il s'agit d'une loi de bilan discrète.

Le flux numérique  $Q_{i+1/2}$  est une approximation de la fonction flux  $-\frac{h^3}{3}\frac{\partial h}{\partial x}$  à l'interface droite du segment  $C_i$  en i+1/2. C'est donc une fonction de la valeur  $h_i$  dans le segment considéré centré en i et de la valeur  $h_{i+1}$  dans le segment suivant centré en i+1:

$$Q_{i+1/2} = \mathcal{Q}(h_i, h_{i+1}). \tag{30}$$

en pratique, en (i+1/2) la dérivée  $-\frac{\partial h}{\partial x}$  est approximée de manière naturelle en utilisant les valeurs de part et d'autre du point milieu par  $(h_{i+1}^n - h_i^n)/\Delta x$ . Sur l'interface (i+1/2), on approxime h que l'on ne connait pas par les valeurs de part et d'autre  $((h_i^n + h_{i+1}^n))/2$  (moyenne simple). De même en i-1/2 la dérivée est de même approximée par  $(h_i^n - h_{i-1}^n)/\Delta x$ . Sur l'interface (i-1/2), on approxime h que l'on ne connait pas par les valeurs de part et d'autre  $(h_{i-1}^n + h_i^n)/2$ . Le flux final est :

$$Q_{i+1/2} = \mathcal{Q}(h_i, h_{i+1}) = \frac{-1}{3} \left( \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \right)^3 \left( \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x} \right)$$
(31)

et bien sûr

$$Q_{i-1/2} = \mathcal{Q}(h_{i-1}, h_i) = \frac{-1}{3} \left( \frac{h_{i-1}^n + h_i^n}{2} \right)^3 \left( \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta x} \right)$$
(32)

L'accroissement est donc

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \Delta t \frac{Q_{i+i/2} - Q_{i-1/2}}{\Delta x}$$

ou encore avec Q

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \Delta t \frac{\mathcal{Q}(h_i, h_{i+1}) - \mathcal{Q}(h_{i-1}, h_i)}{\Delta x}.$$

C'est cette expression que l'on code. En code simplifié, Q[i+1] est en fait  $Q_{i+1/2} = Q(h_i, h_{i+1})$ , Q[i] est en fait  $Q_{i-1/2}$ , donc cette expression s'écrit en C:

```
 Q[i] = -1./3 * (( h[i ] - h[i-1] )/Delta) * pow((h[i] + h[i-1])/2,3); \\ h[i] -= dt*( Q[i+1] - Q[i] )/Delta;
```

cette discrétisation est choisie pour ressembler à l'équation de la chaleur

## 2.14 Programme C

```
En C le programme s'écrit
http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous_collapseC.c
   bien entendu, un exercice possible serait de l'écrire en python...
/**
# Resolution
lubrication slump equation in 1D
it is exactly the same than [../Exemples/viscous_collapse_noSV.c]() but written wi
## Code
mandatory declarations: */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <string.h>
/** definition of the field h, the flux Q, time step */
double*x=NULL,*h=NULL,*Q=NULL;
double dt, LO, Delta;
double t;
int i,N;
/** Main with definition of parameters */
int main() {
  L0 = 5.;
  N = 128;
  t=0;
  Delta = LO/N;
  dt = .0025;
/** dynamic allocation */
  x= (double*)calloc(N+1,sizeof(double));
  h= (double*)calloc(N+1,sizeof(double));
  Q= (double*)calloc(N+1,sizeof(double));
first cell between '0-Delta/2' and '0+Delta/2', centred in
ith cell beween '(i-1/2) Delta' (left) and '(i +1/2) Delta' (right) centered in '(i
*/
  for(i=0;i<=N;i++)</pre>
    \{x[i]=0+(i)*Delta;
```

h[i] = (1)\*(x[i]<1);

```
/** begin the time loop */
  while(t \le 100){
    t = t + dt;
/** print data */
for(i=0;i<=N;i++)
    fprintf (stdout, "%g %g %g \n", x[i], h[i], t);
  fprintf (stdout, "\n");
/**
      flux
                */
for(i=1;i<=N;i++)
   Q[i] = -1./3*pow(((h[i]+h[i-1])/2),3)*(h[i]-h[i-1])/Delta;
/** explicit step update and BC$$h_i^{n+1}=h_i^{n} -{Delta t} \frac{F(Q_{i+1})}{2}
for(i=1;i<N-1;i++)
   h[i] += -dt* (Q[i+1] - Q[i])/Delta;
 h[0]=h[1];
 h[N]=h[N-1];
 }
/** clean */
 free(h);
 free(Q);
 free(x);
}
/**
```

Compilation et exécution dans le terminal:

```
## Run
Then compile and run:
~~~bash
cc -g -02 -DTRASH=1 -Wall vsicouscollapseC.c -o vsicouscollapseC;./vsicouscolla
## Results
in gnuplot type
~~~gnuplot
set xlabel "x"
set ylabel "h"
p[0:2]'out' u 1:2 ev :1000 w 1
~~~gnuplot
set xlabel "x/t**(1/5)"
set ylabel "h*t**(1/5)"
p[0:2]'out' u ($1/$3**.2):($2*($3)**.2) ev :1000 w l
##Exercice
Compare with the Basilisk [../Exemples/viscous_collapse_noSV.c]()
* Lagrée
          [M2EMN
Master 2 Ecoulements en Milieu Naturel](http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MF)
*/
```

Sur la figure 21 on voit un tas initial rectangulaire s'affaisser à différents  $\tilde{t}$ .

Il faut maintenant trouver la valeur de  $\tilde{x}$  maximale et la tracer en fonction du temps. Dans le cas d'une masse unitaire, on trouve (...à faire et rédiger...) en traçant en log :

$$\tilde{x} \sim \alpha \tilde{t}^a$$
, avec  $\alpha \sim 0.7$ ,  $a \sim 0.2$ 

Il ne reste qu'à repasser des tildes aux barres puis aux variables physiques...

On peut s'arrêter ici, puisque l'on a résolu numériquement le problème et que l'on peut faire varier à loisir les paramètres. Nous allons que dans ce cas précis, on peut aller plus loin analytiquement (bien sûr ce n'est que rarement le cas).

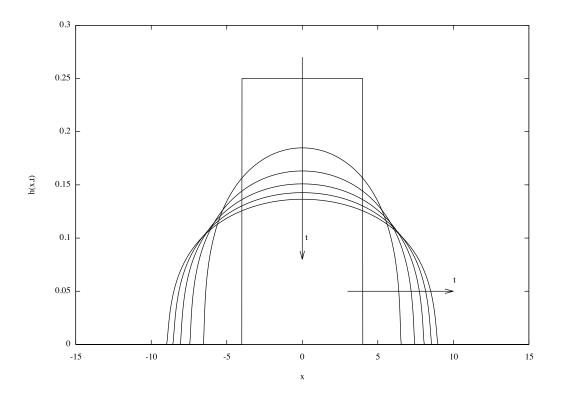


Figure 15: Plot at  $\tilde{t}=100,200,300...1000$  of  $\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{t})$  with Basilisk en 1D.

### 2.15 Résolution par solution autosemblable

On a constaté que l'effondrement avait toujours a peu près la même forme, voyons si ce n'est pas effectivement la même forme mais dilatée. On cherche donc une solution "Homogène" (Germain Fluid Dynamics Houches 1973), une solution "automodèle" (Sedov MIR 1977 [43]), une solution "auto-similaire", "auto semblable", "self similaire" "self similaire" voire même "solution affine", il y a plusieurs dénominations, mais le concept est le même... On cherche à résoudre

$$\left| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \tilde{h}^3 \right) \right| \tag{33}$$

par invariance en dilatations de toutes les variables. Pour ce faire on pose la transformation:

$$\tilde{h} = H^* \hat{H}, \qquad \tilde{x} = x^* \hat{x}, \qquad \tilde{t} = t^* \hat{t}.$$
 (34)

où  $H^*, x^*, t^*$  sont des scalaires représentant un changement d'échelle et les variables avec un chapeau sont les variables transformées. On veut que l'équation soit invariante par la transformation multiplicative de dilatation.

Par dilatations des échelles:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \tilde{h}^3)$$
 devient

$$\frac{H^*}{T^*}\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{t}} = \frac{H^{*4}}{X^{*2}}(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial \widehat{x}}(\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{x}}\widehat{H}^3))$$

l'invariance par changement d'échelle équivaut à  $H^*/T^* = H^{*4}/X^{*2}$  pour que cette équation soit invariante par la transformation:

$$\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{t}} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \widehat{x}} (\frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{x}} \widehat{H}^3)$$

et la masse conservée si  $H^*X^*=1$ ,

$$\int_0^x H(x) dx = 1 \text{ devient } \int_0^{\widehat{x}} \widehat{H}(\widehat{x}) d\widehat{x} = 1$$

on peut donc choisir par exemple comme dilatation principale  $H^*$ , et comme comme les invariances nous on donné  $H^*/T^* = H^{*4}/X^{*2}$  dans lequel on substitue et  $X^* = 1/H^*$ , on voit que  $H^*/T^* = H^{*6}$  ce qui donne  $T^*$  puis  $X^*$ : donc si on choisit :

$$\tilde{h} = H^* \hat{H}, \qquad \tilde{x} = \frac{1}{H^*} \hat{x}, \qquad \tilde{t} = H^{*-5} \hat{t}.$$
 (35)

la subsitution dans 28 donne bien la même forme pour les variables en chapeau.

Montrons que cette invariance permet de trouver la forme de la solution. De manière générale, la solution s'écrit sous forme implicite:

$$\mathcal{F}(\tilde{h}, \tilde{x}, \tilde{t}) = 0$$

par la transformation précédente

$$\mathcal{F}(H^*\hat{H}, \hat{x}/H^*, \hat{t}/H^{*5}) = 0$$

on fait disparaître  $H^*$  du maximum de variables:

$$\mathcal{F}_1(\hat{t}^{1/5}\hat{H}, \hat{x}/\hat{t}^{1/5}, \hat{t}/H^{*5}) = 0.$$

Cette expression est vraie pour tous les  $H^*$ , donc la dernière variable n'intervient pas et il ne reste que:

 $\mathcal{F}_2(\hat{t}^{1/5}\hat{H}, \hat{x}/\hat{t}^{1/5}) = 0.$ 

La forme de la solution sous forme explicite est donc que  $\hat{t}^{1/5}\hat{H}$  est une fonction de  $\hat{x}/\hat{t}^{1/5}$ , ou se qui revient au même par l'invariance que  $\tilde{h}\tilde{t}^{1/5}$  est fonction de  $\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}^{1/5}}$ :

$$\tilde{h} = \tilde{t}^{-1/5} \mathcal{H}(\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}^{1/5}}) \tag{36}$$

On pose la variable de similitude  $\eta = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}^{1/5}}$ , Pour

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \tilde{h}^3), \quad k = \frac{1}{3}$$

on calcule les différentes dérivées:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{5} \frac{\tilde{t}^{-1/5}}{\tilde{t}} (\mathcal{H}(\eta) + \eta \mathcal{H}'(\eta)), \text{ et } \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{t}^{-2/5} \mathcal{H}'(\eta). \tag{37}$$

Puis,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \tilde{h}^3 \right] = \tilde{t}^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \left[ \mathcal{H}' \mathcal{H}^3 \right] \tilde{t}^{-1/5} \tag{38}$$

En regroupant 36 et 38 on obtient l'équation différentielle ordinaire issue de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(\eta \mathcal{H}) = -5k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} [\mathcal{H}^3 \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}\eta}] \tag{39}$$

ou

$$(-5k\mathcal{H}(\eta)^3\mathcal{H}'(\eta))' - (\eta\mathcal{H}(\eta))' = 0$$

par symétrie  $\mathcal{H}'(0) = 0$  d'où

$$-(5k)(\mathcal{H}(\eta)^2\mathcal{H}'(\eta)) = \eta \text{ donc } (5k/3)\mathcal{H}(\eta)^3 = b^2/2 - \eta^2/2$$

le tas s'arrête quand  $\mathcal{H}=0$  au point  $\eta=b$  (c'est un point fixe dans l'espace autosemblable!)

$$(\frac{5k}{3})\mathcal{H}(\eta)^3 = \frac{b^2}{2}(1-(\frac{\eta}{b})^2)$$

soit

$$\mathcal{H}(\eta) = [\frac{3b^2}{10k}(1 - \frac{\eta^2}{b^2})]^{1/3}.$$

La surface totale est

$$A = \int_{-b}^{b} \mathcal{H}(\eta) d\eta$$

### 2.15.1 Valeurs numériques

Arrivés à ce point, la solution peut être envisagée numériquement, on prend k = 1/3 et on définit

$$F(b) = \int_{-b}^{b} \left[ \frac{9b^2}{10} (1 - \frac{\eta^2}{b^2}) \right]^{1/3} d\eta$$

On va chercher à intégrer numériquement pour résoudre par Newton F(b) = 1, on a  $b_n$ , on estime la dérivée,  $F'(b_n)$  et on itère

$$b_{n+1} = b_n - \frac{F(b_n) - 1}{F'(b_n)}$$

à convergence.

$$F[b_{-}] := NIntegrate[(9./10*(b^{2} - x*x))^{(1/3.)}, {x, 0, b}];$$
 $v = FindRoot[F[b] == .5, {b, 1, 2}]$ 
 $(9./10*(b^{2}))^{(1/3.)} /. v$ 

La fonction est donc

$$\mathcal{H}(\eta) = (0.795159^3 - 0.9\eta^2)^{1/3} \text{ avec } \int_{-0.747412}^{0.747412} \mathcal{H}(\eta) d\eta = 1$$

#### 2.15.2 Valeurs redimensionnées

On a donc pour l'excursion maximale  $\tilde{x}_m = b\tilde{t}^{1/5}$  avec b = 0.747412, or on rappelle que l'adimensionnement que l'on a fait conduit à:

$$\tilde{x}=\bar{x}=x/L \ \text{ et que } \tilde{t}=\varepsilon^3\bar{t}, \ \text{ avec } \varepsilon=h/L \ \text{ et } \bar{t}=tgL/\nu.$$

Avec  $Ga = gL^3/\nu^2$ , en introduisant le groupement  $gt^2/h_0$  sans dimension qui rappelle la chute libre, on peut écrire pour le temps sans dimension

$$\bar{t} = \frac{tgL}{\nu} = \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{gt^2}{h_0}} Ga^{1/2},$$

donc

$$L_m/L = 0.747412\varepsilon^{7/10} \left(\sqrt{\frac{gt^2}{h_0}}\right)^{1/5} Ga^{1/10} t^{1/5}$$

Ca y est enfin, nous avons trouvé le préfacteur, que nous évoquions en section 2.2.4 avec la formule 6 c'est 0.747412 pour la longueur et idem 0.795159 pour la hauteur, en remplaçant  $\varepsilon = h/L$ :

$$L_m = 0.747412h_0L_0 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{-1/5} t^{1/5} \text{ puis } h_m = 0.795159 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{1/5} t^{-1/5}$$
(40)

Environ 34 pages de calculs....

#### 2.15.3 Valeurs numériques A = 2

L'application numérique pour A=2 donne b=1.13286 pour la longueur, ce sont les valeurs utilisées dans http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse\_noSV.c

$$\mathcal{H}(\eta) = (9./10(1.28338 - \eta^2))^{1/3} = (1.04922^3 - 0.9\eta^2)^{1/3} \text{ avec } \int_{-1.13286}^{1.13286} \mathcal{H}(\eta) d\eta = 2$$

#### 2.15.4 Rappels de fonctions spéciales

En fait, ce n'est pas fini, on peut trouver une solution analytique. On a par définition des fonctions hypergéométriques  ${}_2F_1(a,b,c,x)$  (il existe aussi des fonctions hypergéométriques généralisées  ${}_pF_q(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z)$ ) par la série :

$$_{2}F_{1}(a,b,c,x) = 1 + \frac{abx}{c} + \frac{a(a+1)b(b+1)x^{2}}{2c(c+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)x^{3}}{6c(c+1)(c+2)} + O\left(x^{4}\right)$$

où  $_2F_1(a,b,c,z)$  est par définition la solution de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre :

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0,$$

on vérifie facilement que

$$(1-x)^{-n} = {}_{2}F_{1}(n,b;b;x)$$

et on peut montrer en utilisant cette fonction que l'on a

$$\int (1-x^n)^m dx = x_2 F_1\left(-m, \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}; x^n\right)$$

ce qui donne

$$\int_0^1 (1-x^n)^m dx = \left\lceil \frac{\Gamma(m+1)\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{n}+1\right)} \right\rceil.$$

On rappelle que la fonction Gamma définie par

$$\Gamma: z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

est telle que  $\Gamma(z+1)=z$   $\Gamma(z)$ . Bien sûr pour tout entier, on retrouve la factorielle: n>0:  $\Gamma(n)=(n-1)!=1\times 2\times ...\times (n-1)$ .

On a aussi  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  car c'est l'intégrale de Gauss. Cette valeur permet, par récurrence, de déterminer les autres valeurs de la fonction gamma pour les demi-entiers positifs :  $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ,  $\Gamma(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ , ..., puis

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

#### 2.15.5 Valeurs analytiques

Ce qui donne dans notre cas:

$$\mathcal{H}(\eta) = \left[\frac{3b^2}{10k}(1 - \frac{\eta^2}{b^2})\right]^{1/3}$$

on intègre  $(1 - \frac{\eta^2}{b^2})^{1/3}$ 

$$\int_{-b}^{b} (1 - (\eta/b)^2)^{1/3} d\eta = b \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$

donc

$$\left[\frac{3b^2}{10k}\right]^{1/3} \left[b\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\right] = 1$$

on trouve la longueur du tas

$$b = \frac{5^{4/5} \sqrt[5]{k} \left(\frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{3})}\right)^{3/5}}{2^{2/5} \sqrt[5]{3} \pi^{3/10}}$$

qui vaut numériquement 0.747412 pour k=1/3. On retrouve la valeur numérique précédente. La hauteur est maximale en 0 est  $[\frac{3b^2}{10k}]^{1/3}$ 

$$\mathcal{H}(0) = \left(\frac{\sqrt[5]{\frac{15}{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)^{2/5}}{2^{3/5}\sqrt[5]{k}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{2/5}}\right)$$

qui vaut 0.795159 pour k=1/3. Ce qui termine la solution et détermine  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(0)(1 - \frac{\eta^2}{h^2})^{1/3}$$

Nous avons trouvé les préfacteurs sous une forme analytique, ce qui est remarquable. Les valeurs sont 0.7474 pour la longueur et 0.795 pour la hauteur: Ca y est! Enfin, nous avons trouvé les préfacteurs que nous évoquions en section 2.2.4 avec la formule 6 : 0.7474 pour la longueur et 0.795 pour la hauteur:

$$h_m = 0.795159 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{1/5} t^{-1/5} \text{ et } L_m = 0.747412 h_0 L_0 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{-1/5} t^{1/5}.$$
(41)

On reconnait le Galilée  $\frac{gL_0^3}{\nu^2}$  dans ces expressions et avec le "temps de chute"  $\frac{gt^2}{h_0}$ :

$$\frac{h_m}{h_0} = 0.795159 \left(\frac{h_0}{L_0}\right)^{-7/10} \left(\frac{gL_0^3}{\nu^2}\right)^{-1/10} \left(\frac{t}{\sqrt{h_0/g}}\right)^{-1/5} \tag{42}$$

et

$$\frac{L_m}{L_0} = 0.747412 \left(\frac{h_0}{L_0}\right)^{7/10} \left(\frac{gL_0^3}{\nu^2}\right)^{1/10} \left(\frac{t}{\sqrt{h_0/g}}\right)^{1/5}.$$
 (43)

Le calcul est fini. On a mis 40 pages...

#### 2.15.6 Comparaison de la solution autosemblable avec le calcul

La résolution directe de l'équation d'évolution est sur http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse\_noSV.c. La résolution du cas en Saint-Venant: http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse.c donne a peu près la même chose. La code a déjà été présenté plus haut.

Sur la figure 21 on a vu un tas initial rectangulaire s'affaisser à différents  $\tilde{t}$ . La figure 16 montre le tracé de  $\tilde{h}$  multiplié par  $\tilde{t}^{1/5}$  en fonction de  $\tilde{x}/\tilde{t}^{1/5}$ , les courbes se superposent pour des temps longs sur la solution analytique  $(3b^2/(10k)(1-(\eta/b)^2))^{1/3}$ . Cette dernière équation nous donne la solution finale, c'est à dire le "préfacteur" que nous cherchons depuis le début. On voit le chemin effectué pour trouver uniquement la valeur numérique finale...

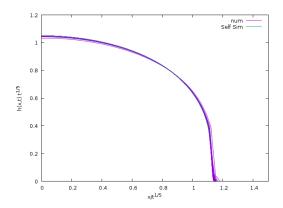


Figure 16: Plot at  $\tilde{t}=100,200,300...1000$  of  $\tilde{t}^{1/5}\tilde{h}(\tilde{x}/\tilde{t}^{1/5},t)$  with Basilisk, with a FV code order 1 HLL and the analytical solution  $(3b^2/(10k)(1-(\eta/b)^2))^{1/3}$ . Case A=2

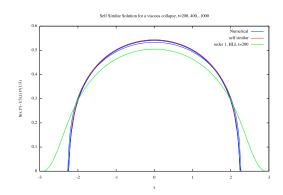


Figure 17: Plot at  $\tilde{t}=100,200,300...1000$  of  $\tilde{t}^{1/5}\tilde{h}(\tilde{x}/\tilde{t}^{1/5},t)$  with Basilisk, with a FV code order 1 HLL and the analytical solution  $(3b^2/(10k)(1-(\eta/b)^2))^{1/3}$ . Case A=4

## 2.16 Remarque: Navier Stokes, formulation alternative

Cette sous section est une rediscussion de la manière d'attaquer le dimensionement des ENS. En effet, on pourrait penser que le résulat final dépend d'un choix trop rapide des échelles; en fait pas vraiment. Nous venons d'écrire les ENS sous la forme (avec  $Ga = Fr^2 = \left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right)$ ):

$$\begin{split} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ Fr^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ Fr^2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - 1. \end{split}$$

Avec ce point de vue, comme  $Fr^2$  est petit, on est dans une description proche de Stokes. Les termes inertiels sont négligeables, le terme moteur de gravité est freiné par la viscosité. C'est bien la physique de l'écoulement, et on a résolu jusqu'au bout le problème. Cependant, on aurait pu choisir un autre point de vue et mesurer la vitesse avec  $\sqrt{gL}$ , la pression restant mesurée en  $\rho gL$ . Ce faisant, nous ne réfléchissons pas aux ordres de grandeurs mis en jeux comme précédemment.

Ainsi, la forme suivante est aussi possible (voir Da Vita et al. [12]), elle décrit moins les phénomènes physiques mis en jeux, puisque la forme choisie ainsi privilégie l'inertie qui est créée par le terme de gravité. Mais c'est la forme qui sera mise lors de la résolution des équations de Navier-Stokes par un code numérique où les coefficients sont "codés en dur";

$$\begin{cases}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\
\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\
\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) - 1.
\end{cases} (44)$$

avec  $Re = \frac{\sqrt{gL^3}}{\nu}$ . On reconnaît que ce Re est exactement le Fr précédent (c'est aussi  $Ga^2$ ). Cette expression diffère, mais lorsque l'on va résoudre numériquement les équations on observera que puisque l'écoulement est visqueux  $\frac{\sqrt{gL^3}}{\nu} \ll 1$  est petit, on encore

$$\frac{gL^3}{\nu^2} \ll 1$$
,

qui est bien la condition précédente de petit nombre de Froude (normal puisque  $Re = Fr = Ga^{1/2} = \frac{\sqrt{gL^3}}{\nu}$ .

Ayant ce nouveau système, reprenons le point de vue couche limite, c'est à dire que la couche est mince, elle est d'épaisseur relative  $\varepsilon$  avec  $\varepsilon=h/L$ . Posons  $\bar{x}=\tilde{x}$  et  $\bar{y}=\varepsilon\tilde{y}$  la moindre dégénérescence appliquée à l'incompressibilité donne que si on écrit  $\bar{u}=\varpi\tilde{u}$  alors  $\bar{v}=\varepsilon\varpi\tilde{v}$  pour la pression,  $\bar{p}=\pi\tilde{p}$ , et la moindre dégénérescence donne que  $\pi=\varepsilon$  pour conserver le terme moteur de chute. De même pour conserver par moindre dégénérescence l'équilibre pression, freinage visqueux, on va avoir

$$\pi \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \simeq \frac{\varpi}{Re\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{v}^2}$$

donc puisque  $\pi = \varepsilon$  on a  $\varpi = Re\varepsilon^3$ , ce qui donne:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \tag{45}$$

$$Re^{2}\varepsilon^{5}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + (\varepsilon^{2}\frac{\partial^{2}\tilde{u}}{\partial \tilde{x}^{2}} + \frac{\partial^{2}\tilde{u}}{\partial \tilde{y}^{2}})$$
(46)

$$Re^{2}\varepsilon^{6}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + (\varepsilon^{3}\frac{\partial^{2}\tilde{v}}{\partial \tilde{x}^{2}} + \varepsilon^{2}\frac{\partial^{2}\tilde{v}}{\partial \tilde{y}^{2}}) - 1. \tag{47}$$

puisque  $Fr=Re=\frac{\sqrt{gL^3}}{\nu}$  c'est bien exactement le même système d'équations qu'obtenu plus en haut en couche mince.

Conclusion: à petit  $\varepsilon$  et  $Re=\frac{\sqrt{gL^3}}{\nu}$  petit ou fixé, le système final est bien, lorsque l'on suppose un écoulement en couche mince :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - 1, \qquad \tilde{y} < \tilde{h}.$$

Quelque soit le point de vue initial d'adimentionnement, puisque l'écoulement est visqueux et en couche mince, le résultat final est le même (Eq. 20).

#### remarque, grand Re

On peut ensuite se poser la question de savoir quel est le terme important suivant qui va venir corriger le système précédent, si la viscosité n'est pas si grande que cela, le Reynolds peut ne pas être négligeable et on pourrait avoir un assez grand Reynolds. Si effectivement  $Re \gg 1$  on peut obtenir  $\varepsilon = Re^{-2/5}$ , soit:

$$\varepsilon = \left(\frac{gL^3}{\nu^2}\right)^{-1/5}$$

par moindre dégénérescence et conserver l'inertie dans l'équation longitudinale:

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \tag{48}$$

mais toujours

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{u}} - 1. \tag{49}$$

#### remarque, ordre suivant

Notre analyse en couche mince a fait disparaître des termes car la vitesse transverse est faible et la dérivée transverse forte. Dans le cas d'un fluide non newtonien, les simplifications ne sont pas si simples, et il reste possiblement tous les termes dans la continuité du tenseur des contraintes  $\underline{\bar{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0$  à l'interface soit sans dimension

$$\underline{\underline{\bar{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{p} & \bar{\tau}_{\bar{x}\bar{y}} \\ \bar{\tau}_{\bar{x}\bar{y}} & \bar{\tau}_{\bar{y}\bar{y}} - \bar{p} \end{pmatrix} \text{ et } \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_{\bar{x}}\bar{h})^2}} \begin{pmatrix} -\partial_{\bar{x}}\bar{h} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et les équations seraient, en supposant toujours la couche mince  $\bar{p}=\varepsilon\tilde{p}$ , pour la contrainte, elle est la même dans toute les directions et la prendre en  $\varepsilon^2$  est cohérent, car si  $\bar{\tau}_{\bar{x}\bar{y}}=\varepsilon^2\tilde{\tau}_{\tilde{x}\tilde{y}}, \ \bar{\tau}_{\bar{x}\bar{x}}=\varepsilon^2\tilde{\tau}_{\tilde{x}\tilde{x}}$  et  $\bar{\tau}_{\bar{y}\bar{y}}=\varepsilon^2\tilde{\tau}_{\tilde{y}\tilde{y}}$  on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \qquad \quad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\tau}_{\tilde{x}\tilde{x}}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{\tilde{x}\tilde{y}}}{\partial \tilde{y}} \qquad \quad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - 1 + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{\tau}_{\tilde{x}\tilde{y}}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\tau}_{\tilde{y}\tilde{y}}}{\partial \tilde{y}}$$

qui redonne au premier ordre le résultat attendu.

### 2.17 Résumé de la démarche et autres exemples

#### 2.17.1 Résumé de la démarche

Dans cet exemple nous avons examiné un écoulement très visqueux (équations de Stokes) qui s'écoulait en couche mince. Nous avons montré que le profil de vitesse était un demi-Poiseuille (appelé aussi profil de Nusselt,  $\operatorname{Nu}\beta$ elt). A partir de l'équation de conservation de la masse, nous avons vu que l'on pouvait obtenir une équation finale d'évolution pour la hauteur en fonction de x et du temps t.

L'exemple que nous venons de voir peut aussi se traiter directement à partir des équations de Saint-Venant qui justement décrivent des phénomènes en couche mince et qui supposent un profil de vitesse fixé (ce profil état plat ou demi-Poiseuille).

Rappelons les équations de Saint Venant.

## 2.18 Les équations et leur fermeture

Le système que nous considérons est donc celui des Equations de Saint-Venant (CRAS 1871 Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant, équations Shallow Water en anglais ou depth averaged), 1871: plus de 150 ans déjà, voir la vidéo https://www.youtube.com/watch?v=rmAFsEp17HQ). Ces équations sont présentées et discutées dans http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf:

$$\begin{cases}
\partial_t h + \partial_x Q = 0 \\
\partial_t Q + \partial_x \left[ \Gamma \frac{Q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right] = -gh \partial_x Z - \frac{\tau}{\rho}
\end{cases} ,$$
(50)

avec h(x,t) est la hauteur d'eau et Q(x,t) le débit, u(x,t) la vitesse moyenne, Q(x,t) = h(x,t)u(x,t) le flux,  $\Gamma$  facteur de forme (coefficient de Boussinesq),  $\tau$  frottement (fonction de Q et orienté par Q/|Q|) au fond et Z(x,t) est la "topographie" ou forme du fond, g la gravité...

On considère que les hypothèses pour l'établir (couche mince principalement) sont valables dans des cas variés qui ne sont pas uniquement ceux de l'eau.

Le facteur de forme  $\Gamma$  (coefficient de Boussinesq) et le frottement au fond dépendent du choix du profil de base et de la nature de l'écoulement.

Ces équations sont présentées et discutées plus en détail dans http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf

#### Note: passage à une équation seulement

Une simplification importante se produit lorsque l'inertie  $(\partial_t Q + \partial_x \Gamma \frac{Q^2}{h})$  est négligeable c'est "l'onde de crue diffusante". On a  $0 = -gh\partial_x h - gh\partial_x Z - \frac{\tau}{\rho}$ , on trouve Q que l'on met dans l'équation de la masse. Cela mène à une équation 1D de transport/diffusion...).

$$\partial_t h + \partial_x Q(h, \partial_x h, \partial_x Z) = 0 \tag{51}$$

Si la pression  $gh\partial_x h$  est aussi négligeable c'est l'" onde cinématique":  $0 = -gh\partial_x Z - \frac{\tau}{\rho}$ , on trouve Q que l'on met dans l'équation de la masse.

#### Fermetures pour Saint-Venant

Pour les équations de Saint-Venant (50), le facteur de forme  $\Gamma$  et le frottement au fond  $\tau$  dépendent du choix du profil de base et s'expriment en fonction de Q et h.

• Pour les canaux et fleuves, en turbulent, faute de mieux, pour résoudre Saint-Venant Eq. 50 on choisit

$$\Gamma = 1 \text{ et } \tau = \rho c |Q| \frac{Q}{h^{\beta}}$$

le facteur de forme vaut l'unité car on suppose que le profil est assez plat,  $\tau$  est le frottement au fond et c le coefficient de friction, ce coefficient dépend de la nature du sol. Avec  $\beta=2$  on a la loi de Chézy (dite aussi Darcy Weissbach, frottement turbulent habituel en  $u^2$ ) avec  $\beta=7/3$ , on a la loi de Manning-Strickler.

• Pour de l'eau en couche mince, en laminaire (ruissellement autour d'un Poiseuille), par exemple la lave en première approximation, ou pour un fluide assez visqueux (la pâte à crêpe, la pluis qui ruisselle sur une véranda...)

$$\Gamma = \frac{6}{5}$$
 et  $\tau = 3\mu \frac{|Q|}{h^2}$ 

• Pour un granulaire (milieux constitué de particules de plus d'une dizaine de micromètres, le sable, le gravier, les rochers.... en dessous, il s'agit des poudres qui ont des propriétés différentes), la modélisation de leur écoulement passe par Saint-Venant (appelé Savage-Hutter dans ce cas). On s'inspire du frottement de Amontons-Coulomb liant la contrainte tangentielle  $\tau$  à la contrainte normale  $\rho gh$ . On définit un coefficient de friction  $\mu$  qui peut être variable  $\mu(I) = \mu_s + \Delta \mu/(1+I_0/I)$  ( $\mu_s \sim \Delta \mu \sim I_0 \sim 0.3$  suivant les types de matériaux) et fonction de  $I=(d/h)5Q/2h/\sqrt{gh}$  (nombre sans dimension que l'on peut construire avec les quantités en jeu et la taille du grain d). Le coefficient  $\mu$  est compris au final entre 0.2 et 0.4 suivant les matériaux et :  $\tau = \mu \rho gh$ . Le profil de base est calculable, c'est

le profil de Bagnold, nous allons voir tout ceci un peu plus loin dans ce document http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/mainM2EMN.pdf (on ne donne pas de détail ici), on peut donc estimer  $\Gamma$ 

$$\Gamma = \frac{5}{4} \text{ et } \tau = \mu \rho g h \frac{|Q|}{Q}$$

• Pour des fluides complexes, si on néglige le seuil, (les écoulements d'avalanche/inondation finissent toujours par être très sales, ce sont des mélanges complexes de cailloux, de graviers, de boue et d'eau) des fluides en loi de puissance sont souvent employés, nous allons voir tout ceci un peu plus loin dans ce document. Pour le cas des glaciers en écoulement n=1/3, c'est la loi de Glen. Pour la boue 0.1 < n < 0.4

$$\Gamma = \frac{2(1+2n)}{2+3n}$$
 et  $\tau = c_n \mu_n \left(\frac{Q}{h^2}\right)^n \frac{|Q|}{Q}$ 

• Pour de la neige, on modifie le  $\mu$  précédent, on garde un  $\mu_0$  constant et on ajoute une friction de type fluide en carré de la vitesse et  $\xi$  un coefficient. C'est la loi de Voellmy ( $\mu_0$  valeur typique 0.2 et  $\xi$  valeur typique 500m/s)

$$\Gamma = 1$$
 et  $\tau = \rho g h (\mu_0 + \frac{1}{\xi} \frac{Q^2}{h^3}) \frac{|Q|}{Q}$ 

- Pour les fluides à seuil (boue, béton...), il faut rajouter une condition, liée au seuil de contrainte. Dans ces cas l'usage est d'utiliser l'onde cinématique, ou l'onde diffusante Eq. 51, voir les écoulements de Bingham nous allons voir tout ceci un peu plus loin dans ce document http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/mainM2EMN.pdf
- \* En pratique, tout le monde prend abusivement  $\Gamma=1$  (coefficient de Boussinesq) pour les résolutions, ce que nous ferons par la suite, la raison est que cela permet d'écrire une équation d'énergie et d'assurer l'invariance Galiléenne des équations. Le frottement n'est en revanche pas pris constant mais fonction des variables Q et h; il dépend donc du type d'écoulement (turbulent, laminaire, granulaire...).

#### 2.18.1 Lien entre Saint-Venant et ce que nous avons vu

Nous avons déjà vu qu'en intégrant directement sur l'épaisseur du film les équations simplifiées en ondes longues précédentes, en supposant  $\varepsilon$  petit, et dans un premier temps  $\frac{gL^3}{\nu^2}$  assez grand de manière à garder ce terme dans l'inertie:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \tag{52}$$

$$\frac{gL^3}{\nu^2}\varepsilon^5\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + O(\varepsilon^2)$$
(53)

$$\left(\frac{gL^3}{\nu^2}\varepsilon^5\right)O(\varepsilon) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - 1 + O(\varepsilon^2). \tag{54}$$

En intégrant la première sur l'épaisseur on retrouve

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{Q})}{\partial \tilde{x}} = 0$$

en intégrant la troisième on obtient bien la pression hydrostatique, et en intégrant la deuxième sur l'épaisseur on obtient en supposant que le profil de vitesse reste de la forme d'un demi-Poiseuille: voir

$$\frac{gL^3}{\nu^2}\varepsilon^5 \left( \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{6}{5} \frac{\tilde{Q}^2}{\tilde{h}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{1}{2} (\tilde{h}^2) = -3 \frac{\tilde{Q}}{\tilde{h}^2}$$

En général, ces équations sont réécrites avec dimensions ce qui donne :

$$\begin{split} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (Q)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{6}{5} \frac{Q^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= -3\nu \frac{Q}{h^2} \end{split}$$

## 2.18.2 Cas de l'effondrement de fluide parfait sur fond plat, Rupture de Barrage (invariants de Riemann)

Il s'agit d'étudier avec les équations de Saint-Venant la chute d'un tas initialement au repos et rectangulaire sous l'action de la gravité et avec un frottement négligeable:

$$\begin{cases}
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q^2}{h} + \frac{g}{2} (h^2) \right] = 0
\end{cases}$$
(55)

Un cas particulier important est celui de la rupture de barrage, les effondrements étant considérés comme des doubles ruptures de barrage.

La solution de la rupture de barrage est limitée par u=0 à gauche et h=0 à droite. A gauche, la vitesse étant nulle on a  $u+2c=2c_0$  et e  $\frac{x}{t}=0-c_0$ , l'information de la rupture se propage en  $x/t=-c_0$  et remonte du côté  $h=h_0$ . Ce qui donne  $c=\frac{1}{3}(2c_0-\frac{x}{t})$  et  $u=\frac{1}{3}(2c_0+2\frac{x}{t})$ . A droite, l'onde est limitée par

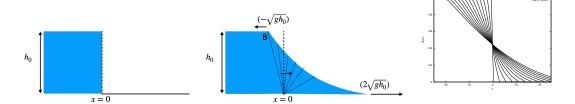


Figure 18: rupture de barrage, la surface libre à différents temps,

la hauteur nulle en h = 0 donc  $\sqrt{gh} = 0 = \frac{1}{3}(2c_0 - \frac{x}{t})$  soit sur la caractéristique  $x = 2c_0t$ . Le point mouillé se propage avec une vitesse double sur le sec en aval que le point de départ de vidange en amont.

• pour  $-\infty < x < -t\sqrt{gh_0}$  on a  $h = h_0$ , la hauteur d'eau ne varie pas. Le signal de la perturbation due au barrage détruit se propage vers l'amont à la vitesse  $c_0$ .

• pour 
$$-t\sqrt{gh_0} < x < 2t\sqrt{gh_0}$$
 on a  $\sqrt{gh} = \frac{1}{3}(2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t})$  donc

$$h = \frac{x^2}{9gt^2} - \frac{4x}{9t}\sqrt{\frac{h_0}{g}} + \frac{4h_0}{9} \text{ et } u = (2/3)(x/t + \sqrt{gh_0}).$$

On est dans le régime d'onde simple présenté auparavant.

• pour  $2t\sqrt{gh_0} < x < \infty$  on a h = 0, on a la deuxième limite correspondant à la hauteur nulle.

Remarquons que lors de la rupture d'un barrage, le débit est constant en x = 0, c'est  $hu = \frac{8h_0}{27}\sqrt{gh_0}$ .

#### 2.18.3 Cas de l'effondrement visqueux sur fond plat

Il s'agit d'étudier avec les équations de Saint-Venant la chute d'un tas initialement au repos et rectangulaire sous l'action de la gravité et avec un frottement visqueux de Poiseuille:

$$\begin{cases}
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{6}{5} \frac{Q^2}{h} + \frac{g}{2} (h^2) \right] = -3\nu \frac{Q}{h^2}
\end{cases}$$
(56)

pour les temps longs, on a équilibre entre la pression hydrostatique et la friction  $3\nu Q/h^2 = -gh\partial_x h$ . On substitue Q dans l'équation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{g}{3\nu} \frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

qui est de la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

On retrouve bien entendu exactement le même problème que celui que l'on vient de résoudre:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ avec comme donn\'ee } \tilde{h}(\tilde{x}, 0)$$

C'est normal, dans un cas on prend toutes les équations et on néglige des termes en supposant une couche mince pour ne garder que la pression hydrostatique, on néglige ensuite l'inertie et on ne garde que les termes visqueux et de de gradient de pression pour trouver que la vitesse est un demi-Poiseuille et par l'équation de l'incompressibilité on trouve une équation d'évolution de la surface libre. Dans l'autre cas, on suppose directement une couche mince avec pression hydrostatique et on impose que la vitesse est un demi-Poiseuille, on néglige ensuite l'inertie pour ne garder que l'équilibre frottement pression et par l'équation de conservation de la masse on trouve une équation d'évolution de la surface libre. La référence [23] propose aussi des comparaisons expérimentales.

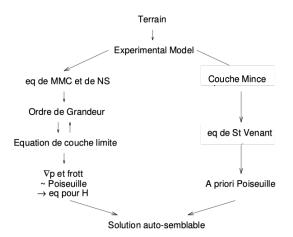


Figure 19: Pour résumer : schéma simplifié de deux démarches possibles menant au même résultat. Ici on est parti par la gauche en écrivant les équations, en les simplifiant puis en obtenant la solution. On aurait pu partir directement par la droite en partant de Saint-Venant que l'on a vu l'année dernière.

Nous avons ainsi réussi à résoudre le problème du "sploutch" (double "rupture de barrage", *slump* en anglais) en newtonien, en Navier Stokes simplifié.... avant de passer au non newtonien, regardons d'autres exemples pertinents.

## 2.18.4 Second exemple, effondrement simple d'un fluide initialement en tas sur un sol incliné (second problème de Huppert)

On peut maintenant se poser la question de l'effondrement sur un plan incliné qui paraît un bon modèle pour une avalanche le long d'une montagne. Cette fois ci le moteur principal est le poids projeté le long de la pente. Le sol est représenté par la fonction Z, l'angle est donc Z', si c'est un plan incliné (figue 20) de gauche à droite d'angle  $\alpha > 0$ , on a  $Z' = -\alpha$ . Cet exemple est extrait de Huppert [25], il s'agit d'étudier l'effondrement du tas qui se produit sur un sol incliné.

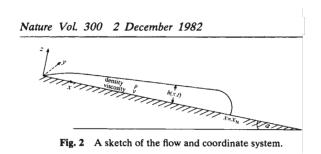


Figure 20: Effondrement sur un plan incliné, dessin de Huppert [25] (second problème de Huppert).

#### • Avec NS

On peut reprendre la démarche précédente à partir de Navier Stokes. La pression reste inchangée car  $\cos \alpha \simeq 1$ , elle est donc toujours hydrostatique. Il y a un terme en plus dans l'équation de conservation de quantité de mouvement longitudinale : la projection du poids avec comme ordre de grandeur  $\rho g \alpha$ . Ce terme va se comparer au gradient de pression longitudinal qui lui est toujours  $\rho g \varepsilon$ . On comprend donc bien que si  $\varepsilon \gg \alpha$ , on retrouve le premier problème de Huppert...

Si  $\varepsilon \sim \alpha$  on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon} \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - 1, \qquad \tilde{y} < \tilde{h} \qquad (57)$$

Si  $\varepsilon \ll \alpha$ , il faut re mesurer la vitesse avec  $\alpha$  car c'est le terme le plus fort, il n'y a plus de gradient de pression longitudinale

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \qquad 0 = +\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + 1 \qquad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - 1, \qquad \tilde{y} < \tilde{h} \qquad (58)$$

Ce sont encore des équations de couche mince visqueuse, ou aussi des équations de "lubrification".

À noter que l'article original de Huppert [25] part de la forme différentielle de lubrification avec dimensions  $0 = -g\partial_x Z + \nu \partial_y^2 u$ ; en fait il part même d'un angle assez grand, et c'est  $0 = g \sin \alpha + \nu \partial_y^2 u$  qu'il écrit, voir en annexe).

Il ne manque que les conditions limites pour résoudre le problème qui sont toujours

$$\tilde{y} = \tilde{h};$$
  $\tilde{u}(\tilde{y} = 0) = \tilde{v}(\tilde{y} = 0) = 0$   $\tilde{p}(\tilde{y} = \tilde{h}) = 0$   $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{y} = \tilde{h}) = 0.$  (59)

On a aussi en  $\tilde{y} = \tilde{h}$  la condition cinématique:  $\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}$ . On va retrouver en intégrant le profil de Poiseuille, puis on calcule le flux, puis l'équation de la masse devient

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{h}^3 = 0,$$

Retrouvons ceci avec Saint-Venant.

#### • Avec SV

On suit ici la démarche Saint-Venant; on garde toujours la pente  $-gh\partial_x Z$  qui génère l'écoulement, la friction  $-3\nu Q/h^2$  qui freine, et le terme de gradient de pression hydrostatique  $gh\partial_x h$ , l'équilibre donne:

$$3\nu Q/h^2 = -gh\partial_x Z - gh\partial_x h,$$

Pour les pentes fortes telles que l'angle de pente est supérieur à l'angle du tas  $|Z'| \gg \partial_x h$  alors il ne reste que

$$0 = -qh\partial_x Z - 3\nu Q/h^2$$

On obtient  $Q = -gZ'h^3/(3\nu)$ . L'équation de la masse devient

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gZ'}{3\nu} \frac{\partial}{\partial x} h^3 = 0$$
, ou  $\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gZ'}{\nu} h^2 \frac{\partial}{\partial x} h = 0$ ,

de la forme (on pose  $k = (-gZ'/\nu) > 0$ )

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{k}{3} \frac{\partial}{\partial x} h^3 = 0$$
, ou  $\frac{\partial h}{\partial t} + kh^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ .

La forme de droite est une équation de transport où la vitesse est  $kh^2$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\frac{\partial h}{\partial r} = 0.$$

Par changement d'échelles on cherche à rendre l'équation et ses conditions aux limites invariantes :

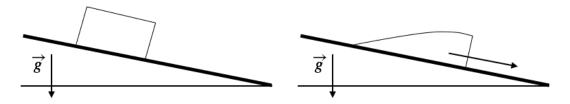


Figure 21: Effondrement sur un plan incliné

voir le cours de M2 http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/SSS.pdf,

l'invariance par dilatation donne  $H/T=H^3/X$ , la masse conservée donne HX=1, ce qui permet de trouver  $H=T^{-1/3}$  et  $X=T^{1/3}$ .

En faisant la technique classique de recherche sous forme implicite  $\mathcal{F}(x,t,h)$ , en substituant la transformation précédente qui est invariante.... on trouve la forme explicite...

... on obtient donc une solution de la forme  $t^{-1/3}\mathcal{H}(x/t^{1/3})$  soit quand on substitue dans l'équation

$$-\eta \mathcal{H}'(\eta) - \mathcal{H}(\eta) + 3k\mathcal{H}(\eta)^2 \mathcal{H}'(\eta) = 0$$

si  $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}_0$ 

$$(-\eta \mathcal{H}(\eta) + k\mathcal{H}(\eta)^3) = k\mathcal{H}_0^3$$

on a la forme implicite

$$\eta = k(\mathcal{H}(\eta)^2 - \frac{\mathcal{H}_0^3}{\mathcal{H}(\eta)})$$

Cas  $H_0 = 0$ 

Dans Huppert, on part d'une masse localisée entre  $x_0$  et  $x_1$ , on va donc prendre  $H_0 = 0$ . Si cette valeur n'est pas nulle c'est la valeur en  $-\infty$  pour la hauteur. Donc  $\eta = k\mathcal{H}(\eta)^2$ , simplement, on va avoir

$$\mathcal{H}(\eta) = \sqrt{(\eta)/k},$$

la solution de

$$\frac{\partial h}{\partial t} + kh^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

est simplement pour  $x < x_f$ 

$$h = t^{-1/3} \sqrt{(x)t^{-1/3}/k} = \sqrt{\frac{x}{kt}}$$

On se donne une masse initiale  $A = \int_0^{x_1} h(x,0) dx$  qui se déplace entre  $x_f t$ , position du front et 0 le front arrière qui ne bouge pas, la masse est donc ultérieurement

$$\int_0^{x_f} \sqrt{\frac{x}{kt}} dx = (2/3)\sqrt{x_f^3/(kt)}$$

qui est A par conservation de la masse soit  $x_f = (\frac{9A^2kt}{4})^{1/3}$ .

Cela correspond à une valeur  $\eta_f$  qui est donc  $(\frac{3A}{2})^{2/3}(k)^{1/3}$ 

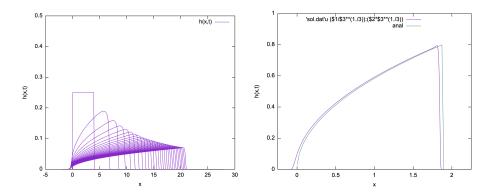


Figure 22: Effondrement d'un tas rectangulaire sur un plan incliné à gauche, déformation progressive vers la solution analytique autosemblable à droite

Sur la figure 22 on a tracé, pour l'écoulement sur un plan incliné à gauche l'effondrement du tas et à droite la solution en variables de similitude. On constate que l'on a bien  $ht^{1/3}$  tend vers  $\mathcal{H}(\eta) = \sqrt{(\eta)/k}$ , fonction de  $\eta = x/t^{1/3}$ .

Le code est http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscolsqrt.c

#### Remarque: caractéristiques (solution alternative)

Dans l'article de Huppert, une autre technique est proposée. La solution de l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + kh^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

est assez subtile, on peut écrire l'équation sous la forme d'une équation de transport

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

la solution est constante le long des courbes caractéristiques

$$\frac{dx}{dt} = c(x,t)$$
 avec  $c = kh^2$ 

pour une distribution donnée,  $h(x,t=0)=h_0(x)$  alors le long des droites  $x=ct+\xi$  la solution est la même. Voir cours de M1 http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf

Le long des droites  $x = ct + \xi$  la valeur de la solution est constante, c'est la valeur en  $\xi$  qui vaut ensuite x - ct qui est conservée.

$$x = \xi + tc(\xi, 0)$$
 et  $h(x, t) = h_0(\xi)$ 

Donc, si on a une distribution au temps t = 0 de hauteur  $h_0(x)$  initiale, chacun de ces points x est en fait un des points initiaux  $\xi$ , alors la solution est  $h = h_0(x - tc(h_0(\xi)))$ .

Si on est très loin, comme le tas initial est petit, et que le tas s'allonge de plus en plus, on peut négliger  $\xi$  et donc la droite est telle que sa pente  $dx/dt \sim x/t$ , ainsi comme  $c = kh^2$  on retrouve que  $h = \sqrt{x/(kt)}$ .

Numériquement il faut faire attention car un choc se produit (ou un ressaut si on préfère )...

$$-c[|h|] + [|h^n|] = 0$$

relation de Hugoniot

En pratique, une sorte de mur de fluide arrive avec une auteur qui décroît certes le long de x mais qui est quand même le maximum.

Remarque: voir en annexe le cas général

Cas générique, ici n=3

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h^n \right) = 0$$

voir en annexe le cas général

## 2.18.5 Cas ou le terme de pente et de pression sont du même ordre de grandeur

Nous avons vu que dans le cas général l'équation longitudinale était

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\alpha}{\varepsilon}$$

Dans le cadre considéré de Saint - Venant on garde toujours la pente  $-gh\partial_x Z$  qui génère l'écoulement, la friction  $-3\nu Q/h^2$  qui freine, ce sont les deux termes principaux. Si on prend une pente constante  $Z' = -\tan \alpha$ , l'ordre de grandeur de ces termes est  $gh_0 \tan \alpha$  voire  $gh_0\alpha$  car l'angle est assez faible.

A priori, le terme de gradient de pression  $-gh\partial_x h = O(\rho gh_0/L)$  est d'ordre de grandeur relatif plus petit, il est comparé aux deux précédents d'ordre  $\frac{h_0}{L}\frac{1}{\alpha}$  (c'est le  $\varepsilon/\alpha$ ). En général, l'angle est assez grand et l'avalanche est assez longue par rapport à sa hauteur pour que  $\frac{h_0}{L}\frac{1}{\alpha}\ll 1$ , l'équation complète

$$3\nu \frac{Q}{(gh^3)} = -\partial_x Z - \partial_x h,$$

a un terme d'ordre  $\frac{h_0}{L}\frac{1}{\alpha}$  devant le gradient de pression

$$3\frac{\tilde{Q}}{(\tilde{h}^3)} = 1 - \frac{h_0}{L} \frac{1}{\alpha} \partial_{\tilde{x}} \tilde{h},$$

c'est un petit paramètre, et donc il ne reste que  $3\nu Q/h^2 = -gh\partial_x h$ , dans les équations, exactement comme dans le cas précédent. La solution est donc une langue d'épaisseur constante  $h_0$  se déplaçant à la vitesse  $gh_0^3\alpha/(3\nu)$ . La solution est comme un "choc" se produit. On dit "choc" par analogie avec la dynamique des gaz ou encore "ressaut" en hydrodynamique ou encore "front" en géophysique. dans ce cas la variable de similitude est x/t.

L'apparition de l'existence d'un choc veut dire qu'il manque des termes de régularisation et qu'en fait l'équation est singulière, il faut changer d'échelle en x car un "choc" se produit i.e. une variation brusque sur une échelle plus courte. On dit "choc" par analogie avec la dynamique des gaz ou encore "ressaut" en hydrodynamique ou encore "front" en géophysique. Ce choc se produit à l'échelle L telle que  $\frac{h_0}{L}\frac{1}{\alpha}=1$ .

On pourrait reprendre l'exemple précédent et faire un raccord asymptotique comme Mei [34], la solution que nous allons présenter est la même que celle de la solution locale au niveau du front pour toute avalanche d'extension finie.

examinons le cas  $\frac{\alpha}{\varepsilon}=1$ . On a alors le problème général avec les deux termes précédents:

$$\frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}Q = 0$$
, avé  $Q = \frac{h^3}{3}(1 - \frac{\partial h}{\partial x})$ 

en effet le premier problème de Huppert est de type diffusif

$$\frac{\partial}{\partial t}h = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{h^3}{3}\frac{\partial}{\partial x}h)$$

le second est de type transport

$$\frac{\partial}{\partial t}h + h^2 \frac{\partial}{\partial x}h = 0$$

Ce nouveau sploutch est un mix des deux. On n'a plus de solution semblable, il faut passer à la résolution numérique. celle ci est faite ici http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscolsqrt\_noSV.c

On remarquera que le ressaut qui apparaissait dans le second problème disparaît par l'addition de la viscosité non linéaire...

Nous allons retrouver ce même problème dans le point suivant.

#### 2.18.6 Troisième exemple, propagation d'un front sur un sol incliné

Considérons un langue semi infinie représentant une avalanche fine sur un sol incliné d'un angle  $\theta$ . Au loin en amont la hauteur est constante, à droite il n'y a pas encore de fluide, entre les deux un front se déplace.

On peut refaire l'analyse précédente en NS, mais comme c'est la même chose faisons le en SV. Le terme moteur est toujours  $-gh\partial_x Z$ , mais près du front, le terme de pression n'est pas négligeable car  $\partial_x h$  devient grand. L'équilibre donne:

$$3\nu Q/h^2 = -gh\partial_x Z - gh\partial_x h,$$

bien entendu, on retrouve cette équation en partant de la lubrification (consulter Mei [34]

$$3\frac{\tilde{Q}}{(\tilde{h}^3)} = 1 - \frac{h_0}{L} \frac{1}{\alpha} \partial_{\tilde{x}} \tilde{h},$$

c'est un petit paramètre, et donc il ne reste que  $3\nu Q/h^2 = -gh\partial_x h$ , dans les équations, exactement comme dans le cas précédent. La solution est donc une langue d'épaisseur constante  $h_0$  se déplaçant à la vitesse  $gh_0^3\alpha/(3\nu)$ . La solution est comme un "choc" se produit. On dit "choc" par analogie avec la dynamique des gaz ou encore "ressaut" en hydrodynamique ou encore "front" en géophysique. dans ce cas la variable de similitude est x/t.

L'apparition de l'existence d'un choc veut dire qu'il manque des termes de régularisation et qu'en fait l'équation est singulière, il faut changer d'échelle en x car un "choc" se produit i.e. une variation brusque sur une échelle plus courte. On dit "choc" par analogie avec la dynamique des gaz ou encore "ressaut" en hydrodynamique ou encore "front" en géophysique. Ce choc se produit à l'échelle L telle que  $\frac{h_0}{L}\frac{1}{\alpha}=1$ .

On pourrait reprendre l'exemple précédent et faire un raccord asymptotique comme Mei [34], la solution que nous allons présenter est la même que celle de la solution locale au niveau du front pour toute avalanche d'extension finie.

On substitue Q dans l'équation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{gh^3}{3\nu} (-Z' - \frac{\partial}{\partial x}(h)) \right] = 0.$$

On prend une pente constante  $Z' = -\tan \theta$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g}{3\nu} \frac{\partial}{\partial x} [(\tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x})h^3] = 0$$

on a ici le mélange des deux effets précédents, la pente du fond et du fluide. On suppose que l'on se donne la hauteur au loin de l'avalanche  $h_0$  telle que la solution loin du front qui est  $h=h_0$ , constant donc  $Q=Q_0=\frac{gh_0^3\tan\theta}{3\nu}$ 

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q_0}{\tan \theta h_0^3} \frac{\partial}{\partial x} [(\tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x})h^3] = 0$$

comme on se donne une hauteur constante au loin H=1, la recherche de solution autosemblable donne que T et X sont identiques (pour préserver  $\partial_t$  et  $\partial_x$ ) mais H et X sont identiques (pour préserver  $\tan\theta h^3 - h^3 \frac{\partial h}{\partial x}$ ). On se place dans le repère du front, on essaye une solution du type  $h(x,t) = h_0 \mathcal{H}(\frac{(x-c_0t)}{\lambda})$  d'où  $\frac{\partial h}{\partial t} = -c_0h_0\mathcal{H}'/\lambda$  et  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \eta}$  donc

$$-c_0 h_0 \mathcal{H}' + \frac{\lambda Q_0}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \eta} [\mathcal{H}^3(\tan \theta - \frac{h_0}{\lambda} \mathcal{H}')] = 0$$

donc  $c_0 = \frac{Q_0}{h_0}$  et  $\lambda = \frac{h_0}{\tan \theta}$  d'où l'équation canonique

$$-\mathcal{H}' + \frac{\partial}{\partial \eta} [\mathcal{H}^3 (1 - \mathcal{H}')] = 0$$

on intègre et compte tenu de la valeur au front  $\mathcal{H}=0$ 

$$0 - \mathcal{H} + \mathcal{H}^3(1 - \mathcal{H}') - 0 = 0$$
, donc  $\mathcal{H}' = (1 - \mathcal{H}^{-2})$ 

en prenant l'inverse de  $\mathcal{H}' = \frac{d\mathcal{H}}{d\eta}$ 

$$\frac{d\eta}{d\mathcal{H}} = -\frac{\mathcal{H}^2}{(1 - \mathcal{H}^2)}$$

par décomposition en éléments simples:

$$d\eta = -\frac{\mathcal{H}^2}{(1-\mathcal{H}^2)}d\mathcal{H} \text{ devient } d\eta = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-\mathcal{H})} + \frac{1}{(1+\mathcal{H})}\right)\right]d\mathcal{H}$$

d'où au final:

$$\mathcal{H} + \frac{1}{2}Log(\frac{1-\mathcal{H}}{1+\mathcal{H}}) = \eta$$

qui nous donne la forme du front de manière implicite tracé sur la figure 23....

On a bien sûr remarqué que ce problème est un mélange des deux problèmes de Huppert puisqu'il y a les deux termes pente et pression dans l'équation.

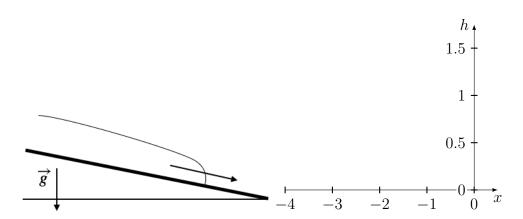


Figure 23: Profil d'une avalanche visqueuse sur un plan incliné, solution de front invariante se propageant à vitesse constante  $\mathcal{H} + \frac{1}{2}Log(\frac{1-\mathcal{H}}{1+\mathcal{H}}) = \eta$ 

#### 2.19 Effet de la tension de surface

La vision précédente laisse entendre que tout tas de fluide peut s'écouler et que tout écoulement naturel peut se faire dans un laboratoire. Or, si la maquette est trop petite, les effets de tension superficielle vont apparaître. C'est ce que fait Huppert dans son second problème ("Flow and instatbility of a viscous current along a slope") [25].

La tension superficielle ajoute un terme de saut de pression  $(p_e - p_a - \sigma K)n_i$ où  $\sigma$  est tension superficielle et K courbure de la surface. Si on néglige les non linéarités il ne reste que

$$p_e = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Le cas général conserve les trois contributions, on a équilibre entre la pression hydrostatique, la friction, la tension de surface et la pente

$$\frac{3\mu Q}{h^2} = -\rho g h \partial_x Z - \rho g h \partial_x h + h \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}.$$

et donc

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{gh^3}{3\nu} \left( -Z' - \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho q} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right] = 0$$

le terme supplémentaire est d'ordre 1 pour des longueurs de l'ordre de  $\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ ; de l'eau pure et à  $20^o$  cette longueur est appelée "longueur capillaire", elle vaut 2.7mm pour une tension de surface de  $70.10^{-3}Nm^{-1}$ .

On appelle nombre de Bond le nombre sans dimension  $\frac{\rho g \ell^2}{\sigma}$ , Dans le cas pente faible et taille très petite (petit nombre de Bond) il ne reste que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\sigma}{3\rho\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) = 0.$$

de la forme

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} \right) = 0$$

qui admet des solutions autosemblables...

Bien entendu, la tension de surface est complètement négligeable dans la nature car les échelles mises en jeu sont bien plus grandes. En revanche, pour les expérience de laboratoire à taille réduite, la tension de surface est importante et va donc fausser la remise à l'échelle. Pour l'anecdote, une maquette de la ville de Venise a été faite à la fin du XXème siècle pour étudier la montée des eaux dans la lagune et l'influence sur la ville représentée de manière très réaliste, et malheureusement les résultats expérimentaux ont été inutilisables car la la longueur capillaire était trop grande!

# 2.20 Codes en Basilisk pour le cas des écoulements visqueux newtoniens

Résolution directe de l'équation d'évolution du premier problème de Huppert:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse\_noSV.c

Cas résolution en Saint-Venant du premier problème de Huppert:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse.c

Cas en Navier Stokes complet de l'effondrement premier problème de Huppert:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/column\_viscous.c

Cas en Navier Stokes du premier problème de Huppert: (avec la partie non newtonienne):

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/column\_SCC.c ou plus simple à regarder en premier (uniquement Newtonien)

#### 2.20.1 Tas visqueux sur fond incliné

Cas résolution directe du premier problème de Huppert:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse\_noSV.c

Cas résolution en Saint-Venant du second problème de Huppert:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscolsqrt.c

Résolution directe de l'équation d'évolution du second problème de Huppert (avec le gradient de pression) :

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscolsqrt\_noSV.c

Cas en Navier Stokes:

à faire

## 2.21 Conclusion pour le cas des écoulements visqueux newtoniens

Dans ce chapitre nous avons examiné le modèle le plus simple d'écoulement inspiré d'écoulement de boue de débris ou de neige. Nous l'avons simplifié en l'effondrement ou collapse d'un tas de fluide newtonien visqueux de viscosité  $\nu$  initialement maintenu au repos avec une forme rectangulaire ou carrée de dimension  $L_0$  et  $h_0$  sous l'action de la gravité g sur un plan parfaitement horizontal. Cet écoulement est rapidement un écoulement en couche mince lent qui est un équilibre entre les forces de gravité intervenant sous la forme de la pression hydrostatique qui génère le mouvement et de la viscosité qui freine le fluide. Avec ces premiers

ingrédients on trouve la loi d'échelle du 'run out', la distance maximale parcourue

$$L_m \propto h_0 L_0 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{-1/5} t^{1/5}.$$

Si on continue la résolution des équations de Navier Stokes simplifiées on voit que le profil est vite un profil de demi Poiseuille. La dynamique de la couche se réduit à une seule équation en x et t issue de l'équation de conservation de la masse et portant sur la hauteur du fluide. Une méthode numérique en volumes finis a été présentée pour la résoudre. Dans ce cas on peut même résoudre l'EDP finale par une solution autosemblable qui s'intègre exactement à l'aide de fonctions spéciales. On trouve ainsi le préfacteur devant la loi d'échelle de la distance maximale parcourue : les valeurs numériques finales

$$h_m = 0.795159 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{1/5} t^{-1/5} \text{ et } L_m = 0.747412 h_0 L_0 \left(\frac{h_0^2 L_0^2 \nu}{g}\right)^{-1/5} t^{1/5}.$$
(60)

sont la solution finale de ce problème.

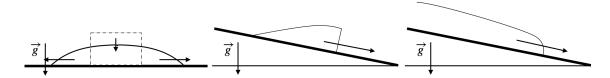


Figure 24: Trois configurations de "sploutch" que nous savons traiter complètement en écoulement newtonien visqueux en couche mince (lubrification). Ces trois "collapses" correspondent à un effondrement sur place, un effondrement sur un sol incliné et une langue d'avalanche.

# 2.22 Transition vers des écoulements plus réalistes

Avec cette vision newtonienne, des fluides aussi variés que la pâte à crêpe 9.3 ou la lave ou la glace peuvent être décrits.

#### 2.22.1 Lave

Dans le cadre de l'intitulé de ce cours, on peut lire par exemple pour le cas de la lave "on lava dome growth, with application to the 1979 lava extrusion of the Soufrière of St. Vincent" de Huppert et al 1979 [22] et https://lmv.uca.fr/volcflow/

On suppos l'écoulement axi, à titre d'exercice on peut faire le calcul (fait aussi dans [23]).

Indications : bien entendu on suppose un écoulement à pression hyrdostatique très lent, donc on retrouve une vitesse de demi Poiseuille. La diférence notable est l'équation de conservation de la masse qui s'écrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h r u(r, y, t) dr = 0$$

on trouve alors

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{g}{3\nu r} \frac{\partial}{\partial r} r h^3 \frac{\partial h}{\partial r} = 0.$$

on montre que  $\eta = rt^{-1/8}$  et que la hauteur est en  $r^{-2}\mathcal{H}(\eta)$ . La solution est en  $\mathcal{H}(\eta) \propto \eta^2 (\eta_N^2 - \eta^2)^{1/3}$ , les coefficients sont assez simples.

Le cas avec source de masse est aussi étudié (la lave sort du conduit). On consultera Huppert et al 1979 [22] pour les détails et la figure reproduite ci contre fig. 25, la présentation de [23] est légèrement différente.

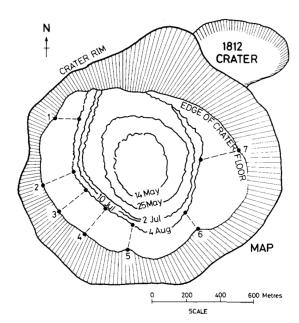


Fig. 9. Map and profile of the Soufrière crater, showing outlines of the lava extrusion at various times. The survey lines 1-7 were set up to measure the rate of advance of lava.

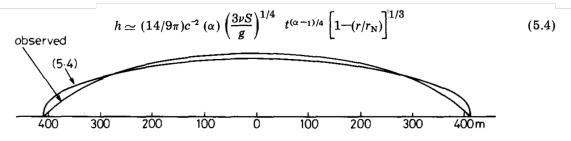


Fig. 12. A comparison of the theoretical shape of the lava according to (5.4a) and the shape of the lava on August 4.

Figure 25: l'eruption de la soufrière en 1979, la formule analytique en axi, formule (5.4) de Huppert 1979, la forme observée superposée à la solution analytique

### 2.22.2 Banquise

Voir les travaux de Worster [39] qui propose un modèle de banquise sur le plateau continental qui flotte ensuite sur l'eau et se détache.... Encore une fois, on utilise la lubrification pour modéliser l'écoulement.

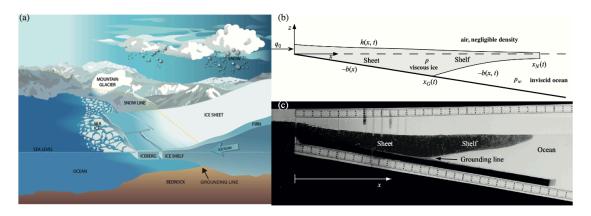


Figure 2: Ice sheets and ice shelves. (a) An illustration of most of Earth's ice features, including ice sheet and ice shelf. Credit: NASA. (b) Sketch of the problem considered here: a viscous ice flows on a solid inclined bedrock and in a denser inviscid ocean. (c) Laboratory experiment of viscous syrup flowing over an inclined surface into an inviscid water-salt solution showing the formation of a grounding line. From Robison, Huppert and Worster J. Fluid Mech. 648 (2010).

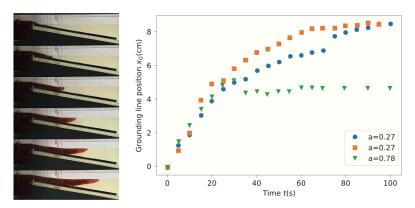


Figure 3: **Laboratory viscous shelves.** Laboratory experiments are performed with a liquid characterised with  $\nu = 380 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ ,  $g' = 32.9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$  and  $q_0 = 0.464 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ . Position of the grounding line  $x_G(t)$  for various angles a. From Robison, Huppert and Worster J. Fluid Mech. **648** (2010).

Figure 26: Worster: avancée de la banquise (remerciements AA)

### 2.22.3 Laccolite

Définition et images sur https://en.wikipedia.org/wiki/Laccolith

Chloé Michaut JGR 2011 Dynamics of magmatic intrusions in the upper crust: Theory and applications to laccoliths on Earth and the Moon

https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1029/2010JB008108

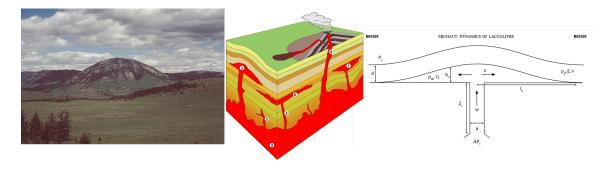


Figure 27: Laccolite, Wissen -Eddine K)

#### 2.22.4 Conclusion

Nous allons garder les concepts et méthodes dégagés pour étudier des écoulements non newtoniens. Néanmoins, la démarche va rester la même.

# 2.23 Résumé général pratique avant passage au non newtonien

Les écoulements en milieux naturels que nous avons vus sont minces et longs sur des pentes inclinées, nous en avons déduit que la pression était hydrostatique  $p = \rho g h(x,t)$ , que le terme moteur est la pente  $-\rho g Z_b'(x)$ , le terme de frein est le terme de contrainte visqueuse  $\mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$ . En fait, ce terme de frein est  $\frac{\partial}{\partial y} \tau$  avec  $\tau = \mu \partial u/\partial y$ . Dans la suite nous allons donc en fait étudier le système très proche de 20,21et 24:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g Z_b'(x) + \frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g, \qquad y < h. \tag{61}$$

Avec les conditions limites pour résoudre le problème, peut être u(x, y = 0) = 0 ou  $\tau(x, y = 0)$  donné et

$$v(x, y = 0) = 0$$
,  $p(y = h) = 0$ ,  $\tau(x, y = h) = 0$ .  $v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$ . (62)

On a besoin pour résoudre ce problème de la "rhéologie": la dépendance de  $\tau$  en fonction de  $\dot{\gamma} = \partial u/\partial y$  (la notation  $\dot{\gamma}$ , pour le cisaillement est usuelle en rhéologie). C'est ce que nous allons voir maintenant dans des cas simples de fluides non-newtoniens.

Une fois résolu le profil de vitesse, on calcule le flux Q et on le met (formellement) dans l'équation de la masse intégrale pour trouver l'équation d'évolution :

$$Q = \int_0^h u(x, y, t) dy \qquad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

IL ne reste qu'un équation de type onde de crue diffusante (diffusive wave) ou "onde de crue" "flood wave" ou onde cinématique (kinematic wave).

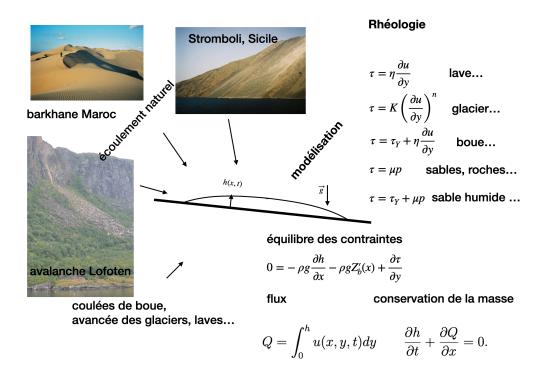


Figure 28: La "réalité" et sa modélisation, résumé visuel de ce cours. Nous allons explorer maintenant les relations  $\tau(\dot{\gamma})$ 

# 3 Cas des écoulements non-newtoniens, dont Bingham

Nous venons de voir des écoulements newtoniens pour modéliser des écoulements en milieux naturels, cependant dans la nature, les écoulements sont loins d'être newtoniens. Leur viscosité n'est plus constante car ils sont constitués de mélanges complexes de différents matériaux difficiles à identifier.

Avant d'aborder le modèle de Bingham faisons quelques rappels sur les fluides non newtoniens.

## 3.1 Zoologie et exemples de fluides non-Newtoniens

Le but du jeu est de trouver la loi entre la contrainte et le cisaillement, en effet les fluides intervenants en milieux naturels sont des mélanges compliqués, le résultat global est que le fluide moyen ne peut plus être décrit avec la rhéologie newtonienne simple : contrainte  $\tau$  proportionnelle au cisaillement  $\dot{\gamma}$ , que l'on écrit avec  $\eta$  la viscosité dynamique (ou aussi  $\eta = \mu$ )

$$\tau = \eta \dot{\gamma}, \qquad \text{ ou } \tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Un large corpus expérimental existe, principalement en cisaillement simple. Il faut alors essayer de trouver des domaines ou la contrainte varie régulièrement avec le cisaillement. (Pour des idées plus complètes consulter [35] pour un large tour d'horizon des fluides non newtoniens, pour comprendre les bases de la thermomécanique des milieux continus, consulter [19]).

A noter que nous n'avons pas encore parlé de la distinction fluide / solide. En fait, il n'y en a pas vraiment. Il semble que tous les matériaux, même solides, "s'écoulent" si on les observe sur une très longue durée. Le nombre de Deborah rapport entre le temps de relaxation du matériau et l'échelle de temps choisie (en général L/U) quantifie la passage fluide/ solide (petit, on a un fluide, grand un solide):

$$D = \frac{U\tau_{relax}}{L}.$$

Le nom de "Déborah" est un clin d'oeil à la localisation du département de chimie du Lafayette College, laboratoire dirigé par Eugene Cook Bingham (1878 -1945). En effet il est situé au tiers des 180km séparant Bethlehem (Pennsylvanie), et Little Egypt (Pennsylvanie) et fait référence à la Bible (chant de la prophétesse Deborah): "Les montagnes coulèrent devant le Seigneur" (source wiki) (car son temps d'observation est infini). En fait, en français, c'est "Les montagnes s'ébranlèrent

devant l'Éternel". Les grecs disent aussi "tout coule", "panta rei":  $\pi \acute{\alpha} \nu \tau \alpha \grave{\rho} \widetilde{\epsilon} \widetilde{\iota}$  (avec  $\rho$  surmonté d'un esprit rude, ce qui donne le "h" de "rhéo").

Toujours est il que plus le nombre de Deborah est petit, plus le matériau apparaît fluide.

### 3.1.1 Modèles rhéologiques

Malgré la grande complexité de la rhéologie, on s'est rendu compte que l'on pouvait simplifier au maximum en considérant trois modèles simples fondamentaux. Pour ces lois simplifiées, on a le ressort, le patin sec, et l'amortisseur visqueux...

Figure 29: modèles rhéologiques de base, ressort parfait,  $\sigma = E\varepsilon$ , l'amortisseur visqueux  $\sigma = \eta \dot{\gamma}$  et le patin sec si  $\sigma < \sigma_0$  alors  $\varepsilon = 0$  sinon  $\varepsilon$  quelconque.

A partir de ces modèles simples on peut créer des comportements rhéologiques de plus en plus complexes Kelvin Voigt, Maxwell, élastoplastique ...

Figure 30: modèles rhéologiques construits avec les modèles de base, Kelvin Voigt,  $\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ , Maxwell  $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \sigma/\eta$  et élastoplastique,  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ , si  $\sigma < \sigma_0$  alors  $\sigma = E\varepsilon^e$  et  $\varepsilon^p = 0$ , sinon  $\sigma = \sigma_0$  et  $\varepsilon = \varepsilon^p$  indéfini...

#### 3.1.2 Un exemple de fluide visco élastique, Maxwell: la Silly Putty

La Silly Putty est matériau qui pour les temps courts est élastique comme un solide, pour les temps longs ce matériau coule comme un fluide, voir les images 31. Pour la Maïzena, c'est le même comportement. La Maïzena piétinée rapidement est solide, si on arrête, on coule! voir photo 33.

Pour ces types de matériaux, le modèle de Maxwell (figure 30 au centre) est une bonne première approximation, son expression

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + \frac{1}{\eta}\sigma$$

devient pour les temps courts (plus courts que  $\eta/E$ )

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E}\dot{\sigma}$$

et pour un chargement constant ou pour les temps longs (plus longs que  $\eta/E)$ 

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta}\sigma.$$

autrement dit pour les temps courts, ce matériau se comporte comme un solide élastique, pour les temps longs comme fluide visqueux.

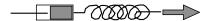


Figure 31: Modèle rhéologique du fluide visco élastique Maxwell

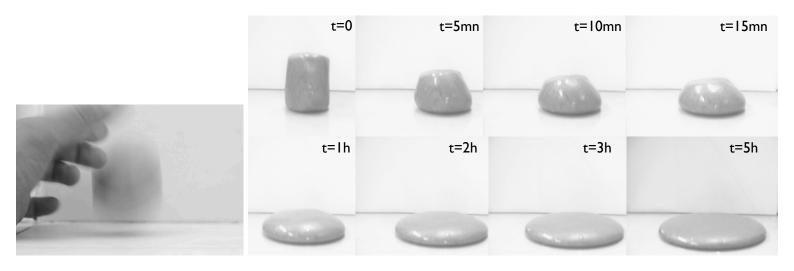


Figure 32: La Silly Putty est modèle élasto-plastique, pour les temps courts à gauche, elle est élastique comme un solide, pour les temps longs, à droite, elle coule comme un fluide... Photos PYL



Figure 33: La Maïzena est un fluide visco élastique, piétiné rapidement, il est solide, si on arrête, on coule! Photo PYL Jussieu

Un film d'effondrement de la Silly Putty par Aurélien Schaff, la vidéo est en x240 par rapport au temps réel.

https://dropsu.sorbonne-universite.fr/s/EYqnodCgoHw5Dwb

## 3.2 Fluides non Newtoniens et solides dépendants du temps

Pour l'instant, nous n'avons envisagé que des lois locales en espace et en temps. Certains fluides peuvent avoir une mémoire de leur états précédents. Nous préciserons cela pour les solides dans la section suivante. On parle de "mémoire".

Un fluide est dit thixotrope si sous contrainte (ou gradient de vitesse) constante, sa viscosité apparente diminue au cours du temps. Laissé au repos, le fluide thixotrope à l'aspect d'un solide (viscosité infinie), sous contrainte constante le fluide va se comporter comme un liquide (de viscosité faible).

Les phénomènes de thixotropie trouvent bien sûr leur origine dans la structure interne du matériau. Comme il y a un effet temporel, donc d'histoire, les rhéogrammes ne sont plus des courbes contrainte/ cisaillement mais présentent un cycle d'hystérésis. Il ne faut pas confondre la thixotropie (effet mémoire) et la rhéofluidification (diminution de la viscosité avec une augmentation de la contrainte appliquée au fluide qui est un effet sans mémoire).

En français, l'effet inverse d'une augmentation de viscosité avec le temps lorsqu'ils sont soumis à une contrainte de cisaillement constante s'appelle "l'antithixotropie" (en anglais *Rheopecty*).

Les peintures, les encres, les suspensions d'argile, les crèmes cosmétiques, yaourts, le Ketchup, le sang seraient thixotropes, Les boues de forage aussi.

La crème chantilly serait antithixotrope.

#### 3.2.1 Dérivées de vecteurs: tenseur gradient de vitesse

Rappelons des notations qui vont être utiles. En effet, on a exprimé des relations entre  $\sigma$  et  $\epsilon$  sous la forme de dérivées simples de quantités scalaires (1D). En fait, les relations que nous avons écrites, peuvent être généréalisées en 3D;  $\sigma$  devenant  $\sigma_{ij}$  et  $\dot{\gamma}$  devenant  $2D_{ij}$ , il faut donc exprimer les dérivées des tenseurs  $\sigma_{ij}$  et  $D_{ij}$ .

Par définition de l'accroissement

$$u(r + d\ell) = u(r) + (\partial u/\partial x)d\ell$$

on a donc pour la composante i

$$du_i = (\partial u_i / \partial x_j) d\ell_j$$

le tenseur gradient de vitesse

$$F_{ij} = u_{i,j} = (\partial_j u_i) = (\partial_i u_j)^T = \nabla u^T$$

permet d'écrire aussi  $du = d\ell \cdot \nabla u$  ou  $du_i = (F_{ij})d\ell_j$ 

pour un produit tensoriel

$$d(A_i B_j) = A_i F_{jm} B_m + F_{in} A_n B_j$$
$$dAB = \nabla u^T \cdot AB + AB \cdot \nabla u$$

#### 3.2.2 Dérivée d'un tenseur, Dérivée de Jauman

Soit le tenseur  $\sigma$ , il est constitué des composantes dans la base

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij}(t)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

donc quand on va le dériver, il faut tenir compte de la dérivation des vecteurs de base

$$\frac{d}{dt}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{d}{dt}\sigma_{ij}(t)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + \sigma_{ij}(t)\frac{d}{dt}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + \sigma_{ij}(t)\underline{e}_i \otimes \frac{d}{dt}\underline{e}_j$$

or la dérivée d'un vecteur unitaire est orthogonale à celui ci:  $\frac{d}{dt}\underline{e}_k = \omega \times \underline{e}_k = \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{e}_k$  donc

$$\frac{d}{dt}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{d}{dt}\sigma_{ij}(t)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^T$$

On appelle dérivée de Jaumann

$$(\frac{D\underline{\underline{\sigma}}}{Dt})_J = \frac{d}{dt}\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^T$$

c'est cette dérivé qui est utilisée dans la généralisation des fuides d'Olroyd.

#### 3.2.3 Cas des fluides

Nous allons appliquer ces opérateurs aux fluides non newtoniens

Dans un fluide Thixotrope la microstructure ne répond pas tout de suite au changement de contrainte, les changements de microstructure sont irréversibles. Ce type de modèle nécessite l'introduction d'un paramètre interne supplémentaire qui caractérise la microstructure. Nous préciserons ces notions après avoir vu les fluides viscoélastiques (Maxwell/ Kelvin Voigt)...

Dans le cadre linéaire simple on remplace les points par des dérivées  $\partial_t$ , mais la complexification suivante est de tenir compte de la non linéarité en remplaçant la dérivée  $\partial_t$  par la dérivée de Jaumann. Il s'agit de la dérivée mesurée par un observateur dont le référentiel se déplace avec l'écoulement et tourne avec lui

$$(\frac{D\underline{\underline{\sigma}}}{Dt})_J = (\frac{\partial\underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}\underline{\sigma} - (\underline{\nabla}\underline{u})^t \cdot \underline{\underline{\sigma}})$$

Le modèle de Oldroyd -B:

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda (\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{\tau}} - (\underline{\nabla}\underline{\underline{u}})^t \cdot \underline{\underline{\tau}}) = 2\eta \underline{\underline{D}}$$

le nombre de Deborah est le rapport entre le temps de relaxation  $\lambda$  et le temps caractéristique du fluide (par exemple  $L/U_0$ , il doit être assez grand pour que l'effet de viscoélasticité non linéaire soit important. Ce modèle est appelé Oldroyd B.

On peut rajouter des termes pour compliquer encore ces modèles, fluide de Giesekus

$$(\frac{D\underline{\underline{\tau}}}{Dt})_J + \underline{\underline{\tau}} + \alpha\underline{\underline{\tau}}^2 = \mu\underline{\underline{D}}$$

on consultera Bird [10], Macosko [31] et bien entendu Hinch (FENE model) pour plus de détails.

Il s'agit bien de fluide Thixotrope puisque la microstructure ne répond pas tout de suite au changement de contrainte, Ce type de modèle nécessite l'introduction d'un paramètre interne supplémentaire  $\alpha$  qui caractérise la microstructure On écrira une loi de bilan pour  $\alpha$ 

$$\frac{d\alpha}{dt} = \text{build} - \text{breakdown}$$

Houska-Type models (60')

$$\frac{d\alpha}{dt} = a(1 - \alpha) - \alpha \dot{\gamma}^n$$

voir "Thixotropy a review" Howard A. Barnes J. Non-Newtonian Fluid Mech., 70~(1997)~1-33

pour des exemples de relations entre la viscosité  $\eta$  et la structure  $\alpha$ . voir "Thixotropic gravity currents " Hewitt & Balmforth JFM 2017 v 727 Souza Mendes JNNFM 2012 soft matter 2011 2471-2483

voir aussi https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.fluid.010908.165125 le fluide de Boger

# 3.3 Fluides Non Newtoniens (Fluide visqueux généralisé)

Il y a une grande variété à peine effleurée ici, revenons à ce qui va nous occuper: des fluides avec une loi locale du genre  $\sigma = \eta \dot{\gamma}$  mais avec un  $\eta$  pas trop simple...

### 3.3.1 Fluide visqueux généralisé

Le coefficient  $\eta$  est constant pour un fluide Newtonien, que se passe t il s'il varie? Comment varie t il?

Le but du jeu est de trouver la loi entre la contrainte et le cisaillement, en effet les fluides intervenants en milieux naturels sont des mélanges compliqués, le résultat global est que le fluide moyen ne peut plus être décrit avec La rhéologie newtonienne simple est telle que la contrainte  $\tau$  est proportionnelle au cisaillement  $\dot{\gamma}$ , ce que l'on écrit  $\tau=\eta\dot{\gamma}$ , avec  $\eta$  la viscosité dynamique. Quand il n'y a plus proportionnalité entre la contrainte et le cisaillement, le fluide est non-Newtonien. On peut envisager des "complications possibles", la plus simple sera de dire que la viscosité dépend du cisaillement :

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma},$$

c'est ce type de matériau que nous allons étudier (et préciser les notations:  $\tau$  et  $\dot{\gamma}$ ).

Suivant la variation de  $\eta(\dot{\gamma})$  on dira:

- Fluides rhéofluidisants: la viscosité diminue avec le cisaillement ex: sang, shampooing, jus de fruit concentré, encres d'imprimerie, solutions de polymères ou de masse moléculaire élevée, suspensions de particules solides...
- Fluides rhéoépaississants: la viscosité augmente avec le cisaillement ex: suspensions de particules, ou de cellules du sang dans du plasma, solutions de maïs...
- Fluides à seuil: il faut dépasser une certaine contrainte (le seuil) pour obtenir un écoulement

ex: le dentifrice, la mousse à raser, le Ketchup, la mayonnaise, le béton, les peintures, les boues de forage pétrolier...

On peut être cependant encore plus général dans la définition et définir le "fluide visqueux généralisé" tel que pour ce type de matériau on suppose que la contrainte ne dépend que du taux de déformation:

$$\underline{\underline{\sigma}} = f(2\underline{\underline{D}})$$

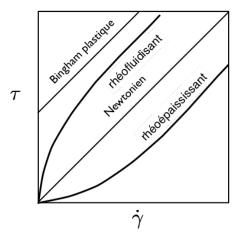


Figure 34: Comportement qualitatif, les fluides rhéofluidisants (dilatants au cisaillement) on une viscosité qui décroît avec le cisaillement, inversement le fluide est dit rhéoépaississant (contractant au cisaillement).

Dans Germain 1973 c'est ainsi qu'est défini un "fluide proprement dit".

A noter que l'on peut imaginer la loi sous la forme  $2\underline{\underline{D}} = g(\underline{\underline{\sigma}})$ .

Comme cette forme est quelque peu générale, on va faire un développement en série autorisant une prise en compte de la non linéarité:

$$\underline{\underline{\sigma}} = f_0 \underline{\underline{D}}^0 + f_1 \underline{\underline{D}} + f_2 \underline{\underline{D}}^2 + O(|D|^3),$$

on remarquant que  $f_0 = -p$  car  $\underline{\underline{D}}^0 = \underline{\underline{I}}$ . Mais en fait la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = f_0 \underline{\underline{I}} + f_1 \underline{\underline{D}} + f_2 \underline{\underline{D}}^2,$$

avec l'ordre deux uniquement est la plus générale. Nous allons le voir au paragraphe suivant par l'invocation du théorème de Cayley Hamilton. Les fluides ayant cette forme de dépendance dans le cisaillement sont les "fluides de Reiner-Rivlin". En notation tensorielle,  $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \underline{\tau}$ :

$$\tau_{ij} = f_1 D_{ij} + f_2 D_{ik} D_{kj}$$

 $f_1$  est la "viscosité",  $f_2$  est la "viscosité croisée" (cross viscosity).

Attention, ces coefficients ne sont pas forcément constants, ils vont pouvoir dépendre de quantités indépendantes de changement de référentiels. Ces coefficients vont dépendre eux mêmes des invariants de  $D_{ij}$  comme nous allons le voir.

On montre que l'on peut écrire aussi  $D_{ij} = g_1 \tau_{ij} + g_2 \tau_{ik} \tau_{kj}$ , cette forme est utile pour les fluides de Gisekus, la précédente forme étant utile pour les fluides de Oldroyd-B. Ces deux modèles Gisekus et Oldroyd-B ne sont plus locaux, il y a des termes en plus de transport.

# 3.3.2 Coefficients de la loi Reiner-Rivlin: rappels sur les invariants d'un tenseur

A partir du théorème de Cayley Hamilton (polynôme caractéristique d'une matrice  $3 \times 3$ , ici le tenseur  $\underline{\underline{D}} = D_{ij} = (1/2)(u_{i,j} + u_{i,i})$ ) on peut écrire le polynôme en X:

$$X^3 - \operatorname{trace}(\underline{D})X^2 + (1/2)((\operatorname{trace}(\underline{D}))^2 - \operatorname{trace}(\underline{D}^2))X - \det(\underline{D})$$

soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les trois valeurs propres solutions de ce polynôme. On note pour le premier invariant, la trace:

$$I_1 = \text{trace}(\underline{D}) = (D_{11} + D_{22} + D_{33})$$

et on a  $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ . Le second est :

$$I_2 = (1/2)(\operatorname{trace}(\underline{\underline{D}})^2 - \operatorname{trace}(\underline{\underline{D}}^2)) = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{22} & D_{23} \\ D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{33} & D_{31} \\ D_{13} & D_{11} \end{vmatrix}$$

et

$$I_2 = D_{11}D_{22} + D_{22}D_{33} + D_{11}D_{33} - D_{12}D_{21} - D_{23}D_{32} - D_{31}D_{13} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$

Pour le troisième, c'est le déterminant:

$$I_3 = det(\underline{\underline{D}}) = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}$$

et il s'écrit:

$$I_3 = -D_{13}D_{22}D_{31} + D_{12}D_{23}D_{31} + D_{13}D_{21}D_{32} - D_{11}D_{23}D_{32} - D_{12}D_{21}D_{33} + D_{11}D_{22}D_{33} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

ce sont les trois invariants de la matrice de dimension 3 qui vérifie aussi:

$$\mathbf{D}^3 - I_1 \mathbf{D}^2 + I_2 \mathbf{D} - I_3 \mathbf{I} = 0.$$

on voit donc que

$$\mathbf{D}^3 = (I_1 \mathbf{D}^2 - I_2 \mathbf{D} + I_3 \mathbf{I})$$

est n'est fonction que de  $\mathbf{D}^2$  et  $\mathbf{D}$  de même

$$\mathbf{D}^4 = \mathbf{D}\mathbf{D}^3 = \mathbf{D}(I_1\mathbf{D}^2 - I_2\mathbf{D} + I_3\mathbf{I})$$

n'est fonction que de  $\mathbf{D}^2$  et  $\mathbf{D}$ . De proche en proche on voit donc que toutes les puissances se réduisent à  $\mathbf{D}^2$  et  $\mathbf{D}$ . D'où la forme générique proposée

$$\underline{\underline{\sigma}} = f_0 \underline{\underline{I}} + f_1 \underline{\underline{D}} + f_2 \underline{\underline{D}}^2,$$

les coefficients ne sont pas forcément constants, ils vont pouvoir dépendre de quantités indépendantes de changement de référentiels: les invariants de  $D_{ij}$ .

### Simplification en incompressible

On a trace( $\underline{\underline{D}}^2$ ) =  $\underline{\underline{D}}$  :  $\underline{\underline{D}}$ . Par la suite, nous considérerons principalement des fluides incompressibles, où  $I_1 = \text{trace}(\underline{\underline{D}}) = D_{ii}$  est nul. Ainsi  $I_2 = -\underline{\underline{D}}$  :  $\underline{\underline{D}}/2$ . On peut poser  $D_2 = \sqrt{\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}}$  pour éviter d'utiliser un paramètre négatif

$$D_2 = \sqrt{\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}}$$
 et ainsi  $I_2 = -(D_2^2)/2$ .

les coefficients  $f_1$ ,  $f_2$ ... sont fonctions de  $-I_2$  et  $I_3$ ,  $f_0$  est la pression qui assure l'incompressibilité. On définit les fluides de **Reiner-Rivlin** par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\eta_1(-I_2, I_3)\underline{\underline{D}} + \eta_2(-I_2, I_3)(2\underline{\underline{D}})^2$$

où  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont des scalaires fonction des invariants de  $2\underline{\underline{D}}$ . Le fluide de "Reiner-Rivlin" (Trusdell [46]) est aussi appelé le fluide "Stokesien" comme synonyme (la contrainte dépend du taux de déformation de manière non linéaire), à ne pas confondre avec l'écoulement de Stokes.

#### 3.3.3 Cas cisaillé: observation de la contrainte normale

Remarquons que la plupart des expériences sont faites avec un cisaillement simple  $\partial u/\partial y$  (et c'est le terme unique  $u_{1,2}$ ), que l'on note historiquement  $\dot{\gamma}$ . Pour un cisaillement simple on a bien  $\dot{\gamma}=2D_{12}$ 

$$(\underline{\underline{D}}) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\gamma}^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi on calcule trace $(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}) = 2(\dot{\gamma}^2/4)$  ainsi  $D_2 = \dot{\gamma}/\sqrt{2}$ , puis on calcule l'invariant des deux manières

$$I_2 = D_{11}D_{22} + D_{22}D_{33} + D_{11}D_{33} - D_{12}D_{21} - D_{23}D_{32} - D_{31}D_{13} = 0 + 0 + 0 - (\dot{\gamma}/2)^2 - 0 - 0$$

ou aussi

$$I_2 = (1/2)(\operatorname{trace}(\underline{D})^2 - \operatorname{trace}(\underline{D}^2)) = 0 - (1/2)(D_{12}^2 + D_{21}^2) = -D_{12}^2$$

donc on a bien la même valeur pour les deux calculs  $I_2 = -\dot{\gamma}^2/4$ .

On remarque ainsi que pour ce cisaillement simple

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p + \eta_2 \dot{\gamma}^2, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \eta_1 \dot{\gamma}, \quad \sigma_{33} = -p$$

la différence de contrainte normale n'est pas assez bien prise en compte par ce type de modèle, la complexité introduite n'est pas suffisante. (voir aussi Germain 73 p 222)

## 3.3.4 Fluides visqueux généralisés du premier ordre

On se limite maintenant aux fluides du premier ordre donc  $\eta_2 = 0$ . Une autre présentation des choses consiste à repartir de

$$\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{u}\underline{I} + 2\eta \underline{D}$$

et de dire que la forme la plus simple consiste à dire que les coefficients de Lamé du fluide dépendent du champ de vitesse lui même, mais comme  $\underline{\underline{D}}$  est un tenseur d'ordre 2, il faut travailler sur des quantités scalaires construites à partir de  $\underline{\underline{D}}$ . En invoquant encore Cayley Hamilton et comme par la suite, nous considérerons principalement des fluide incompressibles, où  $I_1 = \text{trace}(\underline{\underline{D}}) = D_{ii}$  est nul. Ainsi  $I_2 = -\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}/2$ . La forme judicieuse sera une fonction des deux invariants qui restent:

$$\tau = 2\eta(-I_2, I_3)D,$$

en pratique,  $I_3$  est difficile à contrôler dans les configurations pratiques, donc on n'en tient pas compte et on ne garde que la dépendance en trace( $\underline{\underline{D}}^2$ ). Un, "fluide visqueux généralisé non-Newtonien" est donc tel que:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\eta(-I_2)\underline{\underline{D}}, \text{ avec } I_2 = -\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}/2 = D_2/2$$

c'est une forme simplifiée de Reiner Rivlin.

### 3.3.5 Remarque sur les notations et les normes

Nous avons pris le parti d'utiliser la notation  $D_{ij}$  du tenseur des taux de déformation, et donc un fluide visqueux est donc tel que:

$$\underline{\tau} = 2\eta \underline{D}$$

 $(\eta \text{ pouvant être fonction de } -I_2 \text{ pour un fluide visqueux généralisé non-Newtonien}).$  Il existe une autre notation : la notation  $\dot{\gamma}$ . Elle est souvent utilisé en rhéologie comme nous l'avons déjà dit, on peut généraliser à un tenseur  $\dot{\gamma}$ :

$$\dot{\gamma} = 2\underline{\underline{D}}, \text{ où } \dot{\gamma}_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i.$$

On a vu que la viscoisté est au moins une fonction du second principal invariant du tenseur des taux de déformation, on a déjà défini  $D_2$ 

$$D_2 = \sqrt{\sum_{i,j} D_{ij} D_{ij}}.$$

Remarquons ici (voir Wachs) que plusieurs normes de matrices sont possibles

: • la norme de Frobenius

$$||D|| = \sqrt{\sum_{i,j} D_{ij} D_{ij}}$$

• la norme Euclidienne :

$$|D| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{ij} D_{ij}}$$

on a

$$|D| = \sqrt{\frac{1}{2}}||D|| = \frac{D_2}{\sqrt{2}}$$

Le tenseur des taux de déformation,  $D_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ , ia pour unité s<sup>-1</sup>. ses composantes 2D:  $D_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $D_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$ ,  $D_{21} = D_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$ ,  $D_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 

Second invariant :  $D_2 = \sqrt{D_{ij}D_{ij}}$ 

$$D_2^2 = D_{ij}D_{ij} = D_{11}D_{11} + D_{12}D_{21} + D_{21}D_{12} + D_{22}D_{22}$$

donc, comme  $D_{12}D_{21} = D_{21}D_{12}$ :

$$D_2^2 = D_{ij}D_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Norme Euclidienne de  $\dot{\gamma}$ :

$$|\underline{\dot{\gamma}}| = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\dot{\gamma}} : \underline{\dot{\gamma}}}$$

or comme  $\underline{\dot{\gamma}}=2\underline{\underline{D}},$  et on a bien les relations suivantes

$$\frac{\left|\underline{\dot{\gamma}}\right|}{\sqrt{2}} = D_2 = \sqrt{\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} = \sqrt{\operatorname{trace}(\underline{\underline{D}}^2)}$$

#### 3.3.6 Cas cisaillé

Rappelons le cas du cisaillement simple où l'on pose historiquement

$$\dot{\gamma} = \partial u/\partial y = u_{1,2} = 2D_{12}.$$

On a toujours tracetrace( $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}$ ) =  $D_2^2 = 2(\dot{\gamma}^2/4)$  et ainsi  $D_2 = \dot{\gamma}/\sqrt{2}$ , Second invariant:

$$I_2 = -\frac{\dot{\gamma}^2}{4}$$

Frobenius

$$||D|| = \sqrt{\sum_{i,j} D_{ij} D_{ij}} = D_2 = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{2}}$$

Euclidien

$$|D| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{ij} D_{ij}} = \frac{D_2}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{\gamma}}{2}$$

on a aussi

$$|\dot{\underline{\gamma}}| = \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\underline{\gamma}}} : \dot{\underline{\gamma}} = \sqrt{2\sum_{i,j} D_{ij}D_{ij}} = \sqrt{2}D_2 = \dot{\gamma}.$$

On a bien avec la notation  $\dot{\underline{\gamma}}$  que la norme Euclidienne de ce tenseur, dans le cas du cisaillement simple est  $|\dot{\gamma}| = \dot{\gamma}$ .

# 3.4 Fluide Non Newtonien particulier: "Fluides en loi de puissance" ou aussi "Fluides d'Ostwald de Waele"

#### 3.4.1 définition

Un "fluide visqueux généralisé non-Newtonien" est donc tel que:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\eta(-I_2)\underline{\underline{D}},$$

Comme en pratique on a étudié expérimentalement que des fluides cisaillés simples incompressibles (on ne tient pas compte de la dépendance en  $det(\underline{\underline{D}})$  car dans ce cas il est nul), on a tracé des courbes contrainte-cisaillement issues de rhéomètres. La forme des courbes  $\eta(-I_2)$  peut parfois se simplifier, et on peut en traçant en log log identifier des régimes en loi de puissance.

De fait, on définit ainsi la classe des "fluides en loi de puissance" (modèle d'Ostwald de Waele). C'est donc un modèle particulier de dépendance simple du cisaillement à la contrainte. Par définition, un "fluide en loi de puissance" est tel que pour un écoulement cisaillé simple en 1D la contrainte est une puissance du cisaillement:

 $\dot{\gamma} = \partial_y u$ , un fluide en loi de puissance est tel que  $\tau = K \dot{\gamma}^n$ .

Par un jeu d'écriture,  $\tau = K\dot{\gamma}^n = K(\dot{\gamma}^2)^{n/2} = K(\dot{\gamma}^2)^{(n-1)/2}\sqrt{\dot{\gamma}^2}$ . Cela nous donne une "viscosité équivalente"  $\eta = K(\dot{\gamma}^2)^{(n-1)/2}$ . On repasse maintenant à la notation tensorielle. Comme

$$|\underline{\dot{\gamma}}| = \sqrt{2\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}} = 2|\underline{\underline{D}}| = \sqrt{2}||D|| = \sqrt{2}D_2$$

et comme  $D_2^2 = D_{ij}D_{ij} = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} = -2I_2$ , donc  $|\underline{\dot{\gamma}}|^2 = -4I_2$  on peut construire une viscosité

$$\eta = K(|\dot{\gamma}|^2)^{(n-1)/2} = K(-4I_2)^{(n-1)/2} = K(2D_2^2)^{(n-1)/2}$$

et le tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

avec au choix toutes les notations sont équivalentes, le coefficient K est la consistance, n est l'index:

$$\begin{cases}
\underline{\tau} = (K(|\underline{\dot{\gamma}}|^2)^{(n-1)/2})\underline{\dot{\gamma}} \\
\underline{\tau} = 2(K(-4I_2)^{(n-1)/2})\underline{\underline{D}} \\
\underline{\tau} = 2(K(\sqrt{2}D_2)^{(n-1)})\underline{\underline{D}} \\
\underline{\tau} = 2(K(|2D|)^{(n-1)})\underline{\underline{D}}
\end{cases} (63)$$

# 3.5 Ecoulement de "demi Poiseuille" pour un Fluide en loi de puissance" ou aussi "Fluide d'Ostwald de Waele"

Les fluides en loi de puissance (on peut mettre  $\mu$  ou K)

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n \tag{64}$$

que l'on injecte dans l'équation d'équilibre

$$0 = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

donc par intégration, en supposant ici que  $(-\frac{\partial p}{\partial x})$  est une constante (comme dans Poiseuille):

$$\tau = (-\frac{\partial p}{\partial x})(h - y),$$

cette décroissance de la contrainte  $\tau$  est indépendante de la rhéologie, ainsi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left[ \frac{1}{\mu} (-\frac{\partial P}{\partial x})(h - y) \right]^{\frac{1}{n}}$$

En intégrant à l'aide des conditions aux bords  $(u(0) = 0 \text{ et } \partial_y u(h) = 0))$ , on trouve le profil de vitesse d'un écoulement de "demi Poiseuille" d'un fluide en loi de puissance

$$u(y) = \left(\frac{1}{\mu}(-\frac{\partial p}{\partial x})\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[h^{\frac{n+1}{n}} - (h-y)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$
(65)

On vérifie que si  $n = 1, \frac{1}{2} [h^{\frac{2}{1}} - (h - y)^{\frac{2}{1}}] = (2h - y)y/2...$ 

On peut voir l'influence de l'indice n sur les profils de vitesse pour la loi de comportement en puissance sur la figue 35.

On Calcule ensuite le flux:

$$Q = \int_0^h u(y) \, dy$$

$$= \frac{n h^{\frac{n+1}{n}}}{(2n+1)} \left(\frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right)^{\frac{1}{n}} h$$
(66)

bien entendu pour n=1 on retrouve le  $h^3/3$ .

#### 3.5.1 Exemples de fluides en loi de puissance: les polymères, la glace...

Rappelons qu'un fluide en loi de puissance ou d'Ostwald de Waele est tel que

$$\tau = K\dot{\gamma}^n.$$

K est la consistance., n l'index.

Pour n = 1 on retrouve bien sûr le fluide Newtonien.

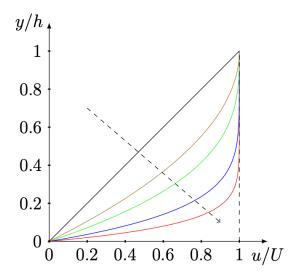


Figure 35: Influence de l'indice n sur le profil de vitesse pour la loi de comportement de loi en puissance, le sens de la flèche indique les n décroissants

n < 1 shear thinning (rhéofluidisant), n > 1 shear thickening (rhéo épaississant)

- les métaux à haute température correspondent à n < 0.1
- pour 1/n = 2 à 4 loi de Glen-Nye pour la glace des glaciers.
- $n \simeq 0.3$  dentifrice, 0.1 graisse.
- Les mélanges de caoutchouc 0.1 < n < 0.5.
- Les polymères fondus sont dans la zone 0.2 < n < .6

Dans une plage donnée de cisaillement, on peut toujours faire passer une telle loi (en fittant les données d'un rhéomètre). Par exemple, de nombreux polymères suivent cette loi.

Comme  $\tau \propto D^n$ , Il est parfois judicieux d'inverser la loi  $D(u) \propto \tau^{1/n-1}\tau$ , c'est d'ailleurs sous cette forme  $D = \alpha \tau^m$ , appelée "loi de Glen" que l'écoulement de la glace est modélisé dans les configurations d'avancées de glaciers. Les glaciers s'écoulent avec ce type de loi, l'index a pour valeur  $n \simeq 1/3$ . En glaciologie, la "loi de Glen" est donc bien connue:

$$D \simeq \alpha \tau^3$$
,

Un modèle correspondant à la lente avancée des glaciers a été proposé par M. W. Mahaffy 1976, l'image suivante montre un exemple de répartition de la glace (A three-dimensional numerical model of ice sheets: Tests on the Barnes Ice Cap,

Northwest Territories, JGR). La solution autosemblable a été écrite par P. Halfar 1981 ("On the Dynamics of the Ice Sheets" JGR).

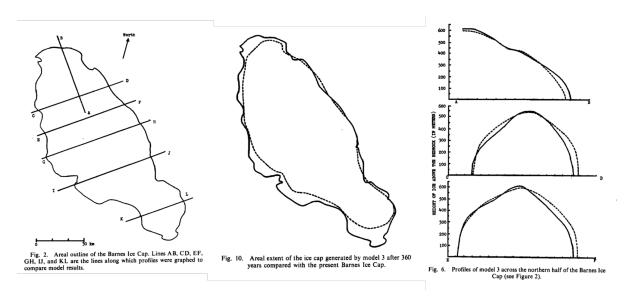


Figure 36: dépôt et écoulement de la glace sur une île canadienne, Mahaffy 1976 "A three-dimensional numerical model of ice sheets: Tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories", JGR vol $81\ N6$ 

# 3.6 Fluide non newtonien particulier: Bingham. Viscosité de Bingham

Pour l'instant nous n'avons pas envisagé la possibilité dans la loi de viscosité de l'existence d'un seuil en contrainte. Si la contrainte appliquée est inférieure à ce seuil, alors le fluide ne bouge pas. Ce type de fluide à seuil est de toute évidence un bon candidat pour les écoulements en milieux naturels. En effet, on voit souvent que les écoulements de débris, de boue, de roches s'arrêtent au pied des pentes le long desquelles ils ont dévalé. Parmi l'ensemble des lois possibles, on définit la plus simple: le "fluide de Bingham". C'est un fluide à seuil, sollicité par une contrainte, sous le seuil de contrainte, il ne bouge pas, lorsque l'on dépasse le seuil, il coule avec une viscosité constante.

The Bingham fluid is a non Newtonian fluid with a yield stress. The Bingham viscosity is such that, if we define the modulus  $|\tau| = \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}}$  with the Euclidian norm.

- if  $|\tau| \leq \tau_y$  then there is no motion  $D_{ij} = 0$
- if the stress is high enough  $|\tau| > \tau_y$  then stress tensor is linked to the shear rate tensor by

$$\tau_{ij} = 2\mu_0 D_{ij} + \tau_y \frac{D_{ij}}{|D|}$$

Where  $D_{ij}$  is the shear strain rate tensor (tenseur de taux de déformation)  $D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , the components in 2D are :

$$D_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad D_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D_{21} = D_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

In the Euclidian norm we have:

$$|D| = \sqrt{\frac{D_{ij}D_{ij}}{2}}$$

The second invariant defined by  $D_2 = \sqrt{D_{ij}D_{ij}}$  (this is the Frobenius norm) hence

$$D_2^2 = D_{ij}D_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

and we have obviously  $|D| = D_2/\sqrt{2}$ 

We present here the formulation in Balmforth, he uses  $\dot{\gamma}$  which is by his definition  $\sqrt{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}}$  and as  $\dot{\gamma}_{ij}=2D_{ij}$  then  $\dot{\gamma}$  is  $\sqrt{2}D_2$ , that is why we have a  $\sqrt{2}$  in

the equations. Factorising with  $2D_{ij}$  to obtain a equivalent viscosity

$$\tau_{ij} = 2(\mu_0 + \frac{\tau_y}{2|D|})D_{ij} = 2(\mu_0 + \frac{\tau_y}{\sqrt{2}D_2})D_{ij}$$

as defined by Balmforth

$$\tau_{ij} = 2\mu_{eq}D_{ij}$$

with

$$\mu_{eq} = \mu_0 + \frac{\tau_y}{\sqrt{2}D_2}$$

the viscosity is a function of  $I_2$  the second invariant (remember  $I_2 = -D_2^2/2$ ), its expression is indeed as expected for a "Fluide visqueux généralisé du premier ordre".

# 3.7 Equivalent de "demi Poiseuille" en Bingham

Exact solution in the proposed case, see http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bingham\_simple.c

We look at an unidirectional flow under a constant pressure gradient (like half Poiseuille, or Nusselt). We look a pure shear flow u(y), v = 0 (incompressible), so

$$D_{11} = D_{22} = 0$$
 and  $D_{12} = D_{21} = (1/2)(\partial u/\partial y)$ ,

this gives (mind square root of 2):  $D_2 = \sqrt{D_{ij}D_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u}{\partial y}$ , and  $|D| = D_2/\sqrt{2}$  so that the stress is:

$$\tau_{12} = 2\mu D_{12} + 2\tau_y \frac{D_{12}}{\sqrt{2}D_2} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_y.$$

Writing the equilibrium between pressure gradient  $((-\frac{\partial p}{\partial x}))$  is positive) and viscosity (writing  $\tau$  for a shorthand of  $\tau_{12}$ )

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

as there is no stress at the free surface y = h, the stress is

$$\tau(y) = (-\frac{\partial p}{\partial x})(h - y)$$

the stress  $\tau(y)$  increases from the free surface where it is 0, up to the soil where it is extremal. As long as  $\tau < \tau_y$ , we are under the threshold, so shear is zero:

 $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , hence velocity is constant, say it is U. Let us define the position of the yield surface Y such as we are exactly at the threshold

$$Y = h - \tau_y / (-\frac{\partial p}{\partial x}), \text{ where } \tau = \tau_y.$$

- for Y < y < h,  $\tau < \tau_y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , and u = U, plug flow
- for 0 < y < Y we have  $\tau = \tau_y + \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ , shear flow.

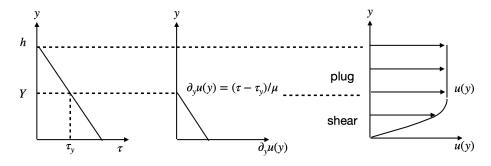


Figure 37: Left, the stress  $\tau$  increases from 0 at the top, to the max value at the bottom, the Yield value is in y=Y. Center the shear. Right the velocity, for small  $\tau < \tau_y$ , it is a plug flow, for larger stress, near the wall it is a shear flow.

This gives:

$$\tau_y + \mu \frac{\partial u}{\partial y} = (-\frac{\partial p}{\partial x})(h - y)$$

and this allows to solve for the velocity profile

$$u = \frac{1}{\mu} \left( \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( hy - \frac{1}{2}y^2 \right) - \tau_y y \right)$$

which is indeed zero in y = 0, and for y = Y, we have the plug flow u = U of value:

$$U = \frac{1}{\mu} \left( \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( hY - \frac{1}{2}Y^2 \right) - \tau_y Y \right)$$

it can be written as well, with  $Y = h - \tau_y/(-\frac{\partial p}{\partial x})$ :

$$U = \frac{(\tau_y - h(-\frac{\partial p}{\partial x}))^2}{2\mu(-\frac{\partial p}{\partial x})}$$

it can be written as well, with  $h = Y + \tau_y/(-\frac{\partial p}{\partial x})$ :

$$u = \frac{1}{\mu}((-\frac{\partial p}{\partial x})(Y - \frac{y}{2})y \qquad U = \frac{1}{\mu}((-\frac{\partial p}{\partial x})\frac{Y^2}{2}$$

As in y=0 u=0 and in y=Y,  $\tau=\tau_y,$  so  $\mu\frac{\partial u}{\partial y}=0$  and is zero after, therefore

$$u = \frac{2U}{Y^2}(Y - \frac{y}{2})y$$

or we can write the final expression for the velocity, with the plug value U and the yield position Y:

$$u = U \left( 1 - \left( \frac{y - Y}{Y} \right)^2 \right) \text{ with } U = \frac{(\tau_y - h(-\frac{\partial p}{\partial x}))^2}{2\mu(-\frac{\partial p}{\partial x})} \text{ with } Y = h - \tau_y / (-\frac{\partial p}{\partial x})$$

Finally we compute the flux:  $Q = \int_0^h u(y)dy$  that we cut in two parts, one sheared, one solid

$$Q = \int_0^Y u(y)dy + \int_Y^h u(y)dy$$

in each part we have

$$Q = \int_0^Y u(y)dy + U(h - Y) = \frac{2UY}{3} + U(h - Y)$$

so that the flux is

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{hU}{3}(3 - Y/h), \text{ with the position of Yield } (Y - h)(-\frac{\partial p}{\partial x}) = \tau_y.$$

The shear stress

$$\frac{\partial u}{\partial u}|_{0} = \frac{2U}{Y} = \frac{2}{Y} \frac{3Q}{h(3 - Y/h)}.$$

La vitesse s'écrit de diverses manières avec ou sans, Y et U:

$$u = U(2 - \frac{Y}{h})\frac{y}{Y} = \frac{3Q}{h}\frac{2 - y/Y}{3 - Y/h}\frac{y}{Y}$$

so that

$$\begin{cases} Q = \frac{hU}{3}(3 - Y/h) \\ U = \frac{1}{\mu}((-\frac{\partial p}{\partial x})\frac{Y^2}{2} \\ Y = h - \tau_y/(-\frac{\partial p}{\partial x}) \end{cases}$$

Quelques exemples sont proposés sur les figures 38 et 39.

Bien entendu, si  $\tau_y = 0$ , on retrouve Nusselt-Poiseuille: Y = h,  $Q = \frac{1}{3} \frac{h^3}{\mu} (-\frac{\partial p}{\partial x}) h^2$ .

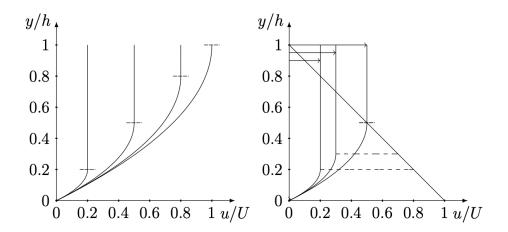


Figure 38: Profil de vitesse pour la loi de comportement de Bingham (gauche), et profil de vitesse dans le cas où le frottement à la paroi est le même (droite)

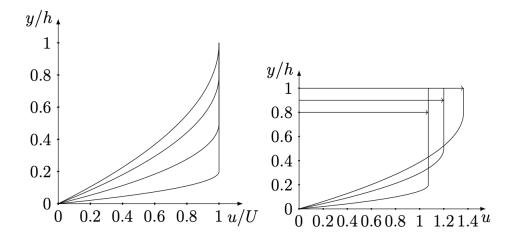


Figure 39: Profil de vitesse u(y) dans l'épaisseur pour à même vitesse U=1 (gauche) et le même débit Q=1 (droite).

# 3.8 Fluides de Herschel-Bulkley

La loi d'Herschel-Bulkley est une loi à seuil avec une loi de puissance. Les fluides de Herschel-Bulkley sont des fluides en loi de puissance et à seuil.

$$\tau = \begin{cases} \tau_y + \mu(\frac{\partial u}{\partial y})^n & \tau > \tau_y \\ \tau_y \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \tau < \tau_y \end{cases}$$
 (67)

Ces fluides sont une bonne description pour le béton, aussi pour des écoulements d'eau avec de l'argile et des graviers, typiquement les glissements de terrain. Cependant, l'exposant est difficile à mesurer, on approximme donc souvent les fluides Herschel-Bulkley par Bingham.

# 3.9 Equivalent de demi Poiseuille pour un fluide de Herschel-Bulkley

Les fluides de Herschel-Bulkley sont des fluides en loi de puissance et à seuil ([4], [37] [20] [14] [15]) :

$$\tau = \begin{cases} \tau_y + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n & 0 < y < Y \\ \tau_y \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & Y < y < h \end{cases}$$

$$(68)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left[ \frac{1}{\mu} (-\frac{\partial P}{\partial x})(Y - y) \right]^{\frac{1}{n}}$$

On peut faire les mêmes manipulations que pour Bingham. En intégrant à l'aide des conditions aux bords (adhérence et pente nulle), on retrouve le profil de vitesse d'un écoulement de "demi Poiseuille" d'un fluide de Herschel-Bulkley.

• sur 0 < y < Y:

$$u(y) = \left(\frac{1}{\mu}(-\frac{\partial P}{\partial x})\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[Y^{\frac{n+1}{n}} - (Y-y)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$
(69)

• sur Y < y < h:

$$U = \left(\frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} Y^{\frac{n+1}{n}} \tag{70}$$

On donne ensuite le flux:

$$Q = \int_{0}^{Y} u(y) \, dy + \int_{Y}^{h} U \, dy$$

$$= \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \int_{0}^{Y} Y^{\frac{n+1}{n}} + (Y-y)^{\frac{n+1}{n}} \, dy + U(h-Y)$$

$$= \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \right) \right)^{\frac{1}{n}} Y^{\frac{2n+1}{n}} \left( \frac{n+1}{2n+1} \right) + U(h-Y)$$

$$= \frac{n Y^{\frac{n+1}{n}}}{(n+1)(2n+1)} \left( \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \right) \right)^{\frac{1}{n}} (2nh+h-nY)$$
(71)

On peut montrer l'influence de l'indice n sur les profils de vitesse pour la loi de comportement de Herschel-Bulkley.

## 3.10 Navier Stokes avec Bingham

In this section we will write the equation of momentum with a Bingham viscosity. We write them without dimension, and then we look at the slow motion. The Navier Stokes equations with Bingham are:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,\tag{72}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$
 (73)

where **D** or  $D_{ij}$  is the strain-rate tensor  $(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$ . Following [?] the Bingham viscosity is an effective viscosity  $\eta$  depending both on the shear-rate (second invariant  $D_2$  of the strain rate tensor  $D_2 = \sqrt{D_{ij}D_{ij}}$ ) e. It reads:

$$\tau_{ij} = 2\mu_1 D_{ij} + \tau_y \frac{D_{ij}}{|D|}, \text{ with } |D| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{ij} D_{ij}}$$

in practice we define an equivalent viscosity

$$\tau = 2\eta_{eff} \mathbf{D} \tag{74}$$

Note that during the process we compute

$$oldsymbol{
abla} oldsymbol{ au} \cdot oldsymbol{ au} = oldsymbol{
abla} \cdot (\eta_{eff}(oldsymbol{
abla} \mathbf{u} + oldsymbol{
abla} \mathbf{u}^T))$$

and due to incompressibility we exapnd:

$$\mathbf{\nabla} \cdot \boldsymbol{ au} = \mathbf{\nabla} \cdot (\eta_{eff} \mathbf{\nabla} \mathbf{u}) + \mathbf{\nabla} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{\nabla} \eta_{eff}$$

# 3.11 adimentionalisation des équations, nombre Bi de Bingham

For a Bingham flow

$$\tau_{ij} = 2\mu_1 D_{ij} + \tau_y \frac{D_{ij}}{|D|}, \text{ with } |D| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{ij} D_{ij}}$$

we will write here this relation without dimension. This relation contains viscosity, so we guess that a Reynlds number is always relevant, but we have the yield stress in it. We have to write it without dimension. In this section we introduce the Bingham number, ratio of the yield stress  $\tau_y$  by a characteristic stress, say  $\sigma_{ref}$ :

$$Bi = \frac{\tau_y}{\sigma_{ref}}.$$

To choose it, we write the NS without dimension. We take L a length as scale, (here we take the same scale for each direction)

$$(x,y) = L(\bar{x},\bar{y}), (u,v) = U_0(\bar{u},\bar{v}), p = \rho g L \bar{p} + p_0$$

from the above definition of the viscous stress with the yeild stress, we can define the Bingham number as the ratio of the yield stress by the viscous shear stress

$$Bi = \frac{\tau_y L}{\mu_1 U_0}$$

so that

$$\tau_{ij} = 2\mu_1 \frac{U_0}{L} (\bar{D}_{ij} + Bi \frac{\bar{D}_{ij}}{2|\bar{D}|})$$

of course, we can write it as

$$\tau_{ij} = 2\mu_1 \frac{\rho U_0^2}{\rho U_0 L} (\bar{D}_{ij} + Bi \frac{\bar{D}_{ij}}{2|\bar{D}|}) = 2\frac{\rho U_0^2}{Re} (\bar{D}_{ij} + Bi \frac{\bar{D}_{ij}}{2|\bar{D}|})$$

which introduces a Reynolds number  $Re = \rho U_0 L/\mu_1$  and  $\rho U_0^2$  as usual in viscous flows.

In the particular cases of slumps that we look at, as the driving force is gravity, the viscous stress is of same order of magnitude to stop the flow

$$\mu_1 \frac{U_0}{L} \sim \rho g L$$

hence,  $U_0 = \frac{\rho g L^2}{\mu_1}$ , and time  $T = \mu_1/(\rho g L)$ . So:

$$\tau_{ij} = \mu_1 \frac{U_0}{L} \bar{\tau}_{ij} = \rho g L \bar{\tau}_{ij}$$

the stress is measured by  $\rho gL$  instead that  $\rho U_0^2$ . The "Bingham number" is written in our case

either 
$$Bi = \frac{\tau_y L}{\mu_1 U_0}$$
 either  $Bi = \frac{\tau_y}{\rho g L}$ 

of course, the Reynolds number  $Re = \rho U_0 L/\mu_1 = gL^3/\nu^2$  (the Galileo number a kind of Grashof).

The Final system whithout dimension:

$$\mathbf{\bar{\nabla}} \cdot \mathbf{\bar{u}} = 0, \tag{75}$$

$$Re\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}\right) = -\bar{\nabla} \bar{p} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\tau}) - \mathbf{e}_y$$
 (76)

where

if 
$$|\bar{\tau}_{ij}| > Bi$$
 then  $\bar{\tau}_{ij} = 2\bar{D}_{ij} + Bi\frac{\bar{D}_{ij}}{|\bar{D}|}$  else  $\bar{D}_{ij} = 0$ .

# 3.12 Yield length

### 3.13 adimentionalisation

We said that

$$Bi = \frac{\tau_y}{\sigma_{ref}}.$$

and observed that in cas of slumps  $\sigma_{ref} = \rho g L$  is a possible choice. So the yield stress allows to define a length  $\ell$ :

$$\ell = \frac{\tau_y}{\rho g}$$

it is a natural scale for yield fluids with gravity.

We should then take this scale to write NS without dimension. then  $Bi = \frac{\ell}{L}$ ,

and 
$$U_0 = \frac{\tau_y L^2}{\mu_1 \ell}$$
, and time  $T = \mu_1 \ell / (\tau_y L)$  so

$$\tau_{ij} = \mu_1 \frac{U_0}{L} \bar{\tau}_{ij} = \tau_y \frac{L}{\ell} \bar{\tau}_{ij}$$

for which every term is of order one at arrest (discussion dans Balmfoth Friegard (Final shape)).

The other possible scales instead of  $\ell$  is the height and the length of the column, as the aspect ratio is of order one, the pertinent other scale is  $\sqrt{A}$  a mix of height and lentgh.

# 3.14 adimentionalisation des équations à petit rapport d'aspect et petit Reynolds sur petite pente $\theta$

We found the system without dmiension:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \tag{77}$$

$$Re\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}\right) = -\bar{\nabla} \bar{p} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\tau}) - \mathbf{e}_y \tag{78}$$

From this if  $Re \to 0$ , we guess we obtain "Stokes" equations.

We then take a slope, we turn the system by an angle  $\theta$ , so that the gravity is now :

$$-\cos\theta\mathbf{e}_y + \sin\theta\mathbf{e}_x$$

Final Stokes system in the rotated frame:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \tag{79}$$

$$0 = -\bar{\nabla}\bar{p} + \bar{\nabla}\cdot(\bar{\tau}) - \cos\theta\mathbf{e}_y + \sin\theta\mathbf{e}_x \tag{80}$$

Projection gives:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \\
0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}}\right) + \sin \theta \\
0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{y}}\right) - \cos \theta.
\end{cases} (81)$$

The slope is supposed small,

Having this in mind, we start again here the adimensionalisation with small viscosity and small slope. This is in fact how it is done in the literature (Liu & Mei, Balmforth). But, we will see that hypothesis of small Reynolds, small slope and thin layer give a rescaled Bingham number.

We look now at a small layer of size  $\varepsilon$ , we guess that the velocity is slow, say  $\varepsilon_u \ll \varepsilon$ , the pressure is small as the layer is thin:

$$\bar{x} = \tilde{x}, \ \bar{y} = \varepsilon \tilde{y}, \ \bar{u} = \varepsilon_u \tilde{u}, \ \bar{y} = \varepsilon_u \varepsilon \tilde{y}, \ \bar{p} = \varepsilon \tilde{p}$$

We have to compute the  $\bar{u}_{i,j}$ , the largest term is  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\varepsilon_u \partial \tilde{u}}{\varepsilon \partial \tilde{y}}$  so that  $\bar{D}_{ij} = \frac{\varepsilon_u \partial \tilde{u}}{2\varepsilon \partial \tilde{y}}$  and

$$|\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij}| = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 2(\frac{\varepsilon_u \partial \tilde{u}}{2\varepsilon \partial \tilde{y}})^2 \right]} = (\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon}) \frac{1}{2} (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}})$$

and the stress is such:

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\bar{D}_{ij} + Bi\frac{\bar{D}_{ij}}{|\bar{D}|}.$$

then as  $\frac{\bar{D}_{ij}}{|\bar{D}|}$  is 1, the largest term of stress is

$$\bar{\tau}_{xy} = (\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon})(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}) + Bi = (\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon})\tilde{\tau}_{xy}$$

We guess that Bi is small of order  $\varepsilon_u/\varepsilon$ . The dominant parts of the equations are :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \\
0 = -\varepsilon \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \left( \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon^2} \right) \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{y}} + \ldots \right) + \sin \theta \\
0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + (\ldots) - \cos \theta.
\end{cases} \tag{82}$$

from this we guess that as  $\theta$  is small, we write  $\theta = S\varepsilon$  with S = O(1), and  $\varepsilon_u = \varepsilon^3$ , and we have to redifine the Bingham number as  $Bi = \varepsilon^2 B$  so that Bi is small and B = O(1).

$$\begin{cases}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \\
0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{y}} + S \\
0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - 1. \\
\tilde{\tau}_{xy} < B, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 0, \qquad \tilde{\tau}_{xy} \ge B, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{\tau}_{xy} - B
\end{cases}$$
(83)

C'est ce problème sans dimensions que nous devons résoudre. Nous l'appellerons problème de Liu & Mei (ou de Balmforth) comme nous parlions de problème de Huppert en visqueux pur. C'est le "sploutch" en Bingham...

Comparons le au cas complètement visqueux les équations encadrées 20 (cas S=0 et B=0).

Dans la section suivante nous le réécrivons avec dimensions (pour être plus proches de l'article de K. Liu C. Mei [28] https://www.researchgate.net/profile/Ko\_Fei\_Liu/publication/231931979\_Slow\_spreading\_of\_a\_sheet\_of\_Bingham\_fluid\_on\_an\_inclined\_plane/links/56f79b2708ae81582bf2ff88.pdf

C'est en effet eux qui les premiers ont écrit ces équations pour les écoulements de boue en 1989. Le cas des écoulements visqueux de Huppert date de 1982. Balmforth a repris ces équations dans de nombreux articles et a proposé des résolutions numériques confrontées à des expériences.

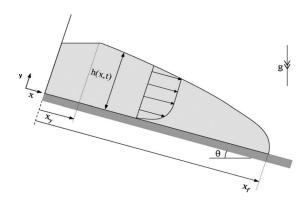


Figure 40: Schéma représentant un effondrement d'un tas sur une pente, tiré l'article de Hogg [26]. Remarquer que la partie avant  $x_y$  n'est pas entamée

# 3.15 Application à l'effondrement d'un tas de boue sur une pente

Consulter [28] (cf annexe) qui reprend l'analyse du "sploutch" "slump" avec une rhéologie de Bingham. On se donne un tas de boue sur une pente, il s'effondre (cf figure 41 issue de l'article original de Liu & Mei). Les coordonnées sont tournées, x est le long de la pente et y perpendicaulires, donc il faut résoudre les équations avec dimensions suivantes en supposant que ce sont les plus fortes

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \rho g \sin \theta$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta$$

(car on néglige toujours l'inertie et les termes de dérivée en x lents, nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, ici nous repartons comme Liu & Mei). Cela s'intègre en :

$$\tau = (\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x})(h - y)$$
$$p = \rho g \cos \theta (h - y)$$

le second étant l'expression de la pression hydrostatique.

La contrainte de cisaillement résultant a pour expression en y = Y:

$$\tau_y = \rho g \cos \theta (\tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x})[h - Y] \tag{84}$$

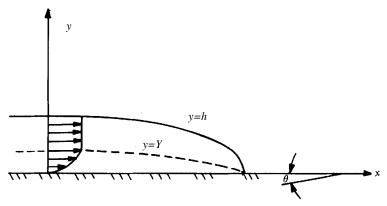


FIGURE 1. A layer of fluid mud on a sloping bed.

Figure 41: "Sploutch": effondrement d'un tas sur une pente inclinée d'un angle  $\theta$ , dessin modifié de Liu & Mei 1989 [28] pour utiliser la notation Y introduite par Balmforth voir l'annexe.

#### 3.15.1 Système à résoudre

Cf Balmforth zet al. "Viscoplastic flow over an inclined surface" [8], il faut résoudre en remplaçant dans la solution de Bingham/ Poiseuille de la section "Equivalent de "Poiseuille" en Bingham" section 3.7, le gradient de pression par

$$\rho g(\sin\theta - \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x}).$$

On trouve alors la vitesse bouchon (pluq)

$$U = \rho g(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) \frac{Y^2}{2\mu}$$

et la position de la surface qui cède (yield):

$$Y = h - \tau_y / (\rho g(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}))$$

donc le flux

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{hU}{3}(3 - Y/h)$$

devient

$$Q = (\rho g(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) \frac{Y^2}{6\mu} (3h - Y))$$

et l'équation de conservation de la masse.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}Q = 0$$

soit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho g(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) \frac{Y^2}{6\mu} (3h - Y)) = 0$$

en faisant attention à ce que la condition de mouvement soit remplie (cas d'un écoulement sur une pente):

$$Y = \max(h - \tau_y / |\rho g \sin \theta - \rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}|, 0).$$

Sans dimension, on pose  $x=L_0\bar{x},\ h=h_0\bar{h}$  et  $Y=h_0\bar{Y}$  (Balmforth pose  $\varepsilon=h_0/L_0$  donc:

$$\rho g \cos \theta (\tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x}) = \rho g \varepsilon \cos \theta (\tan \theta / \varepsilon - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}})$$

on va poser  $S = \tan \theta/\varepsilon$  car la pente est faible, et  $B = \frac{\tau_y}{\rho g \cos \theta \varepsilon^2 L}$ . On a alors la relation entre B le nombre de bingham que l'on vient de définir et le nombre de Bingham que l'on a défini avec Navier Stokes  $Bi = (\frac{\tau_y}{\rho g L})$ :

$$B = \frac{\tau_y}{\rho g \cos \theta \varepsilon^2 L} = (\frac{\tau_y}{\rho g L}) \frac{1}{\cos \theta \varepsilon^2} = \frac{Bi}{\cos \theta \varepsilon^2}$$

Le temps est  $L_0/U_0$  avec pour la vitesse  $U_0 = \frac{\rho g \cos \theta \varepsilon^3 L^2}{\mu}$ , la vitesse est en  $\varepsilon^3$  donc le problème sans dimension

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{Y}^2}{6} (3\bar{h} - \bar{Y})(S - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}) \right) = 0, \text{ avec } \bar{Y} = \max(\bar{h} - \frac{B}{|S - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}|}, 0).$$

Voir figure 42 trois exemples issus de [8] de collapse de trois tas pour trois valeurs de B sur une pente S=1.

Le code est

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bingham\_collapse\_noSV.c

#### 3.15.2 Application à l'effondrement d'un tas de boue en utilisant Herschel-Bulkley

idem on trouve pour un fluide de Herschel-Bulkley après calcul:

$$Q = \left(sign(\tan\theta - \frac{\partial h}{\partial x})\right) \frac{nY^{\frac{n+1}{n}}}{(n+1)(2n+1)} \left(\frac{\rho g\cos\theta}{\mu} |\tan\theta - \frac{\partial h}{\partial x}|\right)^{\frac{1}{n}} (2nh + h - nY)$$
(85)

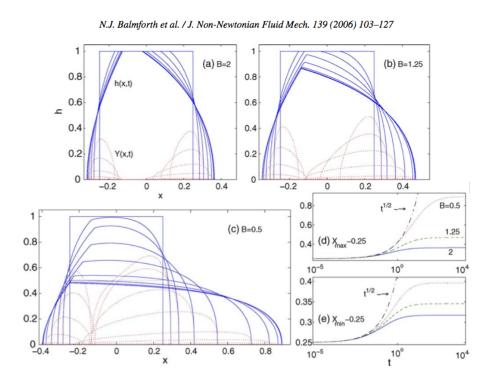


Figure 42: exemple de collapses de colonnes sur un plan incliné issu de Balmforth zet al. [8], hauteur du tas h et de la hauteur plastifiée Y en fonction de x pour t=0, 0.0625, 0.25, 1, 4, 100 à trois B différents et S=1. Position des fronts en fonction du temps.

le terme  $\theta$  désigne l'angle du plan incliné, attention pour  $\tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x}$  il faut prendre le bon signe pour assurer le mouvement dans le bon sens. Sans dimension, et en extraynat la valeur pour le signe (formule (16) de Balmforth [8]);

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{n\bar{Y}^{1+1/n}}{(1+n)(1+2n)} ((2n+1)\bar{h} - n\bar{Y})(S - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}) \left( |S - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}| \right)^{\frac{1}{n}-1} \right) = 0,$$

avec

$$\bar{Y} = max(\bar{h} - \frac{B}{|S - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}|}, 0).$$

Hoog [26] écrit différemment cette équation car il ne passe pas par  $\bar{Y}$ , il remplace dans cette expression, formule (2.7) de Hogg

$$\bar{Y} = \frac{1}{(S - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}})^2} (h(S - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}) - B)$$

Remarqaons aussi [1] qui propose une simplification et des comparaisons expérimentales

#### 3.15.3 Seuil, forme limite à l'arrêt sur fond plat horizontal

les écoulements de type Bingham sont caractérisés par l'existence d'un seuil, donc, l'écoulement étant de pus en plus lent, il finit par y avoir un moment où on passe au niveau du seuil. L'écoulement s'arrête alors. Un effondrement finit à une certaine position. C'est le *run out*, la distance maximale parcourue. Nous allons voir que l'on peut calculer la forme du tas à l'arrêt.

A la limite du mouvement

• dans le cas plat  $\theta = 0$ , donc  $Y = h - \tau_y / (-\frac{\partial p}{\partial x})$ 

$$\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} = -\tau_y$$

ce qui donne un profil parabolique

$$h = \sqrt{\frac{2\tau_y(x_f - x)}{\rho g} + h_0^2}$$

soit sans dimension (cf Matson & Hogg [32]

$$\bar{h} = \sqrt{2B(\bar{x}_f - \bar{x}) + 1},$$

cela permet de trouver tout de suite la taille d'un tas qui s'effondre. Il y a deux cas, soit la partie plate n'est pas entamée, il existe un point  $\bar{x}_y$  entre 0 et  $\bar{x}_f$  tel que :

- si  $0 < \bar{x} < \bar{x}_y$  on a  $\bar{h} = 1$ 

- si 
$$\bar{x}_y < \bar{x} < \tilde{\bar{x}}_f$$
 on a  $\bar{h} = \sqrt{1 + 2B(\bar{x}_y - \bar{x})}$ 

Ce point correspondant au début de l'entame est indiqué sur la figure 40. Entre la position de début de chute  $\bar{x}_y$  et le front  $\bar{x}_f$ , il y a toujours une distance 2/B

$$\bar{x}_f = \bar{x}_y + \frac{1}{2B}.$$

Partant d'un tas de masse unité, si  $\int \bar{h}d\bar{x} = 1$ , on a par intégration de la solution  $\bar{x}_y = 1 - \frac{1}{3B}$  et  $\bar{x}_f = 1 + \frac{1}{6B}$  tant que le point  $\bar{x}_y$  existe, c'est à dire tant que B > 1/3 pour des valreus plus petite de B tout le tas est entamé, et

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \bar{x} < \bar{x}_y = 1 - \frac{1}{3B} \\ \sqrt{1/3 + 2B(1 - x)} & \text{si } \bar{x}_y < \bar{x} < \bar{x}_f = 1 + \frac{1}{6B} \end{cases}$$

Si ce point n'existe pas B < 1/3;, alors

$$\int_0^{x_f} \bar{h} d\bar{x} = 1, \text{ avec } x_f = (\frac{9}{8B})^{1/3}$$

et

$$h(x) = \sqrt{2B((\frac{9}{8B})^{1/3} - x)}$$

#### 3.15.4 Seuil, forme limite à l'arrêt sur fond plat incliné

• dans le cas sur pente, la condition

$$S\bar{h} - \bar{h}\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} = B$$

s'écrit en extrayant  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$  en en prenant son inverse  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{h}}$ 

$$d\bar{x} = \int \frac{(S\bar{h} - B)d\bar{h}}{S(S\bar{h} - B)} + \int \frac{Bd\bar{h}}{S(S\bar{h} - B)}$$

ce qui donne la solution implicite, valable pour  $\bar{x}<0,\,\bar{h}(-\infty)=B/S,\,\bar{h}(0)=0$ :

$$\bar{x} = \frac{\bar{h}}{S} + \frac{B}{S^2} Log(\frac{B - S\bar{h}}{B})$$

Remarquons qu'il doit y avoir un 1/S dans la formule (20) de Balmforth zet al. [8]. Comme

$$Log(1+\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \dots$$

pour  $S \to 0$  on a ainsi:

$$\bar{x} = \frac{\bar{h}}{S} + \frac{B}{S^2}(-S\bar{h}/B - (S\bar{h}/B)^2/2)$$

on retrouve bien la relation précédente du cas plat  $S = \theta = 0$ :

$$\bar{h} = \sqrt{2B\bar{x}} + \dots$$

Dans la page

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bingham\_collapse\_noSV.c on trace la superposition reproduite sur la figure 43

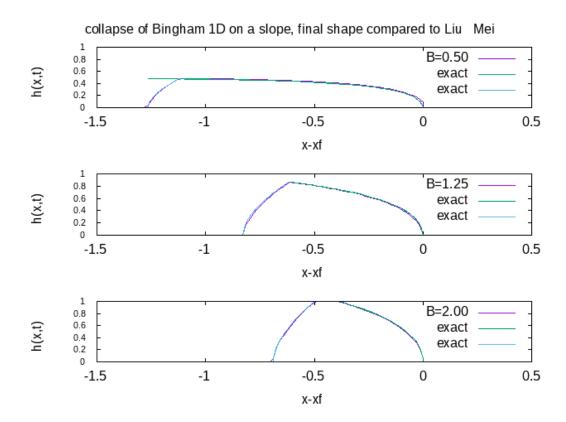


Figure 43: Comparaison de la formule donnant le tas final stationnaire  $(x-x_{f/e})S=h\pm\frac{B}{S}Log(\frac{B-(\pm Sh)}{B})$ , avec le calcul numérique pour trois valeurs du seuil. LEs courbes sont superposées.s

#### 3.15.5 Seuil, forme limite à l'arrêt sur une pente, analyse de Hogg

Reprenons la forme implicite que nous avons trouvée

$$\bar{x} = \frac{\bar{h}}{S} + \frac{B}{S^2} Log(\frac{B - S\bar{h}}{B})$$

Hogg [26] réécrit

$$\frac{S^2\bar{x}}{B}-1=-(1-\frac{S\bar{h}}{B})+Log(1-\frac{S\bar{h}}{B})$$

ou en prenant l'exponentielle et en changeant de signe

$$-e^{\frac{S^2\bar{x}}{B}-1} = (-(1-\frac{S\bar{h}}{B}))e^{-(1-\frac{S\bar{h}}{B})}$$

avec W la fonction telle que

$$z = We^W$$
.

il s'agit de la fonction de Lambert, une approximation de cette fonction est en partant de

$$e^W = z/W$$
 donc  $W = \ln(z) - \ln(W)$  donc  $W = \ln(z) - \ln(\ln(z) - \ln(W))$ 

une approximation de W est :

$$W = \ln(z) - \ln(\ln(z)) + \ln(\ln(z)) / \ln(z) + \dots$$

L'inversion de cette équation donne

$$\bar{h} = \frac{B\left(W\left(-e^{\frac{S^2\bar{x}}{B}-1}\right)+1\right)}{S}$$

c'est donc la forme explicite d'une langue de fluide qui s'est arrétée.

Hogg montre (après calculs vraiment très très compliqués) que l'extension maximale du tas est :

$$x_{f\infty} = \left(\frac{9(1+S/2)^2}{8B}\right)^{1/3}$$

et que la dynamique du tas est de la forme: t >> 1

$$x_f(t) = x_{f\infty} - (\frac{n}{\alpha t})^n$$

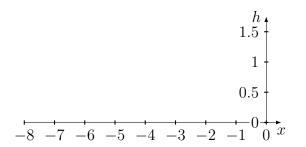


Figure 44: Profil final d'un tas Bingham  $x = \frac{h}{S} + \frac{B}{S^2} Log(B - Sh)$  avec S = B = 1

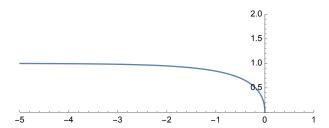


Figure 45: Profil final d'un tas Bingham  $x = \frac{h}{S} + \frac{B}{S^2} Log(B-Sh)$  avec S = B = 1

## 3.16 Comparaisons expérimentales

#### 3.16.1 effondrement d'un tas de caolin

L'article de Balmforth et al. Viscoplastic flow over an inclined surface 2006 montre des comparaisons expérimentales d'effondrements de tas de fluide à seuil sur un plan incliné.

Image extraite de

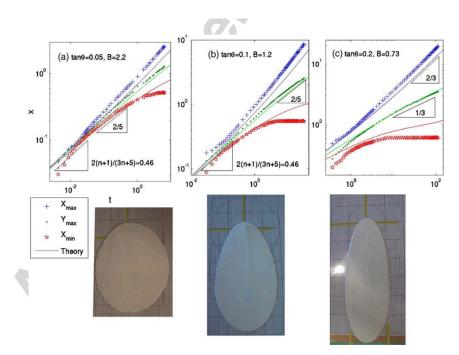


Fig. 10. Experimental extrusions of a kaolin slurry. Panels (a)–(c) show the dome diagnostics,  $X_{\min}$ ,  $X_{\max}$  and  $Y_{\max}$ , against time for three extrusions on planes with varying slope (as indicated). These panels show the dimensionless diagnostics versus dimensionless time; the dimensional measurements are converted into dimensionless variables by taking S=1 and using the pumping rate (about  $13 \text{ cm}^3/\text{min}$ ),  $K\approx 40 \text{ m.k.s.}$ ,  $n\approx 0.5$ ,  $\rho\approx 1.6 \text{ g/cm}^3$  and  $\tau_y\approx 13 \text{ Pa}$  (which also give the values of B indicated). The solid curves shows the results of theoretical extrusions, with parameter settings matched to the experimental conditions. The three photographs show the extruded domes at times of 6000, 4670 and 3120 sees (dimensionless times of 6.5, 35.4, 114).

Figure 46: effondrement d'un tas de fluide caolin

#### 3.16.2 rupture de barrage viscoplastique.

Étonnamment, il n'y a pas eu beaucoup d'investigations expérimentales sur le problème de rupture de barrage viscoplastique. Non seulement les données sont rares, mais le protocole expérimental n'a pas été suffisamment décrit pour une comparaison précise avec les modèles numériques. Il semble que l'article [1] four-nit le premier ensemble de données haute résolution liées au problème de rupture de barrage pour les fluides de Herschel-Bulkley. Cet ensemble de données unique est intéressant dans la mesure où il met en lumière des caractéristiques imprévues telles que le glissement des parois (observé uniquement pour les pentes les plus faibles) et les performances relativement médiocres des modèles testés!

voir l'article Ancey et al. 2012 [1]

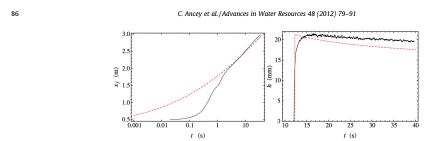
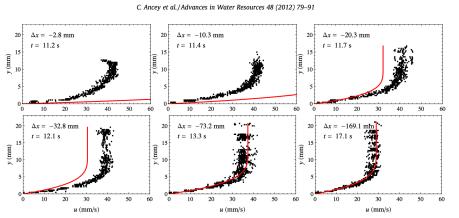


Fig. 8. Results for a slope of 25 deg and an initial volume V = 6 l. Left: Position of the front as a function of time. Right: Flow depth variation at  $x_0 = 255$  cm. Experimental data: solid line. Theoretical predictions: dashed line. Note that because of the slight delay in the theoretical front velocity (with respect to the measured velocity), the time axis of the theoretical curve  $h(x_0, t)$  has been slightly shifted (by  $\Delta t = -1.2$  s) so that the curves  $h(x_0, t)$  have the same starting point to facilitate comparison.

Figure 47: effondrement d'un tas de fluide carbopol, position du front et hydrogramme



83

Fig. 3. Velocity profiles at x=255 cm for  $\theta=25$  deg and an initial volume  $\mathcal{V}=61$ . Dots: experimental values; (red) curves: theoretical profiles given by Eq. (11) with  $\rho=1000$  kg m $^{-3}$ ,  $\tau_c=33$  Pa, n=0.33, and  $\mu=26$  Pa s $^n$ . We also report the distance  $\Delta x$  between the front position  $x_y$  and the point of measurement x=255 cm ( $\Delta x<0$  because the front is on the right of the point of measurement) together with the time at which the profile was measured. Use of Eq. (11) requires an equation specifying the gradient of the free surface  $\partial_x h(x)$ . We evaluated  $\partial_y h(x,t)$  experimentally by interpolating the measured flow depths by a piecewise linear function: the slope of each segment gave a fairly good local estimate of  $\partial_x h(x,t)$ . (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

Figure 48: effondrement d'un tas de fluide carbopol, profils de vitesse

#### **3.16.3** Erosion

Voir article [9]. un écoulement de fluide carbopol le long d'un plan incliné rencontre une région du même fluide immobile. Il y a donc érosion du fluide immobile par celui qui coule

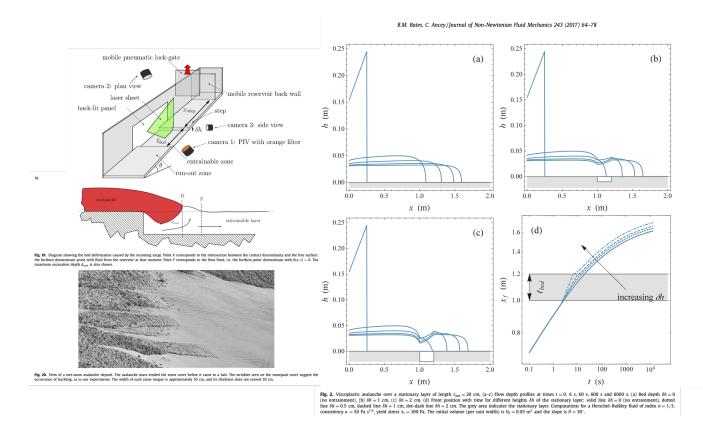


Figure 49: erosion

#### 3.17 Codes en Basilisk pour les fluides de bingham

#### 3.17.1 Ecoulement demi-Poiseuille en Bingham

Résolution directe de NS:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bingham\_simple.c

#### 3.17.2 Tas Bingham sur fond plat

Résolution directe de l'équation d'évolution:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse\_noSV.c Cas en Saint-Venant:

à faire.

Cas en RNSP Multilayer (couche limite):

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bingham\_collapse\_ML.c Cas en Navier Stokes:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/column\_SCC.c

#### 3.17.3 Tas Bingham sur fond incliné

Résolution directe de l'équation d'évolution:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bingham\_collapse\_noSV.c Normalement, en mettant B=0 et S=0 on retrouve les résultats du premier problème de Huppert et B=0 et S=1, on retrouve les résultats de http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscolsqrt\_noSV.c second problème (mais avec le gradient de pression, donc second problème au temsp long)

Cas en Saint-Venant:

à faire.

Cas en Navier Stokes:

à faire

## 3.18 Conclusion pour les fluides de Bingham

Pour ces problèmes d'effondrements de tas en rhéologie de Bingham, on a appliqué la même méthodologie que pour le cas visqueux simple: simplification et écriture en couche mince avec généralisation de Poiseuille (résolution de équation encadrée (Eq. 20), mais avec une viscosité de Bingham).

En intégrant ces équations nous obtiendrons une équation portant sur l'épaisseur du tas en fonction du temps et de l'espace (l'équivalent de l'équation encadrée (33), plus compliquée car il y a la hauteur plastifée Y). Nous allons maintenant exam-

iner les "sploutchs" pour un autre fluide: les milieux granulaires, avec bien sûr toujours les mêmes outils.

# 4 Equations de Navier Stokes turbulentes: la turbulence un fluide non newtonien?

### 4.1 Rappel, frottement dans les tuyaux

Il pourrait être bon de relire http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf et la partie turbulente.

Lorsque l'on écrit les équations turbulentes générale avec la décomposition de Reynolds,  $u_i = \langle u_i \rangle + u'_i$  Reynolds averaged N-S equation

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0$$
 et

$$\rho(\frac{\partial < u_i>}{\partial t} + < u_i> \frac{\partial < u_j>}{\partial x_j}) = -\frac{\partial }{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\frac{\partial < u_i>}{\partial x_j} - \rho < u_i'u_j'>]$$

on fait apparaître en terme source le terme de tension de Reynolds  $-\rho < u'_1 u'_2 >$ .

Pour continuer, on a besoin de savoir ce qu'il se passe dans une conduite (un tuyau si on veut). Ici on se place en axi, les équations sont écrites avec la condition d'invariance en x, soit :  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ . Comme la vitesse moyenne est nulle sur les parois, et la vitesse longitudinale étant indépendante de x donc la vitesse transverse est nulle partout. Il ne reste que l'équilibre gradient / frottement dans le régime turbulent (voir par exemple http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/PC5.ENSTA.pdf).

Remarquons que par symétrie dU/dr = 0 en r = 0, et U(R) = 0 et il ne reste que l'équilibre gradient de pression/ frottement en turbulent :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r} [r\tau(r)]$$

donc si on intègre sur toute la section du tuyau :  $\int 2\pi r dr$ 

$$0 = -\pi R^2 \frac{\partial p}{\partial x} + 2\pi [r\tau]_0^h,$$

ou avec le frottement au fond et le diamètre D=2R on a

$$0 = -\frac{\pi D}{4} \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0,$$

 $au_0$  est le frottement à la paroi. On pose par convention  $au_0 = \rho u_*^2$ , ce qui définit la "vitesse de frottement" (c'est l'expression consacrée)  $u_* = \sqrt{ au_0/\rho}$ . On a donc que  $\rho u_*^2 = -\frac{D}{4}\frac{\partial p}{\partial x}$ . Le frottement au fond compense exactement le terme moteur  $-\frac{\partial p}{\partial x}$ .

Historiquement Darcy et d'autres ont posé  $\lambda = (-D\frac{\partial p}{\partial x})/(\rho\frac{u^2}{2})$  (avec le diamètre D et la vitesse moyenne u, ce choix est historique), en allemand, c'est le Rohrreibungszahl. Remarquons que ce coefficient est 4 fois le coefficient de frottement, rappelons aussi que  $\frac{\tau(0)}{\rho u^2/2}$  est le coefficient de Fanning ou aussi coefficient de frottement,

$$\lambda = \frac{(-D\frac{\partial p}{\partial x})}{(\rho \frac{u^2}{2})} = 8\frac{\tau(0)}{\rho u^2} = 8\frac{u_*^2}{u^2},$$

donc par définition de ce lambda

$$\tau(0) = \lambda \frac{\rho u^2}{8}$$
, donc  $\rho u_*^2 = \lambda \frac{\rho u^2}{8}$ ,

En se donnant une hypothèse de Boussineq de viscosité turbulente, puis une relation pour la viscosité turbulent en longueur de mélange de Prandtl, on peut trouver que le profil de vitesse se comporte logarithmiquement.

Le grand résultat expérimental est justement que la vitesse a une dépendance logarithmique en la distance y à la paroi (d'où la validation de l'hypothèse de Prandtl). Au final on suppose en fait que le profil log est valide partout en première approximation  $(B \simeq 5)$ , on a r = R - y:

$$U_1(y) = u_*(\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + B))$$

ainsi la valeur moyenne après qq calcul est

$$u = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{Ru_*}{\nu}\right) + B - \frac{3}{2\kappa}\right).$$

On a dit que l'on pose historiquement  $\lambda = 8(u_*/u)^2$ , donc  $\frac{Ru_*}{\nu} = (\frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}})\frac{uD}{\nu}$ , on a donc la "loi de friction universelle des tuyaux de Prandtl", c'est une meilleure approximation sous forme implicite pour les tuyaux lisses (elle est toujours utilisée de nos jours):

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = (\frac{1}{\kappa} \ln \left( (\frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}}) \frac{uD}{\nu} \right) + B - \frac{3}{2\kappa}) \text{ réécrit en } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10} \left( \frac{uD}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 0.8,$$

voir Schlichting p 611, les constantes  $\ln 10$ ,  $1/\kappa$  et B sont ajustées expérimentalement pour trouver cette expression ( $\ln x = 2.3 \log_{10} x$ ). Ce fit est correct jusqu'à  $Re = 3.2 \ 10^6$  vérifié par les données expérimentales de Nikuradse 1932.

Expérimentalement Blasius 1913 avait montré que la relation

$$\lambda = 0.316 (uD/\nu)^{-1/4}$$

était un bonne approximation. A partir de ce fit, on retrouve le frottement à la paroi:

$$\tau(0) = \frac{\lambda}{8}\rho u^2 = \left(\frac{0.316}{8}\right) \left(\frac{u2R}{\nu}\right)^{-1/4} \rho u^2 = 0.0332 \left(\frac{R}{\nu}\right)^{-1/4} \rho u^{7/4} = \rho u_*^2$$

on peut ré arranger cette relation en

$$\left(\frac{u}{u_*}\right) = 6.997 \left(\frac{u_* R}{\nu}\right)^{1/7}$$

Pour un profil en  $\left(\frac{r}{R}\right)^{1/7}$ , la moyenne  $\int_0^R rudr/R^2 = 49/60 \simeq 0.8$  Ainsi, la relation de Blasius est cohérente avec une vitesse en puissance 1/7, au lieu de  $8.6 = (1/(.316/8\ 2^{-1/4})^{(4/7)})60/49$  on écrit

$$\frac{u(y)}{u_*} = 8.74 \left(\frac{yu_*}{\nu}\right)^{1/7}$$

La loi de friction de Blasius et la "loi de friction universelle des tuyaux de Prandtl" (relation implicite précédente) sont confondues jusqu'à  $Re = 10^5$ , avec toujours une meilleure validation expérimentale pour Prandtl.

En pratique les lois de friction de Prandtl et Blasius 1913 sont respectivement

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10} \left( \frac{uD}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 0.8 = -2.0 \log_{10} \left( \frac{2.51}{\frac{uD}{\nu} \sqrt{\lambda}} \right), \text{ resp. } \lambda = 0.316 \left( \frac{uD}{\nu} \right)^{-1/4}$$

Du point de vue des notations on peut écrire  $\tau_0 = \frac{1}{2}c_f u^2$ , avec  $c_f$  coefficient de friction, appelé aussi Coefficient de Fanning. Le coefficient  $\lambda = 4c_f$  (Rohrreibungszahl) est aussi appelé Darcy-Weisbach.

Récemment, des expériences très fines de McKeon, B.J., Zagarola, M.V. & Smits, A.J. 2005 "A new friction factor relationship for fully developed pipe flow" J. Fluid Mech. 538, 429-443 (cf aussi B. Dubrulle "Log at first sight" J. Fluid Mech. (2024), vol. 1000), avec rappelons

$$\lambda = \frac{\left(-D\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{\left(\rho \frac{u^2}{2}\right)} = 8\frac{\tau(0)}{\rho u^2} = 8\left(\frac{u_*}{u}\right)^2$$

ont permis de trouver une meilleure relation pour les grands Reynolds (les deux courbes sont quasi superposées)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.93 \log_{10} \left( \frac{uD}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 0.537,$$

ou avec la fonction de Lambert

$$\lambda = \frac{1}{(0.8382W(0.6287Re))^2} = \frac{1.42337}{W(0.6287Re)^2}$$

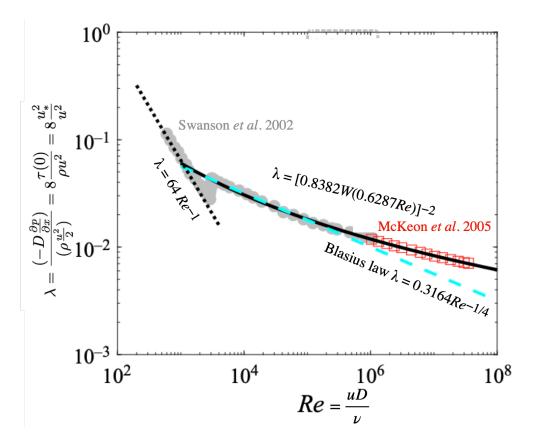


Figure 50: loi de friction universelle dans un tuyau lisse, "loi de friction universelle des tuyaux de Prandtl"  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.930 \, \log_{10} \left( Re \sqrt{\lambda} \right) - 0.537$  et de Blasius  $\lambda = 0.316 (Re)^{1/4}$ . dessin modifié de Dubrulle 2024

## 4.2 Longueur de mélange de Prandtl

Sortons du tuyau, et plaçons nous sur une épaisseur d'eau. Lorsque l'on écrit les équations turbulentes générale avec la décomposition de Reynolds, on fait apparaître en terme source le terme de tension de Reynolds  $-\rho < u_1'u_2' >$ . SI on fait l'hypothèse de Boussineq, on dit que ce terme est une viscosité turbulente fois le cisaillement, par analogie à la viscosité laminaire  $-\rho < u_1'u_2' >= (\rho\nu_t)\frac{\partial U_1}{\partial x_2}$ . On a gardé que le terme dominant (somme de la viscosité normale plus la viscosité turbulente, on verra que l'on néglige souvent la viscosité  $\mu$  dans le cas des fonds qui ne sont pas lisses, mais rugueux):

$$\tau_{12} = \mu(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}) - \rho < u_1' u_2' > = (\mu + \rho \nu_t)(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}) = (\mu + \mu_t)(\frac{\partial U_1}{\partial x_2})$$

Pour l'instant  $\mu_t$  est inconnue, il faut lui trouver une expression pour la modéliser. On va donc modéliser  $\nu_t = \mu_t/\rho$  de manière ad hoc. Ludwig Prandtl a introduit la longueur de mélange pour construire la viscosité turbulente  $\nu_t$ , par définition, la "viscosité turbulente" de Prandtl dépend du cisaillement (la rotation, ou la vorticité) et d'une longueur qui est la taille des tourbillons les plus grands (arguments heuristiques de Prandtl), au plus simple cette longueur est proportionnelle à la distance à la paroi avec une constante  $\kappa$  (qui a été appelée constante de von Kármán, on prend  $\kappa = 0.41 = 1/2.439$ ) donc on écrit grâce à cette hypothèse:

$$\nu_t = \ell^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z)$$
, avec  $\ell = \kappa z$ .

Cette expression est la définition par Prandtl de la "viscosité turbulente" avec l'hypothèse de "longueur de mélange".

En intégrant cette équation, on voit que l'on peut faire apparaître soit un profil linéaire près de la paroi (sous couche visqueuse) soit un profil log loin da la paroi.... relire http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf et la partie turbulente.

A partir d'ici, pour les rivières, on néglige dans cette expression  $\mu$  [Attention en aérodynamique, on ne néglige pas cette contribution qui joue un rôle car elle redonnera la "sous couche" laminaire sous la "couche logarithmique"]. On néglige  $\mu$  car la sous couche visqueuse en  $\nu/u_*$  va être négligeable par rapport à la taille des grains de sable ou des cailloux au fond de la rivière.

Dans le cas des écoulements turbulents en rivière, en canaux, ou en fleuves, ou en inondation on s'attend à retrouver un profil établi de forme logarithmique qui est caractéristique d'un écoulement turbulent [attention, les profils turbulents ont été observés et mesurés dans les tuyaux, dans les fleuves c'est moins clair, cette hypothèse de forme logarithmique est une hypothèse usuelle, il est vraisemblable qu'elle est fausse, le coefficient  $1/\kappa$  est ajusté.... des fois on prend une loi de puissance plutôt qu'un log]:

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} ln(\frac{z}{z_0})$$

z=0 est le fond où sont présentes des granulosités de taille  $z_0$ ,  $u_*$  est appelée la vitesse de frottement, elle est telle que le frottement au fond  $\tau_0 = \rho u_*^2$ .

#### Construction d'une viscosité turbulente avec longueur de mélange pour une rivière

Schlichting a introduit la longueur de mélange pour construire la viscosité turbulente, par définition, la viscosité dépend du cisaillement (la rotation, ou la vorticité) et d'une longueur qui est la taille des tourbillons les plus grands (arguments

heuristiques de Prandtl):

$$\nu_t = \ell^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z)$$

or nous avons vu que l'on néglige  $\mu$  pour obtenir  $0 = (\rho u_*^2/h)(z-h) + \rho \nu_t \frac{\partial}{\partial z} U(z)$  et on veut obtenir comme solution un profil logarithmique dont la dérivée est  $\partial U(z)/\partial z = u_*/(\kappa(z))$ , ces deux expressions nous donnent la longueur de mélange  $ad\ hoc$  (puisque la couche sous couche a été enlevée)

$$\ell = \kappa(z\sqrt{1 - z/h}).$$

Le frottement au fond est bien:

$$\tau_0 = (\rho \ell^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z)) \frac{\partial}{\partial z} U(z)|_{z=0} \text{ soit } \tau_0 = \rho u_*^2.$$

La contrainte en z=0 est  $\rho u_*^2$  bien que l'on ait négligé le  $\mu \partial U/\partial z|_0$ .

En résumé dans le cas d'un écoulement turbulent établi dans un fleuve, on a donc l'équilibre pesanteur/ frottement dans le régime turbulent:

$$0 = \rho g \alpha + \frac{\partial}{\partial z} [\rho \nu_t (\frac{\partial}{\partial z} U(z))],$$

la loi de viscosité turbulente  $\mu_t/\rho = \nu_t = \ell^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z)$  est une fonction donnée de z et  $(\frac{\partial}{\partial z} U(z))$  pour que l'on puisse résoudre le profil numériquement (par exemple  $\ell = (\kappa(z\sqrt{1-z/h}))$ , qui redonne la forme logarithmique  $U(z) = \frac{u_*}{\kappa} ln(\frac{z}{z_0})$ ).

Le débit est  $Q = u_*h_0(\ln(h_0/z_0) - 1) + z_0/h_0)$  or  $h_0 \gg z_0$  donc (Keleugan):

$$Q = u_* h_0(\ln(h_0/z_0)), \text{ et le frottement } \tau_0 = \rho u_*^2 = \frac{\rho(Q/h_0)^2}{(\ln(h_0/z_0))^2}.$$

Le frottement au fond compense exactement le terme moteur  $\rho g\alpha$ . La vitesse de frottement, qui est aussi la vitesse caractéristique est

$$u_* = \sqrt{gh\alpha}.$$

Dans le cas turbulent, la vitesse caractéristique n'est plus proportionnelle à  $\alpha$  comme en laminaire, mais à  $\sqrt{\alpha}$ .

Nous retrouverons cette dépendance dans la loi empirique de Chézy .

Ces considérations sur la turbulence étant faites, nous avons tous les éléments pour comprendre les fermetures de Saint-Venant. Lorsque l'écoulement est bien établi, pour une rivière quelconque avec une pente  $\alpha$  faible, on a un équilibre entre le terme moteur lié à la pente de la rivière qui va agir sur la surface mouillée, et le terme de friction au sol qui agit sur tout le périmètre mouillé (en supposant qu'il est constant, ce qui est une approximation d'autant plus forte aux berges):

$$0 = \rho g \alpha A - \tau_0 P$$

On retrouve en 2D pour une largeur infinie l'équation ?? (pour une rivière large  $A/P \sim h$ ). En utilisant le coefficient de frottement turbulent  $c_f$  défini au paragraphe précédent on voit que la vitesse est en  $\sqrt{\alpha}$ :

$$u = \sqrt{\frac{g}{c_f/2}} \sqrt{\frac{A}{P}} \alpha,$$

c'est à dire que u est reliée à la pente  $\alpha$  par la relation de proportionnalité  $u \propto \sqrt{\alpha}$ , on pose le coefficient  $C_C$  tel que  $u = C_C \sqrt{\frac{A}{P}\alpha}$ . Par définition, le coefficient de proportionnalité entre la vitesse moyenne et  $\sqrt{\frac{A}{P}\alpha}$  est noté  $C_C = \sqrt{\frac{g}{c_f/2}}$ , il est appelé le coefficient de Chézy, il n'est pas sans dimension, il est en  $m^{1/2}/s$ . Cela provient d'un choix historique et expérimental de Antoine Chézy (1718-1798), il mesurait la hauteur d'eau, la vitesse et la pente. Il a remarqué que la vitesse est en racine de A/P et de la pente  $\alpha$ .

Historiquement en 1776, pour le canal du Courpalet, Chézy trouva  $C_c=31\mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{s}$  et 44 pour la Seine. Les valeurs vont de 30 pour un canal petit et rugueux à 90  $\mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{s}$  pour un canal large et lisse. Dans le cas de la cuve FC80 utilisée en TP, le manuel de la cuve donne une valeur du Chézy de  $51m^{1/2}s^{-1}$ , des mesures effectuées donnent  $60m^{1/2}s^{-1}$ .

## 5 Equations de Navier Stokes dans le cadre granulaire

### 5.1 Le problème

Les matériaux granulaires comme le sable, des cailloux, des graviers, des roches, peuvent être considérés, lorsqu'ils coulent, comme un fluide Non Newtonien particulier. On consultera le livre [2] écrit par les pionniers français du sujet pour un tour d'horizon complet (la version anglaise plus récente est encore plus complète [3]). Une des principales particularités est que le matériau granulaire peut exister à l'état "solide" (tas simple) à l'état "liquide" (tas destabilisés qui s'effondre en coulant), ou à l'état "gazeux" (mouvement tellement fort que les particules volent). Le cas solide ne nous intéresse pas ici, tout comme dans le cas de Bingham, on va régulariser en remplaçant le solide par un fluide très très visqueux. Le cas gazeux ne nous intéresse pas non plus. Nous nous focalisons sur le cas liquide. Bien sûr, ces deux régimes ont leur intérêt particulier, mais ils sortent de notre choix....

#### 5.2 le nombre inertiel I

Depuis Savage 84 et Ancey, mais popularisé par Da Cruz et GDR MiDi, on peut construire un nombre sans dimension pour les granulaires. Ce nombre lie le cisaillement de vitesse ( $\dot{\gamma}$  important en écoulement et pour exprimer la viscosité des fluides non newtoniens), la pression (P en tant que contrainte caractéristique), la densité du matériau ( $\rho_s$ ), et originalité originale la taille des grains (d). Mettre un paramètre micro dans la description macro est assez original a priori. Pas tant que ça, dans le cas des milieux poreux, on a vu que la perméabilité http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv\_aquifere.pdf était proportionnelle au carré de la taille des pores/ grains. Dans le cas des gaz, la viscosité est en fait proportionnelle au libre parcours moyen des molécules. Il n'est donc pas si étonnant de relier le micro au macro dans la relation constitutive (ou loi de comportement). Le rapport sans dimension appelé

Nombre Inertiel est 
$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P/\rho_s}}$$

a ainsi été construit (les premières versions étaient  $\frac{P}{\rho_s \dot{\gamma}^2 d^2}$ ). C'est le rapport de deux temps. le premier est  $\tau_M = 1/\dot{\gamma}$  (temps macroscopique imposé), ce temps est associé à l'écoulement. On peut aussi construire un deuxième temps, le temps microscopique de réarrangement: avancée puis chute sur chaque grain  $\tau_c = \sqrt{\frac{d}{P/(\rho_s d)}}$ . Si I = 0, c'est le quasistatique: pas de cisaillement ou grande pression. Jusqu'à

I = 0.025 on est dans le quasi statique. le liquide est pour des gammes I = O(0.1). On va jusqu'au gaz I = 1 soit en augmentant le cisaillement, soit en diminuant la pression.

iI n'y a pas de dimension pour les contraintes autre que la pression de confinement P, donc il est naturel la contrainte dans le milieu lui est proportionnelle. La loi constitutive proposée est une loi de friction scalaire :

$$\tau = \mu(I)P$$

On suppose qu'en première approximation le fluide granulaire se comporte comme si son frottement est toujours un frottement de Coulomb. On se permet un variation de la friction avec I. Soit  $\phi$  le rapport entre le volume de solide et le volume total on a aussi pour la compacité  $\phi = \phi(I)$ . Mais ici, en première approximation, on suppose que la densité est constante.

La fonction  $\mu(I)$  a fait l'objet d'intenses études ([2]), elle est apparue linéaire grâce à des simulations numériques grain à grain (Da Cruz & Chevoir), elle est supposée linéaire au début (voir figure 51). De manière étonnante, cette loi macroscopique est indépendante de la friction solide grain à grain.

Puis, il est apparu que  $\mu$  devait être borné à grand cisaillement,  $\mu$  est admis sous la forme  $ad\ hoc$ , tel que posé par GDR MiDI [16]:

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\Delta\mu}{I_0/I + 1}.$$

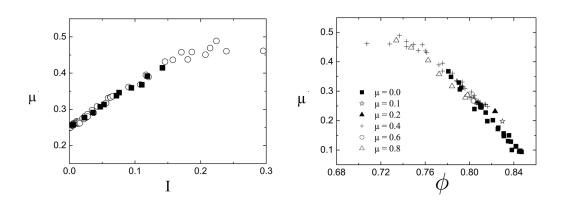


Figure 51: Simulations initiales de Da Cruz [11] à l'origine du  $\mu(I)$ ,  $\mu(I)$  est bien linéaire en I (ici représenté pour I assez petit...). On voit que  $\mu(\phi)$  est bien linéaire en  $\phi$ , le  $\mu$  en insert est le frottement grain sur grain, on voit qu'il n'a pas d'influence.

Jop et al Nature 05 ont proposé une loi tensorielle: qui généralise la relation empirique scalaire

$$\tau_{ij} = \frac{\mu(I)pD_{ij}}{|D_{ij}|}$$

avec

$$|D_{ij}|^2 = \frac{1}{2}(D_{ij}D_{ij}) = \frac{1}{2}D_2^2.$$

Donc

$$\tau_{ij} = 2(\frac{\mu(I)p}{\sqrt{2}D_2})D_{ij}$$

avec la définition d'une viscosité effective:

$$\eta = (\frac{\mu(I)P}{\sqrt{2}D_2})$$

qui diverge en  $D_2$ =0, mais que l'on régularise. Si  $D_2$  est trop petit, alors on met une viscosité  $\eta_{max}$ .

Remarquer la pression qui intervient. La viscosité dépend de la pression de confinement. Ce n'était pas le cas pour Bingham, dans la loi de Bingham, il y a un seuil constant. Ici il n'y a qu'un seuil, et il est variable.

### 5.3 Le problème complet à deux fluides

Les équations finales ou "équations de Navier Stokes  $\mu(I)$ " incompressibles à deux phases, sont obtenues en introduisant un fluide passif de densité faible et de viscosité faible. Ces quantités seront suffisamment faibles pour que tout le fluide passif soit à pression nulle quasi constante et qu'il n'entraı̂ne pas le granulaire. On note T un traceur qui vaut 1 dans le milieu granulaire et qui est nul dans le fluide passif. La moyenne harmonique est prise pour la viscosité.

• Incompressibilité dans chaque phase:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0.$$

• Équation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \underline{f}.$$

• Tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\eta\underline{\underline{D}} \quad \text{avec } \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla u} + \underline{\nabla u}^T),$$

Densité

$$\rho = \rho_q T + (1 - T)\rho_f$$

• Relations constitutives:

$$I = \frac{d\sqrt{2}D_2}{\sqrt{p/\rho}}, \quad \mu(I) = \mu_s + \frac{\Delta\mu}{I_0/I + 1}, \text{ et } \eta_g = \frac{\mu(I)p}{\sqrt{2}D_2}, \text{ où } D_2 = \sqrt{\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}}.$$

• viscosité finale:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{T}{\eta_g} + \frac{1 - T}{\eta_f}.$$

• conditions aux limites: Pression en haut du domaine nulle. On se donne une condition d'adhérence à la paroi.

#### 5.4 Une solution exacte: le profil de Bagnold

#### 5.4.1 Viscosité de Bagnold et profil de Bagnold

Bagold, après avoir navigué dans la mer de sable et combattu les forces de l'Axe [7] dans ce même désert Lybien, a synthétisé toutes ses observations de terrain dans des articles scientifiques. Notamment, il a observé l'avancée des dunes et les avalanches de sable. Il est devenu ainsi le pionnier des écoulements granulaires.

Considérons l'écoulement le long d'une plaque plane inclinée tel que l'a étudié Bagnold ([5]), nous idéalisons la configuration en supposant que la plaque est infinie et que l'écoulement est bi dimensionnel et stationnaire. Soit  $\alpha$  l'angle d'inclinaison, x est dans la direction le long de la plaque et y la direction perpendiculaire (Figure 52). Cette configuration est bien entendu le modèle expérimental le plus simple d'une avalanche de montagne.

L'équilibre du milieu considéré (l'accélération est nulle):

$$0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho g$$

s'écrit en développé:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \rho g \sin \alpha \text{ and } 0 = \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} - \rho g \cos \alpha, \tag{86}$$

par intégration de 0, le fond rigide à H la hauteur de de la couche ( $d \ll H$ , avec d taille de grain)) et comme il n'y a pas de contrainte tangentielle ni normale en y = H (soit  $\sigma_{xy}(H) = 0$  et  $\sigma_{yy}(H) = 0$ ), on a:

$$\sigma_{xy} = \rho g H \left( 1 - \frac{y}{H} \right) \sin \alpha$$
, et  $\sigma_{yy} = -\rho g H \left( 1 - \frac{y}{H} \right) \cos \alpha$ , soit  $\sigma_{xy} / \sigma_{yy} = -\tan \alpha$ , (87)

qui nous enseigne que le frottement au fond équilibre le poids de la colonne de grains,  $\sigma_{xy}(0) = \rho g H \sin \alpha$ . Ce résultat est indépendant de la rhéologie. Tel quel,  $\sigma_{xx}$  est indéterminé. On va supposer que la vitesse est nulle au fond, (i.e. en y=0), cela se discute, et cela correspond à un fond rugueux. L'incompressibilité est consistante avec u=u(y) et v=0, où u et v sont les composantes du champ de vitesse dans les directions x et y et  $\phi=\phi_0$  est constant. Le modèle le plus

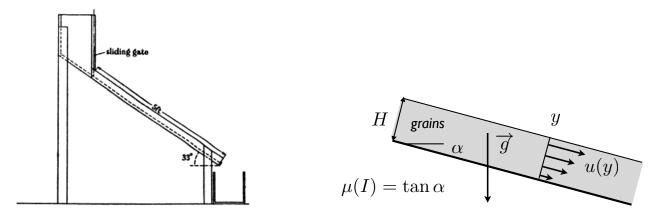


Figure 52: L'expérience originale de Bagnold [5], à droite un schéma avec les notations

simple consisterait à prendre une viscosité globale constante  $\eta_0$  comme un fluide Newtonien,  $\sigma_{xy} = \eta_0 \partial u / \partial y$ :

$$0 = \eta_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \sin \alpha$$

on aurait alors un écoulement de demi Poiseuille appelé aussi écoulement de  $\mathrm{Nu}\beta\mathrm{elt}$ :

$$u = \frac{\rho g H^2 \sin \alpha}{\eta_0} \frac{y}{H} (1 - \frac{y}{2H}).$$

À partir de ses observations Bagnold [5] a proposé une viscosité construite avec la taille du grain et du taux de cisaillement (dans une formulation à "la longueur de mélange de Prandtl" [42]), dans le cas considéré d'un écoulement parallèle:

$$\nu = \mathcal{F}(\phi_0) d^2 \frac{\partial u}{\partial y} \tag{88}$$

On suppose que  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p$ . On obtient à partir de

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (\rho \nu \frac{\partial u}{\partial y}) + \rho g \sin \alpha$$

l'expression de la vitesse:

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{gd}\left(\mathcal{F}(\phi_0)^{-1}\sin\alpha\frac{H^3}{d^3}\right)^{1/2}\left(1 - \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{3/2}\right), \quad v = 0, \quad p = \rho gH\left(1 - \frac{y}{H}\right)\cos\alpha.$$
(89)

Une limitation évidente est qu'il n'y a pas d'angle limite, à moins que l'équation de  $\mathcal{F}(\phi)$  ne le permette. Dans Bagnold 54 la valeur numérique de  $\mathcal{F}(\phi)^{-1/2}$  est estimée à 0.165.

#### 5.4.2 Avalanche stationnaire dans le cadre du $\mu(I)$

Considérons maintenant le modèle du  $\mu(I)$ . Comme précédemment on cherche une solution 2D stationnaire et incompressible. Par définition de la rhéologie,  $\mu(I) = \tau/p$  et comme on a posé  $\sigma_{xy} = \tau$  et  $\sigma_{yy} = -p$  la solution 5.4.2 de l'équilibre du milieu considéré

$$\tau = \rho g H \left( 1 - \frac{y}{H} \right) \sin \alpha$$
, et  $-p = -\rho g H \left( 1 - \frac{y}{H} \right) \cos \alpha$ , soit  $\tau/p = \tan \alpha$ ,

montre  $\mu$  est constant:  $\mu(I) = \tan \alpha$ . Donc pour une valeur donnée de la pente,  $\alpha$ , le nombre inertiel I est constant:  $I = I_{\alpha}$  avec  $I_{\alpha} = \mu^{-1}(\tan \alpha)$ , où  $\mu^{-1}$  est la fonction réciproque de la fonction  $\mu$ :

$$\mu^{-1}(\tan \alpha) = I_0 \frac{\tan \alpha - \mu_s}{\mu_s + \Delta \mu - \tan \alpha}.$$
 (90)

Par définition de I on a  $d(\partial u/\partial y) = I_{\alpha}\sqrt{p/\rho}$ . Le cisaillement est une fonction explicite de y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (I_{\alpha}/d)\sqrt{gH(1-y/H)\cos\alpha},$$

qui s'intégre en tenant compte du non glissement en y = 0. Cela donne temps que  $\tan \alpha > \mu_s$  et 0 < y < H (si  $\tan \alpha < \mu_s$  alors u = 0):

$$u = \frac{2}{3}I_{\alpha}\sqrt{gd\cos\alpha\frac{H^3}{d^3}}\left(1 - \left(1 - \frac{y}{H}\right)^{3/2}\right), \quad v = 0, \quad p = \rho gH\left(1 - \frac{y}{H}\right)\cos\alpha. \tag{91}$$

On retrouve ainsi la forme du profil de Bagnold (au niveau de la dépendance en 3/2), mais avec un différent préfacteur. Si on veut le flux total, comme on a  $\int_0^1 (1-(1-\bar{y})^{3/2})d\bar{y} = 3/5$  donc le flux est

$$Q = \frac{2}{5} I_{\alpha} \sqrt{\cos \alpha} \sqrt{gH} \frac{H^2}{d}$$

le vitesse moyenne  $U_m = Q/H$  est donc:

$$U_m = \frac{2}{5} I_\alpha \sqrt{\cos \alpha} \sqrt{gH} \frac{H}{d}$$

#### Note

Le rapport  $\tau/\frac{\partial u}{\partial y}$  definit une viscosité équivalente, elle vaut ici:

$$(\rho \nu_{eq}) = \rho(d/H) \frac{\sin \alpha \sqrt{gH} H}{(\cos \alpha)^{1/2} I_{\alpha}} \sqrt{1 - y/H}$$
(92)

elle est nulle en haut. On pourrait réintroduire cette viscosité dans une modélisation Navier Stokes, un peu comme en écoulement fluvial où des profils turbulents expérimentaux sont réintroduits pour résoudre les équations. Remarquons que la plus petite viscosité et en fait obtenue au voisinage de un grain de la surface en H-d. Cette viscosité minimale est :  $\nu_{min} \simeq \frac{\sin \alpha \sqrt{gHH}}{(\cos \alpha)^{1/2}I_{\alpha}} (d/H)^{3/2}$ , soit en ordre de grandeur  $\rho \sqrt{gd^3}$ .

#### 5.4.3 Confrontations

Si  $\alpha$  est plus grand que  $\arctan(\mu_s)$  un écoulement est possible, la rhéologie du  $\mu(I)$  permet bien cette prédiction. La forme générale du profil est la même que Bagnold en  $(1-\left(1-\frac{y}{H}\right)^{3/2})$ 

Par contre il y a un angle maximal  $\arctan(\mu_s + \Delta\mu)$ , au delà, l'écoulement est toujours accéléré. Cependant, contrairement à cette formule, l'angle minimal est plus grand pour les couches fines que les couches épaisses. Pour les couches fines, les profils sont plutôt linéaires que "Bagnold". Les expériences de Pouliquen 99 Silbert et al.[45] montrent qu'il y a une corrélation entre l'angle minimal, la vitesse moyenne et la hauteur.

$$\frac{\int_0^H u(y)dy}{H\sqrt{qH}} = 0.14 \frac{H}{H_{ston}}.$$

0.14 est un coefficient empirique et  $h_{stop}$  est la hauteur minimale pour avoir un écoulement à l'angle d'inclinaison considéré.

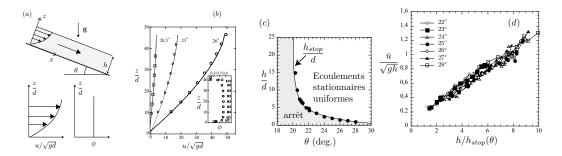


Figure 53: Comparaisons entre Bagnold des simulations de Baran et al 06, et expériences de Pouliquen 99. Images tirées de Pouliquen Forterre

# 5.5 Equations de Saint-Venant dans le cadre granulaire sur fond rigide : Le modèle de Savage Hutter

#### 5.5.1 Equations

Nous allons présenter les équations intégrées sur l'épaisseur depth averaged equations. Elles sont appelées aussi équations de Saint-Venant ou Shallow water en anglais, et aussi Savage-Hutter pour les granulaires.

En 2D, les équations complètes de "Navier-Stokes" s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\\ \rho(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y}) &= -g\rho\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\\ \rho(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y}) &= -g\rho\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{cases}$$

On va appeler le fond f, le fond global est en fait posé sur un fond initial faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (négatif si penché à droite). La hauteur de fluide est h, la position de la surface fluide est  $\eta$  tel que  $\eta - f = h$ , le cas du fond rigide plat f = 0 sera donc tel que  $\eta = h$ .

La démarche est à peu près celle de Savage & Hutter [40], c'est la démarche classique pour établir les équations de Saint-Venant. Elle a été reprise de nombreuses fois depuis (Iverson [?], Mangeney ...). Nous nous sommes permis de partir de NS  $\mu(I)$  ce qui simplifie les choses pour le tenseur des contraintes, la petite discussion ensuite rappelle que la modélisation du tenseur des contraintes est effectivement un problème.

#### 5.5.2 Aspect couche mince solide

Commençons par le cas statique pour étudier les contraintes:

$$\begin{cases} 0 = -g\rho \sin \alpha + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ 0 = -g\rho \cos \alpha \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{cases}$$

en première approximation  $\sigma_{yy} = g\rho \cos \alpha (y-h)$  qui repasse dans l'équation en x avec le "earth pressure coefficient", k = O(1),  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ , donc en intégrant sur la hauteur

 $0 = -g\rho \sin \alpha h - kg\rho h \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} - \sigma_{xy}(0)$ 

par la suite on décompose  $\sigma_{ij} = -p\delta_i + \tau_{ij}$ , d'où les essais d'estimation de  $\tau_{xx}$  que l'on pense d'ordre  $\sin \alpha$  dans la suite mais qui pourraient être en  $\varepsilon$ , mais de toutes façons on veut obtenir dans le membre de droite le résultat précédent (et avec k = 1):

$$-g\rho\sin\alpha h - g\rho h\cos\alpha\frac{\partial h}{\partial x} - \tau_{xy}(0).$$

La discussion sur la valeur de k est ouverte, k dépend aussi du sens de la compression, le terme suivant dans  $\sigma_{yy}$  est  $\tau_{yy}$ . Il est à noter que le terme  $\tau_{xx}$  est réintroduit par Forterre et Gray.

#### 5.5.3 Aspect couche mince

Nous allons examiner ces équations par analyse phénoménologique en tenant compte du fait que les écoulements sont sur une hauteur typique H et que les variations longitudinales sont sur une échelle de longueur beaucoup plus grande L, on pose  $\varepsilon = H/L$ . Nous avons en tête l'étude d'un écoulement peu différent d'un écoulement quasi établi à la Bagnold.

On s'attend à ce que les termes prépondérants soient le terme de chute  $-g\rho\sin\alpha$  et le terme de friction  $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ , on pense donc que  $\tau_{xy}=\rho gH\sin\alpha\bar{\tau}_{xy}$ . On peut aussi penser que  $\tau_{xx}=\rho gH\sin\alpha\bar{\tau}_{xx}$  a priori. Transversalement, les termes prépondérants sont le terme sur la verticale  $-g\rho\cos\alpha$  qui est équilibré par  $-\partial_y p$ , les fluctuations de vitesse transverse sont faibles, ce sont les termes principaux (par convention les termes avec une barre au dessus sont d'ordre 1, l'échelle en a été extraite. La pression est donc de la forme "hydrostatique"

$$p = -\rho g \cos \alpha (\eta(x, t) - y)$$

en première approximation. Les variations longitudinales  $-\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$  sont donc d'ordre de grandeur  $-\rho g \varepsilon \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}$ . Ces variations provoquent le mouvement du fluide: termes du membre de gauche dont l'ordre de grandeur est  $\rho U_0^2/L$  si le temps est mesuré avec  $L/U_0$  ce qui correspond au temps de convection. On a donc par moindre dégénérescence, c'est à dire, si on veut conserver les termes d'inertie (d'ordre  $\rho U_0^2/(H/\varepsilon)$ ) et de gradient de pression  $(\rho g \varepsilon)$ , alors

$$\frac{\rho U_0^2}{(H/\varepsilon)} = \rho g \varepsilon.$$

Il est donc pertinent de prendre une vitesse construite avec la gravité et la hauteur du tas  $U_0 = \sqrt{gH}$ . Le temps est mesuré avec cette vitesse et  $H/\varepsilon$  de manière à conserver tous les termes de la dérivée totale.

On pose donc  $t = ((H/\varepsilon)/U_0)\bar{t}$ ,  $x = (H/\varepsilon)\bar{x}$ ,  $y = H\bar{y}$ ,  $p = \rho g H\bar{p}$ ,  $u = \sqrt{gH}\bar{u}$  $v = \varepsilon\sqrt{gH}\bar{v}$ , les quantités avec une barre sont d'ordre 1. Le système s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \varepsilon \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\sin\alpha - \varepsilon \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \sin\alpha \varepsilon \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial \bar{x}} + \sin\alpha \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}} \\ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial \bar{y}} \right) &= -\cos\alpha - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \sin\alpha \varepsilon \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial \bar{x}} + \sin\alpha \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

Dans l'optique initiale des équations de Saint-Venant pour les fluides, les angles sont assez faibles  $\alpha$  est petit et  $\varepsilon$  est petit lui aussi. Les termes en  $\varepsilon \sin \alpha$  sont donc négligés. Pour les avalanches de grains, l'angle n'est pas si petit que ça, cependant on utilise les mêmes hypothèses. Au premier ordre en ces petits paramètres il reste:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0\\ \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) &= -\sin\alpha - \varepsilon \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \sin\alpha \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}}\\ 0 &= -\cos\alpha - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

On devrait en toute rigueur asymptotique, avoir  $O(\varepsilon) = O(\alpha) << 1$ , mais dans une version plus lâche, on dit que ce sont les termes principaux. C'est en fait ce système qui est ensuite intégré transversalement et qui va mener aux équations de Saint-Venant.

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0\\ \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) &= -\alpha - \varepsilon \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \alpha \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial \bar{y}}\\ 0 &= -1 - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

#### 5.5.4 Continuité

Etablissons tout de suite la relation de conservation de la masse car elle ne nécessite aucune autre hypothèse de modélisation. Auparavant, nous rappelons que pour  $D = \partial_t$  ou  $D = \partial_x$  on a la règle de Leibnitz de dérivation des intégrales:

$$D\int_{f}^{\eta} g(x, y, t)dy = \int_{f}^{\eta} Dg(x, y, t)dy + gD\eta - gDf$$

Pour le montrer, prenons  $D = \partial_x$ , coupons  $\int_f^{\eta} = \int_0^{\eta} - \int_0^f$  et soit G une primitive de g, par définition

$$\int_0^{\eta(x,t)} g(x,y,t)dy = G(x,\eta(x,t),t).$$

donc en faisant attention aux bornes qui varient:

$$\partial_x \int_0^\eta g dx = \partial_x (G(x,\eta(x,t)) = \partial_x G(x,\eta(x,t) + \partial_z G(x,\eta,t)) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dy + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,\eta,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,y,t) \\ \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x,y,t) dx + \partial_y G(x,y,t) dx$$

On fait ensuite pareil pour la borne basse.

Utilisons cette relation, intégrons l'équation de conservation de la masse du fond f à la surface  $\eta$ 

 $\int_{f}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = 0$ 

cela donne la relation suivante où sont apparues les vitesses transversales en bas et en haut de la couche liquide:

$$\int_{f}^{\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy + v(x, \eta, t) - v(x, f, t) = 0$$

puis en extrayant la dérivée de l'intégrale:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{f}^{\eta} u dy \right) - u(x, \eta, t) \frac{\partial \eta}{\partial x} + u(x, f, t) \frac{\partial f}{\partial x} + v(x, \eta, t) - v(x, f, t) = 0$$

au fond, v(x,f,t)=0, la vitesse transverse est nulle en général si le fond est rigide, mais s'il y a érosion, elle n'est pas nulle, nous ferons une étude séparée pour examiner le cas avec érosion. Au fond de même u qui est nul et compte tenu de la vitesse à la surface :  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u(x,\eta,t) \frac{\partial \eta}{\partial x} = v(x,\eta,t)$ , on obtient:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\int_f^{\eta} u dy) = 0.$$

Remarque, la formule est miraculeusement vraie en fluide avec glissement (par exemple le fluide parfait où il n'y a que la pression). Dans le cas d'un fluide parfait, au fond, v(x, f, t), la vitesse transverse n'est pas nulle, mais  $v(x, f, t) = u(x, f, t) \frac{\partial f}{\partial x}$  (c'est la vitesse de glissement sur l'obstacle), la vitesse à la surface est toujours la même et le résultat global est toujours valide.

Dans le cas du fond plat rigide, on écrit donc:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^h u dy \right) = 0.$$

Dans tous les cas de fond rigide plat ou non, la conservation globale est valide:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}Q = 0.$$

#### 5.5.5 Conservation de la quantité de mouvement

Examinons l'équation de la conservation de quantité de mouvement transverse on a déjà constaté que

 $0 = -g\rho\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial u}$ 

et ainsi  $p = -\rho \cos \alpha g(\eta(x,t) - y)$  la pression est hydrostatique, elle est maximale au fond, et elle est nulle à la surface. On pourrait rajouter des termes de second ordre transverse.

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y}) = -g\rho\sin\alpha + \rho\cos\alpha g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

-En intégrant sur la hauteur h le terme  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , on a  $\frac{\partial}{\partial t} \int_f^{\eta} u dy - u(x, \eta, t) \frac{\partial h}{\partial t}$ 

-En intégrant sur la hauteur h le terme  $\frac{\partial u^2}{\partial x}$ , on a  $\frac{\partial}{\partial x} \int_f^{\eta} u^2 dy - u(x, \eta, t)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + u(x, f, t)^2 \frac{\partial f}{\partial x}$ 

-En intégrant sur la hauteur h le terme  $\frac{\partial uv}{\partial y}$  on obtient  $u(x,\eta,t)(\frac{\partial \eta}{\partial t}+u(x,\eta,t)\frac{\partial \eta}{\partial x})-u(x,f,t)v(x,f,t)$ 

-La somme des trois donne

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u(x, y, t) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(x, y, t)^2 dy$$

Comme pour la conservation de la masse, les valeurs se compensent au fond car la vitesse est nulle u(x, f, t) = 0 ou s'il y a glissement car  $v(x, f, t) = u(x, f, t) \frac{\partial f}{\partial x}$ . En haut c'est encore la vitesse de l'interface qui permet la simplification. Le membre de droite s'intègre:

$$-g\rho\sin\alpha h + \rho\cos\alpha g(\eta - f)\frac{\partial}{\partial x}\eta - \tau_{xy}(x, 0, t)$$

on remarque que l'on peut écrire

$$\rho\cos\alpha g(\eta-f)\frac{\partial}{\partial x}\eta=\rho\cos\alpha gh\frac{\partial}{\partial x}\eta=\rho\cos\alpha g(\frac{\partial}{\partial x}\frac{h^2}{2}+h\frac{\partial}{\partial x}f)$$

Dans le cadre du modèle NS  $\mu(I)$ , le frottement à la paroi est relié à la pression  $\tau_{xy}(x,0,t) = \mu(I(0))p(x,0,t)$  avec  $p(x,0,t) = \rho g \cos \alpha h$ .

A ce point nous avons donc:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{f}^{\eta} u(x, y, t) dy = 0$$

et en tenant compte de l'hydrostatique, des dérivées d'intégrales et du frottement au fond:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{f}^{\eta} u(x, y, t) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{f}^{\eta} u(x, y, t)^{2} dy + \cos \alpha \frac{g}{2}(h^{2}) \right) = 
= -gh \sin(\alpha) - \cos \alpha gh \frac{d}{dx} f - \mu(I(0))gh \cos(\alpha).$$
(93)

Arrivé à ce point, nous avons besoin d'une fermeture, c'est à dire une relation entre les profils de vitesse. Nous allons donc supposer que la vitesse est toujours à peu près une vitesse avec un profil de Bagnold,  $u = U_b(1 - (1 - y/h)^{3/2})$ , On calcule donc le rapport

$$\frac{\int_0^1 (1 - (1 - \bar{y})^{3/2})^2 d\bar{y}}{\left(\int_0^1 (1 - (1 - \bar{y})^{3/2}) d\bar{y}\right)^2} = \frac{5}{4}$$

d'où le coefficient devant le terme non linéaire.

#### Modèle final à fond rigide et plat 5.5.6

Dasn ce cas f=0, le fond est déterminé par le plan incliné de  $\alpha$ . On confond donc la hauteur de grain et la position de la surface libre. L'incompressibilité nous permet de définir le débit

$$Q = \int_0^h u(x, y, t) dy.$$

Partant des ENS avec  $\mu(I)$  le système final s'écrit

$$\begin{split} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (Q)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\frac{5Q^2}{4h} + \cos \alpha \frac{g}{2}(h^2)) &= gh\cos \alpha (-\tan \alpha - \mu(I))) \end{split}$$

avec

$$I = (d/h) \frac{5Q}{2h\sqrt{gh\cos\alpha}}$$

le signe de  $\alpha$  est ici négatif lorsque la pente penche à droite. avec  $t=0, h=H_{tas}$ pour  $x < L_{tas}$ , la forme d'un tas initial que l'on laisse couler ensuite. En pratique,  $\cos \alpha \simeq 1$  et on remplace le  $(\frac{5Q^2}{4h})$  par  $(\frac{Q^2}{h})$ , comme si (5/4)=1!

#### 5.6 Exemples

Nous allons voir quelques exemples simples pertinents.

#### 5.6.1 Effondrement d'un tas en Saint-Venant/ Savage-Hutter

Commençons par l'effondrement d'un tas sur un fond plat. C'est en fait le problème de la rupture de barrage.

On a  $P = \rho g h$  et  $I = 5/2 d(u/h)(gh)^{-1/2}$  et  $\Gamma = 1$ 

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}uh = 0\\ \frac{\partial}{\partial t}hu + \frac{\partial}{\partial x}\frac{(hu)^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x}g\frac{h^2}{2} = -\mu gh\frac{u}{|u|} \end{cases}$$

ici le coefiicent  $\mu$  est pris constant. 1 t = 0,  $h = H_{tas}$  pour  $x < L_{tas}$ , la forme d'un tas initial que l'on laisse couler ensuite.

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/savagestaron.c

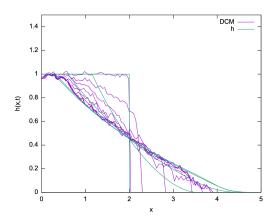


Figure 54: Effondrement d'un tas en Saint-Venant Savage Hutter vs dynamique de contact

On voit que l'on peut prédire un dépôt final correct avec Saint-Venant Savage Hutter mais que la dynamique n'est pas respectée. C'est normal car aux temps courts le rapport d'aspect est trop grand et les hypothèse de SVSH tombent en défaut.

#### 5.7 Onde Cinématique 1D de Bagnold

Nous considérons maintenant un cas d'avalanche sur une pente inclinée. Nous nous plaçons dans la description onde cinématique/ onde diffusive comme pour les inondations.

Il est d'usage de considérer l'équilibre pente friction et donc de négliger l'inertie et d'en déduire Q fonction de la pente, par exemple pour le cas Huppert pente

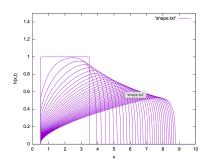


Figure 55: Effondrement d'un tas avec la description onde diffusive & profil de bagnold http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bagnold\_ondesimple\_noSV.c

forte en visqueux newtonien  $Q = -gZ'h^3/(3\nu)$ , et ce débit est mis dans l'équation de la masse

 $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$ 

ce qui donne l'équation sur h que nous avons résolue avec Huppert.

Pour un cas Bagnold on a vu, en linéarisant  $I_{\alpha}$ , autour de  $\tan \alpha - \mu_s \simeq \frac{\Delta \mu}{I_0} I_{\alpha}$  petit avec  $\tan \alpha = -Z_b' > 0$  et  $\cos \alpha \simeq 1$ , que l'on obtient le débit Q en fonction de l'angle

$$Q = \frac{2}{5} \left( \frac{-Z_b' - \mu_s}{\Delta \mu} \right) I_0 \sqrt{gh} \frac{h^2}{d}$$

on pourrait aussi mettre  $\partial_x h$ 

$$Q = \frac{2}{5} \left( \frac{-Z_b' - \mu_s - \partial_x h}{\Delta u} \right) I_0 \sqrt{gh} \frac{h^2}{d}$$

en négligeant  $\partial_x h$  alors en substituant et en remarquant que  $\partial_x h^{5/2} = (5/2)h^{3/2}\partial_x h$ 

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

devient l'équation d'onde cinématique ne portant que sur h

$$\frac{\partial h}{\partial t} + I_0(\frac{-Z_b' - \mu_s}{\Delta \mu})\sqrt{g}\frac{h^{3/2}}{d}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

soit  $c(h) = \left(\frac{-Z_b' - \mu_s}{\Delta \mu}\right) I_0 \sqrt{g} \frac{h^{3/2}}{d}$ 

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

La solution est constante le long des caractéristiques

$$\frac{dx}{dt} = c(x,t)$$
 avec  $c = Ah^{3/2}$ 

pour une distribution donnée initialement,  $h(x, t = 0) = h_0(x)$  alors le long des droites  $x = ct + \xi$  la valeur de la solution est constante, c'est la valeur en  $\xi$  qui vaut ensuite x - ct qui est conservée.

$$x = \xi + tc(\xi, 0)$$
 et  $h(x, t) = h_0(\xi)$ 

Donc, si on a une distribution au temps t=0 de hauteur  $h_0(x)$  initiale, chacun de ces points x est en fait un des points initiaux  $\xi$ , alors la solution est  $h=h_0(x-tc(h_0(\xi)))$ 

Peu de gens ont utilisé cette méthode, ils préfèrent l'approche *Shallow water* Saint-Venant qui suit appelée aussi Savage Hutter.

#### 5.8 Discussion de la loi d'écoulement

Razis Kanellopulos, van de Weele The granular monoclinal wave J. Fluid Mech. (2018), vol. 843, pp. 810 doi:10.1017/jfm.2018.149

A dynamical systems view of granular flow: from monoclinal flood waves to roll waves J. Fluid Mech. (2019),

Böorzsönyi, PHYSICAL REVIEW E 78, 011306 2008 Avalanche dynamics on a rough inclined plane Tamás Börzsönyi Thomas C. Halsey and Robert E. Ecke

Two Scenarios for Avalanche Dynamics in Inclined Granular Layers 2005 Tamas BörzsönyiThomas C. Halsey and Robert E. Eckel

Self-channelisation and levee formation in monodisperse granular flows F.M. Rocha 2019

#### 5.8.1 Front d'avalanche en Saint-Venant Savage-Hutter

Cas ou la friction s'oppose à la pente et où il reste un peu de pression, le movement est forcé par la pente, en amont on a une épaisseur constante, en aval on a le front que l'on va voir après en détail. Voir figure 57

For the steady established avalanche, we have the value of I for the angle  $\theta$ :

$$I_{\theta} = I_0(\tan \theta - \mu_0)/(\mu_0 + \Delta \mu - \tan \theta)$$

and the Bagnold mean velocity associated to this value of the angle

$$u_0 = \frac{2I_\theta}{5} \sqrt{gh_0} \frac{h_0}{d_q}$$

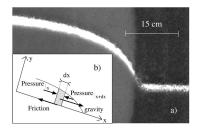


Figure 56: Couche mobile délimitée par h sur un fond rigide, bilan des forces (images issue de Pouliquen 99) et photo du front granulaire en mouvement.

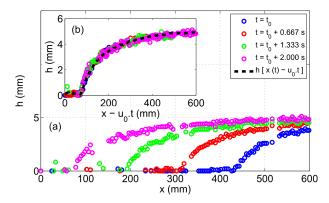


FIG. 3. (a) Granular front propagating at several times. (b) Superposition of the front profiles at different times by the change of variable  $\xi = x - u_0 t$ . The profiles obtained with spatial data are presented in filled circles, whereas the temporal front is shown with the dashed line after the variable change  $t \to x = u_0 t$ .  $\theta = 25.2^{\circ}$ ,  $h_{\infty} = 4.9$  mm and  $u_0 = 18$  cm/s.

Figure 57: Front granulaire en mouvement., vérification expériementale du fait que le front se déplace à vitesse constante, voir Saingier et al [41]

We want to see how the front connects a region with no flow, to a region with the established Bagnold profile. The exact solution for the front propagation, there exists a moving solution at constant velocity  $u_0$ :  $h(x-u_0t)$ , the mass conservation is satisfied

$$-u_0 \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial x} u h = 0$$

so that  $u = u_0$  the velocity is everywhere constant:

$$-u_0^2\frac{\partial}{\partial x}h+u_0^2\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial x}g\frac{h^2}{2}=-gh\frac{\partial}{\partial x}Z-\mu(I)gh\frac{u}{|u|}+0$$

we then have an equilibrium of the pressure terms and the friction terms in the SH equation, which gives

$$\frac{dh}{dx} = (\tan \theta - \mu_0) - \frac{\Delta \mu}{1 + I_0/I}$$

there exists a solution if the velocity is constant, so replacing  $I_0/I$  by its value, which gives  $I_0/I = (h/h_0)^{3/2} \frac{\Delta \mu - (\tan \theta - \mu_0)}{(\tan \theta - \mu_0)}$ . Note that  $I_0$  desappears. For the steady established avalanche, we have the value of I for the angle  $\theta$ :

$$I_{\theta} = I_0(\tan \theta - \mu_0)/(\mu_0 + \Delta \mu - \tan \theta)$$

and the Bagnold mean velocity

$$u_0 = \frac{2I_\theta}{5} \sqrt{gh_0} \frac{h_0}{d}$$

We want to see how the front connects a region with no flow, to a region with the established profile. The exact solution for the front propagation, comes from the equilibrium of the pressure terms and the friction terms in the SH equation, which gives

$$\frac{dh}{dx} = (\tan \theta - \mu_0) - \frac{\Delta \mu}{1 + I_0/I}$$

where the velocity is constant, replacing  $I_0/I$  by its value, which gives  $(h/h_0)^{3/2} \frac{\Delta \mu - (\tan \theta - \mu_0)}{(\tan \theta - \mu_0)}$ we can integrate it.

But, before we define  $H = h/H_0$ , and  $X = x(\tan \theta - \mu_0)/h_0$  and  $d = (\tan \theta - \mu_0)/h_0$  $\mu_0$ )/ $\Delta\mu$ , so we have

$$\frac{dH}{dX} = (1 - \frac{1}{d + H^{3/2}(1 - d)})$$

we can solve the inverse  $\frac{dX}{dH}$  which gives

$$X = \frac{(d-1)h - \frac{2}{3}\log\left(1 - \sqrt{h}\right) + \frac{1}{3}\log\left(h + \sqrt{h} + 1\right) - \frac{2\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{h} + 1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}}{d-1}$$

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/front\_poul\_ed.c

#### 5.8.2 Effondrement de tas sur sol horizontal

Dans cette section nous comparons la résolution numérique directe de Navier Stokes avec  $\mu(I)$  et la dynamique de contact. Les résultats sont dans l'article "The granular column collapse as a continuum: validity of a Navier-Stokes model with a  $\mu(I)$ -rheology" [27] http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/PDF/JFMcollapsePYLLSSP11.pdf

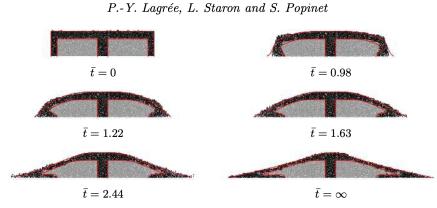


FIGURE 8. Comparison between the  $\mu(I)$  continuum model (red line) and contact dynamics simulations (grains) for an aspect ratio a=0.5 at different times (non-dimensionalized by  $\sqrt{H_0/g}$ ). The grains are colored in the initial heap, which allows one to track the displacement, see (Staron & Hinch 2005). The parameters of the  $\mu(I)$ -rheology are  $\mu_s=0.32, \ \Delta\mu=0.28$  and  $I_0=0.4$ . (color online).

Figure 58: Effondrement d'un tas en Navier Stokes avec la rhéologie  $\mu(I)$ 

Voir le code http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/granular\_column.

Dans la cas cohésif Gans et al

16

С

152

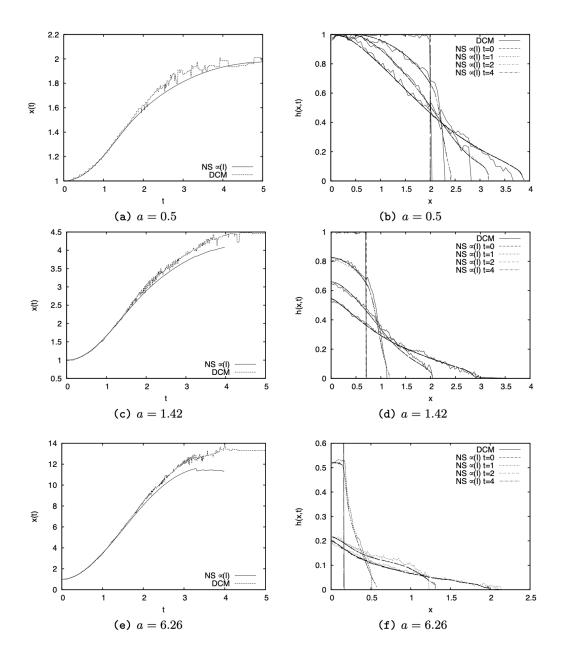


Figure 59: Effondrement d'un tas en Navier Stokes avec la rhéologie  $\mu(I)$ , trois rapports d'aspect

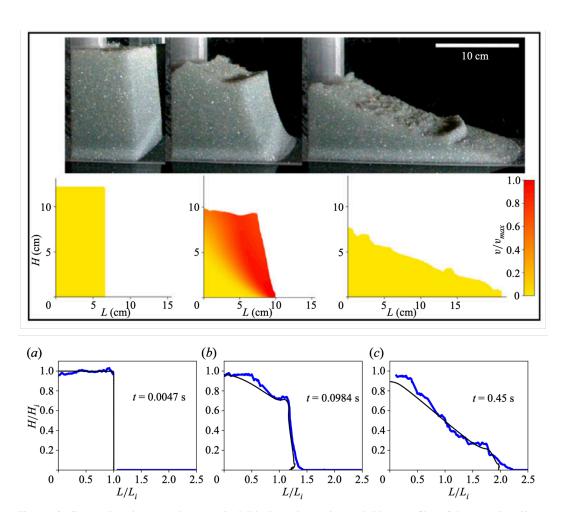


Figure 6. Comparison between the numerical (black) and experimental (blue) profiles of the granular pile at different times for  $H_i=8.9$  cm, a=1 and  $\ell_c=2.8$  mm.

Figure 60: Effondrement d'un tas en Navier Stokes avec la rhéologie  $\mu(I)$  cohésif, comparaisons expérience numérique

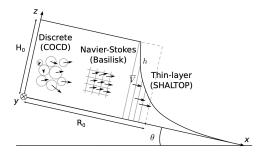


FIG. 1. Three different types of models to simulate granular dam break. Black arrows represent velocity vectors. In the discrete model (COCD) every disc has its own velocity, in the Navier-Stokes model (Basilisk) the velocity is defined in each cell while in the thin-layer model (SHALTOP), a depth-averaged velocity, parallel to the bed, is associated to each column. The dashed gray line represents the contour of the initial rectangular mass released from rest at t=0 s.

Figure 61: Effondrement d'un tas sur un plan incliné en Navier Stokes avec la rhéologie  $\mu(I)$ , en Saint-Venant, simulation discrète et expérience.

#### 5.8.3 Effondrement de tas sur sol incliné

L'image suivante est issue de l'article "Numerical simulations of granular dam break: Comparison between DEM, Navier-Stokes and thin-layer models" 2023 Phys. Rev. E 108, Martin et al. [30]. La conclusion de cet article est reproduite dans la suite de cette sous section.

La comparaison entre les modèles discrets (Convex Optimization Contact Dynamics COCD), Navier-Stokes (Navier StokesBasilisk) et à couche mince (SVSH SHALTOP) pour une simulation simple de rupture de barrage granulaire montre que les trois peuvent reproduire les profils de masse mesurés lors d'expériences en laboratoire avec différents niveaux de précision, à condition de faire un choix approprié des paramètres rhéologiques. La rhéologie  $\mu(I)$  est utilisée ici pour les deux modèles continus. Les paramètres rhéologiques sont maintenus constants pour chaque modèle lors de la simulation des effondrements granulaires à trois angles différents allant de l'horizontale à  $\theta=16^o$ . Même si les différences entre les modèles dépendent fortement des paramètres rhéologiques et des configurations de simulation, des conclusions générales peuvent être tirées :

• Le modèle à couche mince surestime l'accélération initiale et la vitesse par rapport aux autres modèles et aux expériences, bien que les dépôts finaux soient cohérents avec la simulation Navier-Stokes avec les mêmes valeurs de la rhéologie  $\mu(I)$  (à l'exception de la fraction volumique  $\phi$  qui n'a cependant qu'une influence limitée sur les résultats de la simulation) et avec les expériences. Ce résultat est

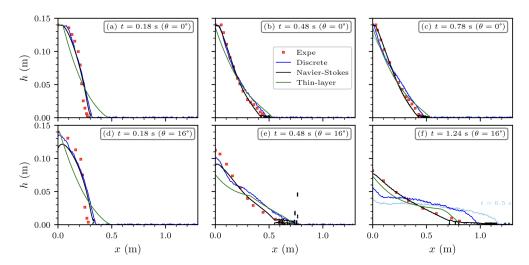


FIG. 3. Comparison between experiments and numerical simulations of the granular profiles during a dam break. We display the experimental results (red squares), discrete COCD simulations (blue line), Navier-Stokes Basilisk simulations (black line) and thin-layer SHALTOP simulations (green line). The initial aspect ratio is a=0.7, with a bed slope  $\theta=0^\circ$  (a-c) and  $\theta=16^\circ$  (d-f). The light blue line in (c,f) is the discrete simulation profile at t=6.5 s.

Figure 62: Effondrement d'un tas sur un plan incliné en Navier Stokes avec la rhéologie  $\mu(I)$ , en Saint-Venant, simulation discrète et expérience.  $\theta = 0$  et  $16^{\circ}$ .

important pour valider la pertinence de l'utilisation des modèles à couche mince pour l'évaluation opérationnelle des risques, et en particulier pour estimer la distribution finale de la masse, la distance de déplacement et l'impact dynamique des glissements de terrain potentiels. En effet, comme ils nécessitent moins de ressources informatiques que les modèles non intégrés en profondeur, les modèles à couche mince sont souvent utilisés par les praticiens et les experts.

- Les simulations discrètes Navier-Stokes et 2D ont les mêmes phases d'accélération et de décélération mais diffèrent dans la phase d'arrêt. Après l'arrêt de la frontière, plus de particules profondes sont encore en mouvement dans les simulations discrètes. Les simulations à couche mince sont globalement plus rapides que les deux autres dans les trois phases.
- Pour  $\theta = 16^{\circ}$ , la frontière de l'écoulement est difficilement gérée dans le code Navier-Stokes Basilisk avec l'apparition de bulles artificielles dont le nombre augmente à mesure que l'angle de la pente augmente.
- La contrainte normale basale mesurée à partir des modèles Navier-Stokes et à couche mince est qualitativement similaire car elle dépend principalement de l'épaisseur de l'écoulement, bien que des variations légèrement plus élevées soient

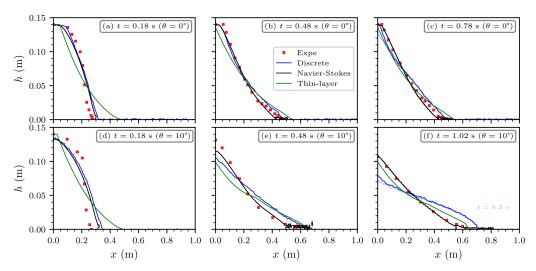


FIG. 12. Comparison between experiments and numerical simulations of the granular profiles during a dam break. We display the experimental results (red squares), discret COCD simulations (blue line), Navier-Stokes Basilisk simulations (black line) and thin-layer SHALTOP simulations (green line). The initial aspect ratio is a=0.7, with a bed slope  $\theta=10^\circ$  (a-c), and  $\theta=10^\circ$  (d-f). The light blue line in (c,f) is the discrete simulation profile at t=6.5 s. At t=1.02 s in (f), the three codes are at rest.

Figure 63: Effondement d'un tas sur un plan incliné en Navier Stokes avec la rhéologie  $\mu(I)$ , en Saint-Venant, simulation discrète et expérience.  $\theta = 0$  et  $10^o$ .

simulées avec le modèle Navier-Stokes, ce qui peut être dû à des effets non-hydrostatiques. La contrainte basale résultant du modèle discret est beaucoup plus complexe, avec d'importantes fluctuations spatiales et temporelles à des fréquences beaucoup plus élevées, liées au mouvement à l'échelle des grains.

Un point clé est que les différences entre les modèles sont plus visibles à des angles de pente plus élevés. De plus, les caractéristiques de la contrainte basale et de la phase d'arrêt semblent être beaucoup plus discriminantes pour les modèles et la rhéologie que les profils de masse pendant l'effondrement. Cela suggère fortement d'utiliser ces quantités et de prendre en compte la configuration des écoulements granulaires sur des lits inclinés pour évaluer les performances et les limites des modèles d'écoulement granulaire et des lois rhéologiques ou pour calibrer les modèles. Ceci est particulièrement important pour la modélisation des écoulements géophysiques à l'échelle du terrain, lorsque les dynamiques simulées sont comparées à des enregistrements sismiques à haute et basse fréquence qui nous donnent une mesure directe de la contrainte basale appliquée par le glissement de terrain au sol.

#### 6 Conclusion

Au fil de ces pages, nous avons d'abord compris que pour appréhender un écoulement il faut l'avoir observé dans la nature et l'avoir reproduit au laboratoire de manière simplifiée. De cette observation sur maquette (ou "modèle expérimental") on peut poser de premières hypothèses qui servent à simplifier les équations du mouvement (après adimensionalisation). C'est la "modélisation théorique". Les équations simplifiées (ici généralement en couche mince) peuvent être résolues numériquement (d'où les nombreux exemples numériques proposés, "modélisation numérique").

Les trois modélisations se répondent et dialoguent. Le fin du fin consiste à manier et marier les trois, cette expertise complète n'est quasi pas possible à l'échelle humaine, mais peut l'être à l'échelle d'une équipe de personnes.

Le cas de l'effondrement d'un fluide visqueux sur un fond plat a été examiné plus particulièrement (effondrement de Huppert [23], premier problème de Huppert). Le Ilthéorème a donné de premières informations, mais il a fallu ajouter un peu de mécanique, en disant que la pression dépend de la hauteur pour obtenir l'étalement en fonction du temps est en puissance 1/5. Pour obtenir l'exact préfacteur, il a fallu ensuite analyser les équations de Navier Stokes en supposant que la couche est mince et l'écoulement lent (hypothèses qui servent à simplifier les équations du mouvement). On a ainsi obtenu l'équation (33), après ces étapes de "modélisation théorique". Nous avons montré que cette équation a une solution autosemblable. Le calcul complet analytique de cette solution nous a donné l'exact préfacteur de la loi d'étalement en fonction du temps en puissance 1/5.

Nous avons ensuite vu d'autres cas utilisant la même analyse (pente forte (second problème de Huppert), front).

Ayant bien assimilé les cas visqueux  $(\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y})$  nous avons ensuite examiné le cas de fluides non newtoniens. Le plus pertinent pour les écoulements de boue ou de débris est le fluide de Bingham  $(\tau = \tau_0 + \eta \frac{\partial u}{\partial y})$ , c'est un fluide à seuil, le fluide coule que si la contrainte dépasse le seuil  $\tau_0$ . L'étalement peut donc s'arrêter. Finalement nous présentons le fluide granulaire  $(\tau = \mu p)$  qui est le modèle actuel de fluide décrivant les écoulements de cailloux ou de roches.

Comme suggéré dans l'introduction, de nombreux écoulements souvent catastrophiques de fluides complexes se produisent dans la nature. L'intérêt de ces problèmes est donc flagrant. Le dérèglement climatique n'est pas étranger à la génération de ces phénomènes. Ce que nous venons de voir sont les simplifications de base qui sont celles discutées et utilisées depuis le début du 20ème siècle, avec

des méthodes numériques de ces dix dernières années. Il y a encore beaucoup de travail pour mieux comprendre ces écoulements et pouvoir réellement simuler et prévoir ces écoulements dans le cadre de l'aménagement du territoire ou de la lutte contre les effets du réchauffement planétaire global...

#### 7 Annexe: Codes en Basilisk

#### 7.1 Tas visqueux sur fond plat

Résolution directe de l'équation d'évolution:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse\_noSV.c

Cas en Saint-Venant:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse.c

Cas en Navier Stokes:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/column\_SCC.c

ou plus simple

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/column\_viscous.c

#### 7.2 Tas visqueux sur fond incliné

Cas résolution en Saint-Venant du second problème de Huppert:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscolsqrt.c

Résolution directe de l'équation d'évolution du second problème de Huppert:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapse\_noSV.c

Cas en Saint-Venant Multicouche:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous\_collapsesqrt\_ML.c

Cas en Navier Stokes:

à faire

#### 7.3 Cas avalanche semi infinie visqueuse sur fond incliné

Cas en Saint-Venant:

à faire.

#### 7.4 Ecoulement demi-Poiseuille en Bingham

Résolution directe de NS:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bingham\_simple.c

#### 7.5 Tas visqueux en loi de puissance sur fond plat (Glen)

Cas en hydrostatique Multilayer:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/glen\_collapse\_NH.c

#### 7.6 Tas fluide de Bingham sur fond plat

Cas en Navier Stokes:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/column\_SCC.c

#### 7.7 Tas fluide de Bingham sur fond incliné

Résolution directe de l'équation d'évolution:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bingham\_collapse\_noSV.c

#### 7.8 Tas fluide de Granulaire

plus tard... Cas en Navier Stokes:

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/granular\_column.c effondrement d'un tas en Saint-Venant

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/savagestaron.c

avancée du front en Saint-Venant

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/front\_poul\_ed.c

#### 8 Films

Devastating Avalanche accident caught on Camera in Italian Alps, https://www.youtube.com/watch?v=6JxmFHFGF2I

#### 9 Web

http://thual.perso.enseeiht.fr/xsee/ch5/allpdf/00main.pdf

http://lhe.epfl.ch/cours/bachelor/slides/chapitre2.pdf

#### References

- [1] C. Ancey, N. Andreini, G. Epely-Chauvin "Viscoplastic dambreak waves: Review of simple computational approaches and comparison with experiments" Advances in Water Resources 48 (2012) 79–91
- [2] Bruno Andreotti , Yoël Forterre , Olivier Pouliquen "Les milieux granulaires Entre fluide et solide" EDP Sciences, CNRS Editions 2011
- [3] Andreotti B., Forterre Y., Pouliquen O. "Granular Media Between Fluid and Solid" Cambridge University Press (2013)
- [4] R.L. Batra, A. Kandasamy, Entrance flow of Herschel-Bulkley fluid in a duct Fluid Dynamics Research. 6 (1990) 43-50.
- [5] Bagnold, R.A. 1954, Experiments of gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 255, 49
- [6] Bagnold R. A. "The physics of blown sand and desert dunes" Dover 1954 red. 2005
- [7] Bagnold R. A. "Libyan Sands: Travel in a Dead World, Immel Publishing, 1993
- [8] Neil J. Balmforth Richard V. Craster, Alison C. Rust, Roberto Sassi "Viscoplastic flow over an inclined surface" J. Non-Newtonian Fluid Mech. 139 (2006) 103-127 http://www.math.ubc.ca/~njb/Research/revslump.pdf
- [9] B.M. Bates, C. Ancey T he dam-break problem for eroding viscoplastic fluids Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 243 (2017) 64-78 http://dx. doi.org/10.1016/j.jnnfm.2017.01.009
- [10] R B Bird Useful Non-Newtonian Models Vol. 8:13-34 (Volume publication date January 1976) https://doi.org/10.1146/annurev.fl.08.010176.000305
- [11] F. da Cruz, Écoulements de grains secs: frottement et blocage, Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées (2004). http://pastel.paristech.org/archive/946/)
- [12] Francesco De Vita, Pierre-Yves Lagrée, Sergio Chibbaro, Stéphane Popinet "Beyond Shallow Water: appraisal of a numerical approach to hydraulic jumps based upon the Boundary Layer Theory."

- Volume 79, January-February 2020, Pages 233-246 European Journal of Mechanics B/Fluids https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2019.09.010 http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/PDF/devita20.pdf
- [13] Perrine Etard "Epic Landslide captured in video in french Alps april 19, 2013" https://www.youtube.com/watch?v=SlGTirtRP4c https://www.spi0n.com/avalanches-de-printemps/
- [14] P. Freydier, G. Chambon, M. Naaim, Internal dynamics of a free-surface viscoplastic flow down an inclined channel International Journal of Erosion Control Engineering Vol 9, No. 3, 2016.
- [15] P. Freydier, G. Chambon, M. Naaim, Expérimental characterization of velocity fields within the front os viscoplastic surges down an incline J. Non-Newtonian Fluid Mech. 240 (2017) 56-69.
- [16] GDR MiDi (2004) "On dense granular flows" Eur. Phys. J. E 14, 341–365
- [17] H. P. GREENSPAN On the motion of a small viscous droplet that wets a surface, J. Pluid Mech. (1978), vol. 84, part 1 , p p . 125-143 https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/S0022112078000075
- [18] Glowinski Wachs "On the Numerical Simulation of Viscoplastic Fluid Flow" Numerical Methods for Non-Newtonian Fluids 2011, HNAVol16\_Chap6\_ freeCopyFromElsevier.pdf
- [19] Paul Germain, "Mécanique Tome I et II, Ellipse" 1986
- [20] R.R. Huilgol, Z. You, Application of the augmented Lagrangian method to steady pipe flows of Bingham, Casson and Herschel-Bulkley fluids J. Non-Newtonian Fluid Mech. 128, (2005) 126-143.
- [21] X. Huang & M. H. Garcia,1997, Asymmptotic solution for Bingham debris flows, Debris-flow Hazards and Mitigation, ASCE Proc. pp.561-575. https://core.ac.uk/download/pdf/1323618.pdf
- [22] Huppert et al 1979 "on lava dome growth, with application to the 1979 lava extrusion of the Soufrière of St. Vincent", http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper48.pdf
- [23] Huppert "The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface" J . Fluid Mech. (1982), vol. 121, p p . 43-58
  - http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper47.pdf

- [24] Huppert "Gravity currents: a personal perspective" J. Fluid Mech. (2006), vol. 554, pp. 299-3222006 Cambridge University Press 299 doi:10.1017/S002211200600930X HuppertPaper193.pdf
- [25] Huppert "Flow and instability of a viscous current along a slope" Nature volume 30 1982 p427 http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper49.pdf
- [26] A.J. Hogg, G.P. Matson Slumps of viscoplastic fluids on slopes J. Non-Newtonian Fluid Mech. 158 (2009) 101-112 http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.555. 4184&rep=rep1&type=pdf
- [27] P.-Y. Lagrée L. Staron S. Popinet (2011): "The granular column collapse as a continuum: validity of a Navier-Stokes model with a  $\mu(I)$ -rheology" Journal of Fluid Mechanics, pp1-31, doi:10.1017/jfm.2011.335
- [28] K. Liu C. Mei "Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane" Fluid Mech. (1989), vol. 207. p p. 505-529

  https://www.researchgate.net/profile/Ko\_Fei\_Liu/publication/
  231931979\_Slow\_spreading\_of\_a\_sheet\_of\_Bingham\_fluid\_on\_an\_
  inclined\_plane/links/56f79b2708ae81582bf2ff88.pdf
- [29] https://imagej.nih.gov/ij/
- [30] Hugo A. Martin, Marc Peruzzetto, Sylvain Viroulet, Mangeney, A., Pierre-Yves Lagrée Popinet, S., Maury, B., Lefebvre-Lepot, A., Maday, Y., Bouchut, F, "Numerical simulations of granular dam break: Comparison between DEM, Navier-Stokes and thin-layer models" Phys. Rev. E 108, 054902 Published 6 November 2023 doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevE.108.054902 http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/PDF/martin\_2023\_final.pdf
- [31] Macosko 1994 Advances in Interfacial Engineering Rheology principles, measurements, and applications-Wiley-VCH
- [32] G.P. Matson, A.J. Hogg "Two-dimensional dam break flows of Herschel-Bulkley fluids: The approach to the arrested state" J. Non-Newtonian Fluid Mech. 142 (2007) 79-94 https://people.maths.bris.ac.uk/~maajh/PDFPapers/JNNFMdambreak.pdf
- [33] C. C. Mei, (1966), Nonlinear gravity waves in a thin sheet of viscous fluid, J. Math. & Phys. 45, 482-496.

- [34] Chiang C. Mei, "Lecture Notes on Fluid Dynamics" MIT 2007 Spring (1.63J/2.21J) http://web.mit.edu/1.63/www/Lec-notes/chap2\_slow/2-4spread-mud.pdf,
- [35] Patrick Oswald (2005) "Rhéophysique, Ou comment coule la matière" Belin
- [36] J.E. Plapp & J.P. Mitchell (1960) "A hydrodynamic theory of turbidity currents", J. of Geophysical research, Vol 65, n 3, pp 983- 992. J.E. Plapp & J.P. Mitchell (1960) "A hydrodynamic theory of turbidity currents", J. of Geophysical research, Vol 65, n3, pp 983- 992.
  - J. Akiyama & H. Stefan (1985) "Turbidity current with erosion & deposition", J. of Hydraulic Eng., Vol 111, No 12, pp 1473-1493.
  - J. Zeng & D. R. Lowe (1997)"Numerical simulation of turbidity current flow and sedimentation: I. theory", sedimentology Vol 44, pp 67-84.
- [37] F.A. Osorio, J.F. Steffe, Evaluaing Herschel-Bulkley fluids with the back extrusion (annular pumping) technique Rheol Acta. 30 (1991) 549-558.
- [38] Robertson https://ganymed.math.uni-heidelberg.de/ Oberwolfach-Seminar/Robertson\_NonNewtonianNotes.pdf
- [39] R. A. V. Robison and H. E. Huppert and M. G. Worster, 10.1017/s0022112009993119, J. Fluid Mech., 363–380, Dynamics of viscous grounding lines, 648, 2010
- [40] Savage, S. & Hutter, K. 1989 The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. J. Fluid Mech. 199, 177-215.
- [41] Guillaume Saingier, Stephanie Deboeuf, and P.-Y. Lagrée "On the front shape of an inertial granular flow down a rough incline". Physics of Fluids, vol 28, 053302 1-15 (2016); doi: 10.1063/1.4948401 http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/PDF/saingierdeboeuflagree16.pdf
- [42] H. Schlichting (1987): "Boundary layer theory", 7th ed Mc Graw Hill.
- [43] L Sédov Similitude  $\operatorname{Et}$ Dimensions En Mécanique MIR 1977, https://archive.org/details/ sedov-similitude-et-dimensions-en-mecanique-mir-1977/ https://ia804707.us.archive.org/3/items/ page/50/mode/2up sedov-similitude-et-dimensions-en-mecanique-mir-1977/S\unhbox\ voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\ global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\

egroup\spacefactor\accent@spacefactordov%20-%20Similitude% 20et%20dimensions%20en%20m\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@ spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@ spacefactorcanique%20-%20Mir%20-1977.pdf

- [44] P. Saramito, Complex fluids: modeling and algorithms Springer, 2016. ISBN 978-3-319-44362-1
- [45] L. Silbert, D. Erta's, G. Grest, T. Halsey, D. Levine, and S. Plimpton, Phys. Rev. E 64, 051302 (2001).
- [46] C. Trusdell (1974) THE MEANING OF VISCOMETRY IN FLUIDDYNAM-ICS Ann Review Fluid Mech version en cours: July 8, 2025
- La page ouèbe de ce texte http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/
- La dernière version (July 8, 2025)): http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/mainM2EMN.pdf

#### 9.1 Annexe: quelques artciles fundamentaux

Herbert Huppert https://fr.wikipedia.org/wiki/Herbert\_Huppert

Huppert "The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface" J . Fluid Mech. (1982), vol. 121, p p . 43-58

http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper47.pdf

Huppert "Flow and instability of a viscous current along a slope" Nature volume 30 1982 p427

http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper49.pdf

K. Liu C. Mei [28] https://www.researchgate.net/profile/Ko\_Fei\_Liu/publication/231931979\_Slow\_spreading\_of\_a\_sheet\_of\_Bingham\_fluid\_on\_an\_inclined\_plane/links/56f79b2708ae81582bf2ff88.pdf

Neil Balmforth, Richard Craster, Alison Rust Roberto Sassi https://personal.math.ubc.ca/~njb/Research/revslump.pdf

# a viscous current down a slope Flow and instability of

# Herbert E. Huppert

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Silver Street, Cambridge CB3 9EW, UK

as shown in Fig. 1a, b. A situation intermediate between these takes up a circular plan form as it spreads. This form is observed 1.2 to be stable to any small disturbances which are initiated mined by surface tension and is independent of the coefficient an expression for the wavelength of the front, which is deterwaves of ever increasing amplitude can be determined. I present and the depth of the flow before it breaks up into a series of independent of the cross-slope coordinate, the speed of advance constant slope. By following the motion, which is initially uniform in depth across a slope, released so as to flow down a two is now discussed. Consider a broad band of viscous fluid. One, two or more extended regions of fluid develop downslope, detergent on a slanted plate—a quite different plan form occurs. is released onto a sloping surface—for example, some liquid surface or to chance perturbations. Alternatively, if some fluid on the front due, for example, to irregularities in the horizontal If viscous fluid is released on a horizontal surface it rapidly

approximations of lubrication theory, the y-independent, down-slope momentum equation can be written as With the coordinate system depicted in Fig. 2 and use of the

$$0 = g \sin \alpha + \nu u_{zz}$$

Ξ

effects<sup>4</sup>, which are negligible<sup>1</sup> under the assumption that the Bond number  $B = \rho g l^2 / T \gg 1$ , where  $\rho$  is the fluid density, l a representative length scale of the current and T the surface the effects of which will be analysed below, and contact line tension. Use of the equation of continuity then leads to In deriving equation (1) we have neglected both surface tension,

continuity equation free surface h(x, t). To equation (2) must be added the global as the nonlinear partial differential equation for the unknown

 $h_t + (g \sin \alpha / \nu) h^2 h_x = 0$ 

3

$$\int_{0}^{x_{N}(t)} h(x,t) dx = A$$
 (3)

is the initial cross-sectional area. The particular solution of where  $x_N(t)$  is the value of x at the front of the current and A

equations (2) and (3) is sought in the range  $0 \le x \le x_N(t)$ . Equation (2) shows that h is constant along characteristics

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (g\sin\alpha/\nu)h^2\tag{4}$$

is given Thus if initially h = f(x), say, the equation of the characteristics

where  $x_0$  is the initial value of the characteristic. The solution  $x = x_0 + (g \sin \alpha / \nu) f^2(x_0) t$ 3

of equation (2) is thus

$$\rightarrow (\nu/g \sin \alpha)^{1/2} x^{1/2} t^{-1/2} \qquad (x \gg x_0)$$
 (1)

independent of the initial conditions. When combined with equation (3), in order to evaluate the length of the current, equation (6b) proves that some time after the initiation of the current, no matter what the initial shape, the solution takes the

$$h = (\nu/g \sin \alpha)^{1/2} x^{1/2} t^{-1/2}$$

$$0 \le x \le x_N = (9A^2 g \sin \alpha/4\nu)^{1/3} t^{1/3}$$
(7)

the truncated profile expressed by equation (7). ing the effects of surface tension. This will be done below after predicted current ends abruptly at  $x = x_N$  with  $h = h_N(t) =$ i discussion of an experimental investigation of the validity of similarity solution of equations (2) and (3). The profile of the Expressed alternatively, equation (7) represents the unique  $..5A/x_N$  there. The profile can be smoothed off at  $x_N$  by includ-

Three different fluids, whose physical properties are listed in Table 1, were used. After the fluid behind the gate had been of the tray and fluid poured into the space behind the gate. Perspex wall 5 cm high to make a tray which was firmly attached to a rigid, flat board. Before each experiment the board was slope A removable Perspex gate was fitted 5.0 cm from the back edge two sides of length 82 cm emanated at right angles. The remainthe gate was raised and the fluid proceeded to pour down the left a sufficiently long time that it had become quite stationary, tilted by raising the 101.7-cm long side by the required amount. ing two sides were 60 cm. The sheet was surrounded by a sheet of Perspex. The longest side was 101.7 cm and from it Some 30 experiments were conducted using a pentagonal

slope coordinate except near the walls where viscous drag retarded the flow. This form of motion is clearly evident in Fig. 1c. Observations of the length of the current as a function of contact line effects in predicting the temporal development of agreement justifies the neglect of both surface tension and can be seen that the agreement between the experimental time were taken and some typical results plotted in Fig. 3. It the two-dimensional current observations and the theoretical prediction (7) is good. The At first the motion was virtually independent of the cross-

to the slope to extremely pointed minima. The glycerine developed the form shown in Fig. 1g. This was also periodic, oils developed the form shown in Fig. 1f. This consisted of a periodic, triangular front with tightly rounded maxima. The broad minima again connected by extremely straight portions, but in this case though with much less tightly rounded maxima. These were maxima were connected by very straight portions at an angle flow front was different for the two fluids used. Both silicone increased in time as the maxima (points furthest down the slope) travelled faster than the minima, as seen in Fig. 1e. The time, the flow front seemed spontaneously to develop a series wavelength remained unaltered. The long-time shape of the the slope, as seen in Fig. 1d. The amplitude of the waves of small amplitude waves of fairly constant wavelength across they were almost directly down slope and connected to very After the two-dimensional motion had continued for some

	Table
	_
	The f
	luids
	used,
	The fluids used, their
	viscosity
	and
	and surface tensi
ĺ	tension

	Viscosity	Surface tension
1	at 17°C	at 17°C
Fluid	(cm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	(dyn cm <sup>-1</sup> )
Silicone oil MS200/100	1.15	20.6
Silicone oil MS200/1000	12.8	22.0
Glycerine	9.8	60.2

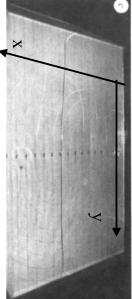


Fig .1 flow of MS200/1,000 oil down an inclined plane 12° 80s after release showing the broadly two-dimensional front



is independent of the coefficient of viscosity. Experiments with are almost equal, indicated that the wavelength of the instability the two fluids of comparable viscosity vet different surface differ by an order of magnitude, although their surface tensions Experiments with silicone oils whose coefficients of viscosity

Nature Vol. 300 2 December 1982

Letters 1

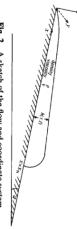


Fig. 2 A sketch of the flow and coordinate system.

the initial cross-sectional area A. of 10 indicated that the wavelength is weakly dependent on tensions indicated that the wavelength is a function of the surface tension. Finally, observations taken during experiments using the same fluid but with amounts differing by up to a factor

surface tension T leads to determined. The addition to equation (2) of the terms due to tip onto the main flow given by equation (7), can be easily determined by including surface tension and by matching the The form of the quasi-steady, two-dimensional tip, which is

$$h_t + (g \sin \alpha / \nu) h^2 h_x - 1/3 (T/\rho \nu) h^3 h_{xxxx} = 0$$
 (8)

terms of equation (8), the solution to which can be written as In the tip the dominant balance is between the second and third

$$h = h_N(t)H(\xi)$$
  $\xi = (\rho g \sin \alpha / T h_N)^{1/3} (x_N - x)$  (9)

where  $H(\xi)$  satisfies

$$H^3H'''+H^3=1 (10)$$

$$H \to \left(\frac{16}{15}\right)^{1/4} \xi^{3/4} \quad (\xi \to 0)$$
 (11)

$$\bullet 1 \qquad (\xi \to \infty) \tag{12}$$

The length scale of the tip is thus given by  $(Th_N/\rho g \sin \alpha)^{1/3}$ 

## The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface

#### By HERBERT E. HUPPERT

2.2. Axisymmetric currents

The radial spreading of an axisymmetric current can be analysed in a similar manner to the spreading of a two-dimensional current. With a co-ordinate system as in figure 1 except that the radial co-ordinate r replaces x, the velocity profile in the current is

$$u(r, z, t) = -\frac{1}{2} \frac{g'}{n} \frac{\partial h}{\partial r} z(2h - z). \tag{2.19}$$

The equation of continuity on a vertical sheet of radius r is

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \int_0^h u \, dz \right) = 0. \tag{2.20}$$

Substituting (2.19) into (2.20), we obtain

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{g'}{\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \frac{\partial h}{\partial r} \right) = 0, \tag{2.21}$$

to which must be added the global continuity equation

$$2\pi \int_0^{r_N(t)} rh(r,t) dr = Qt^{\alpha}. \tag{2.22}$$

A similarity solution of (2.21) and (2.22) can be obtained in terms of

$$\xi = (\frac{1}{3}g'Q^3/\nu)^{-\frac{1}{8}}rt^{-(3\alpha+1)/8}$$
(2.23)

and

$$h(r, t) = \xi_{\rm N}^{\frac{2}{3}} (3Q\nu/g')^{\frac{1}{4}} t^{(\alpha-1)/4} \psi(\xi/\xi_{\rm N}), \tag{2.24}$$

where  $\xi_{\rm N}$  is the value of  $\xi$  at  $r=r_{\rm N}(t)$ . Substituting (2.23) and (2.24) into (2.21) and (2.22), we find that  $\psi(z)$ , where  $z=\xi/\xi_{\rm N}$ , satisfies

$$(z\psi^3\psi')' + \frac{1}{8}(3\alpha + 1)z^2\psi' - \frac{1}{4}(\alpha - 1)z\psi = 0$$
 (2.25)

and that

$$\xi_{N} = \left[ 2\pi \int_{0}^{1} z \psi(z) \, dz \right]^{-\frac{3}{8}}.$$
 (2.26)

About z = 1, the solution is

$$\psi(z) = \left[\frac{3}{8}(3\alpha+1)\right]^{\frac{1}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\left[1-\frac{1}{3(3\alpha+1)}(1-z)+O(1-z)^{2}\right],\tag{2.27}$$

which is used as a starting condition in determining the numerical solution of (2.25).

For  $\alpha = 0$  the following analytical solution can be obtained (Pattle, 1959):

$$\psi(z) = \left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{3}} (1 - z^2)^{\frac{1}{3}},\tag{2.28}$$

$$\xi_{\rm N} = (2^{10}/3^4\pi^3)^{\frac{1}{6}} = 0.894\dots$$
 (2.29)

Solutions for  $\alpha=0$ , 1 and 2 are presented in figure 4 along with the first term in the expansion about z=1 as given in (2.27). Note that the exact solutions are singular at the origin unless  $\alpha=0$ , reflecting the fact that fluid is being introduced at a non-zero rate at r=0. Except in the vicinity of the origin the approximate solutions are seen to agree well with the exact ones. Figure 3 presents a graph of  $\xi_N$  as a function of  $\alpha$ , and the radial extent of the current is given by

$$R \equiv r_{\rm N}(t) = \xi_{\rm N}(\frac{1}{3}g'Q^3/\nu)^{\frac{1}{8}}t^{(3\alpha+1)/8}.$$
 (2.30)

# Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane

By KO FEI LIU AND CHIANG C. MEI J. Fluid Mech. (1989), vol. 207, pp. 505-529

2. Shallow-water approximation Printed in Great Britain

Consider a single layer of fluid flowing down a plane inclined clockwise at the angle  $\theta$  with respect to the horizon (see figure 1). Let the x-axis coincide with the plane bed and be directed downward. The free surface is designated as z = h(x, t). The characteristic lengthscale along the bed is assumed to be so much greater than the fluid depth that the pressure within is hydrostatic, i.e.

$$p = \rho g(h-z)\cos\theta + P(x,t), \tag{2.1}$$

where P(x,t) denotes the externally applied pressure, and the velocity is essentially in the x-direction. i.e.  $u \gg v$ . Throughout the entire fluid layer the balance of longitudinal momentum requires

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad 0 \leqslant z \leqslant h$$
 (2.2)

so that the stress increases linearly with depth,

$$\tau = -(h-z) \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \cos \theta \left( \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]. \tag{2.3}$$

At the bed, z = 0, the stress is

$$\tau_{\rm b} = -h \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \cos \theta \left( \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right].$$
(2.4)

Clearly  $|\tau_{\rm b}|$  must exceed  $\tau_{\rm 0}$  for fluid to move. In particular, the fluid moves  $\begin{pmatrix} {
m downward} \\ {
m upward} \end{pmatrix}$  if

$$\pm \frac{\tau_0}{h} \le -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \cos \theta \left( \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right). \tag{2.5}$$

Whenever  $|\tau_{\rm b}| < \tau_{\rm 0}$ , or

$$\tau_0 > h \left[ -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \cos \theta \left( \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] > -\tau_0$$
(2.6)

the mud does not move at all. When  $\tau_{\rm b}=\tau_{\rm 0}$  (or  $-\tau_{\rm 0}$ ) the mud is at the threshold of downward (or upward) flow.

When (2.5) is satisfied there is a yield surface at  $z = h_0 < h$  where  $|\tau| = \tau_0$ . Below the yield surface,  $0 < z < h_0$ , there is shearing. Equation (2.2) reads

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
 (2.7)

with the conditions

$$u = 0, \quad z = 0 \tag{2.8}$$

and

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad z = h_0. \tag{2.9}$$

It follows that

$$u = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \cos \theta \left( \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] (\frac{1}{2} z^2 - h_0 z), \quad 0 \leqslant z \leqslant h_0.$$
 (2.10)

Above the yield surface there is a layer of plug flow within which  $u=u_{\rm p}$  is independent of z. Matching  $u_{\rm p}$  with (2.10) at  $z=h_0$  we get

$$u_{\rm p} = -\frac{h_0^2}{2\mu} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \cos \theta \left( \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right], \quad h_0 \leqslant z \leqslant h. \tag{2.11}$$

On the yield surface,  $\tau = \pm \tau_0$ . It follows from (2.3) and (2.10) that

$$\tau_{0}\operatorname{sgn} u = -(h - h_{0}) \left[ \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \cos \theta \left( \tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]. \tag{2.12}$$

www.elsevier.com/locate/jnnfm

### Viscoplastic flow over an inclined surface<sup>☆</sup>

Neil J. Balmforth a,c,\*, Richard V. Craster b, Alison C. Rust c, Roberto Sassi d,1

<sup>a</sup> Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, Canada
 <sup>b</sup> Department of Mathematics, Imperial College London SW7 2AZ, UK
 <sup>c</sup> Department of Earth and Ocean Science, University of British Columbia, Vancouver, Canada
 <sup>d</sup> Dipartimento di Tecnologie dell'Informazione, Universitá di Milano, Crema, Italy
 Received 15 March 2006; received in revised form 10 July 2006; accepted 13 July 2006

#### Abstract

We review viscoplastic flow over inclined surfaces, focusing on constant-flux extrusions from small vents and the slumping of a fixed volume of material. Lubrication theory is used for shallow and slow flows to reduce the governing equations to a nonlinear diffusion-type equation for the local fluid depth; this model is used as the basis for exploration of the problem. Theory is compared to experiments. A number of complications and additional physical effects are discussed that enrich real situations.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Viscoplastic fluids; Similarity solutions; Yield stress

N.J. Balmforth et al. / J. Non-Newtonian Fluid Mech. 139 (2006) 103-127

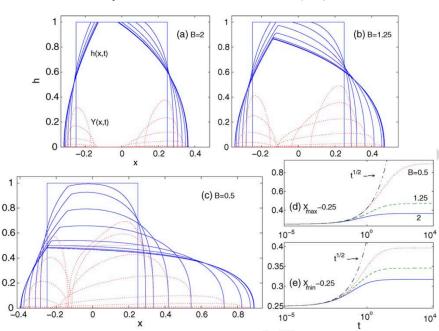


Fig. 2. Numerical solutions showing the slump of a two-dimensional block of fluid on an incline. Snapshots of h (solid lines) and Y (dotted lines) are shown for (a) B=2, (b) B=1.25 and (c) B=0.5 (the snapshots are at t=0, 0.0625, 0.25, 1, 4, 100, 400, 2500,  $10^4$ ). In panels (d) and (e), we show time series of the downstream and upstream fluid edges,  $X_{\text{max}}$  and  $X_{\text{min}}$ , respectively. Also indicated is a  $\sqrt{t}$  dependence that fits the early part of the data.

107

#### 9.2 Annexe: Onde cinématique

#### 9.2.1 cas général

On résout le problème d'onde cinématique

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$
, avec  $Q = \beta h^n$ 

avec une distribution de hauteur initiale.

$$\int_{x_0}^{x_f} h \, dx = V_0,\tag{94}$$

Cas n=1, le signal est convecté à la vitesse  $\beta$  sans être déformé,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$
, avec  $Q = \beta h$ 

la solution est simplement  $h(x,t) = h(x - \beta t, t = 0)$ 

Si  $n \neq 1$ , la solution change...

On pose  $x = L\bar{x}$ ,  $h = h_0\bar{h}$  avec  $h_0L = V_0$ , et  $t = \tau\bar{t}$  avec  $\tau = L/(\beta h_0^{n-1})$ , donc:

$$x = (V_0/h_0)\bar{x}, \ h = h_0\bar{h}, \ t = (V_0/(\beta h_0^n))\bar{t}$$

Les équations sans dimension sont de la forme

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{h}^n) = 0$$
 avec la donnée de  $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t} = 0)$  telle que  $\int \bar{h}(\bar{x}, \bar{t} = 0) d\bar{x} = 1$ 

on peut trouver une solution autosemblable, par les transformations:

$$\bar{h} = h^* \hat{h}, \quad \bar{t} = t^* \hat{t}, \quad \bar{x} = x^* \hat{x}.$$

qui doivent laisser les équations invariantes, on voit que  $x^*/t^* = h^{*n-1}$  et  $x^*h^* = 1$  donc  $h^* = t^{*-1/n}$  et  $x^* = t^{*1/n}$  laissent les équations invariantes. Donc  $\forall t^*$  la solution sous forme implicite est

$$\mathcal{F}_1(\hat{x}t^{*1/n}, \hat{t}t^*, \hat{h}t^{*-1/n}) = 0, \text{ donc } \mathcal{F}_2(\hat{x}\hat{t}^{-1/n}, \hat{t}t^*, \hat{h}\hat{t}^{1/n}) = 0$$

on en déduit, puisque c'est vrai  $\forall t^*$  que  $\eta = \hat{x}\hat{t}^{-1/n} = \bar{x}\bar{t}^{-1/n}$  est la variable de similitude dont dépend  $\hat{h}\hat{t}^{1/n} = \bar{h}\bar{t}^{1/n} = \mathcal{H}(\eta)$ . La solution est de la forme:

$$\bar{h} = \bar{t}^{-1/n} \mathcal{H}(\eta), \quad \text{avec} \quad \eta = \bar{x} \bar{t}^{-1/n},$$
 (95)

Substituons cette forme, les dérivées de h (on remarque que  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{n}\frac{\eta}{t}$ ) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{n} t^{-\frac{(1+n)}{n}} \left( \mathcal{H} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathcal{H}) \right) = -\frac{1}{n} t^{-\frac{(1+n)}{n}} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \mathcal{H}) \right), \tag{96a}$$

$$\frac{\partial \bar{h}^n}{\partial \bar{x}} = \bar{t}^{-\frac{(1+n)}{n}} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} (\mathcal{H}^n) \right), \tag{96b}$$

On trouve que  $\frac{\eta}{n}\mathcal{H} = \mathcal{H}^n$ , (constante d'intégration nulle) donc

$$\mathcal{H}(\eta) = \left(\frac{\eta}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \text{ donc } \bar{h} = \bar{t}^{-1/n} \left(\frac{\bar{x}}{n\bar{t}^{1/n}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \text{ ou plus simplement } \bar{h} = \left(\frac{\bar{x}}{n\bar{t}}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$
(97)

or  $x=V_0/h_0\bar{x},\,h=h_0\bar{h}$  et  $t=V_0/(\beta h_0^n)\bar{t},$  la hauteur est donc

$$h = \left(\frac{x}{n\beta t}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

La position analytique du front se trouve en écrivant  $\int_0^{\bar{x}_f} \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} = 1$  donc

$$\bar{x}_f = (n-1)^{\frac{1-n}{n}} n\bar{t}^{\frac{1}{n}}.$$

En mettant les dimensions,

$$x_f = n(n-1)^{\frac{1}{n}-1} V_0^{\frac{n-1}{n}} (\beta t)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n-1} V_0\right)^{\frac{n-1}{n}} (\beta n t)^{\frac{1}{n}}.$$

La valeur maximale (obtenue pour  $x=x_f(t)$  distance maximale d'excursion (run-out) de la hauteur d'une onde cinématique (flood-wave approximation) pour l'évolution de la hauteur h(x,t) est

$$\bar{h}_{\text{max}} = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} \bar{t}^{-1/n}$$
, avec dimensions:  $h_{\text{max}} = \left(\frac{V_0/\beta}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} t^{-1/n}$ . (98)

remarquons

$$V_0 = (n-1)\beta h_{\max}^n t$$
 et que  $V_0 = \frac{n-1}{n} h_{\max} x_f$ .

On a bien sûr:

$$h/h_{\text{max}} = (x/x_f)^{1/(n-1)}$$

On rappelle la Relation de Hugoniot

$$-c[|h|] + [|\beta h^n|] = 0$$

qui s'écrit  $-ch_{\max} + \beta h_{\max}^n = 0$ , on en déduit

$$c = \frac{V_0/((n-1)t)}{(nV_0/(n-1)/x_f)} = \frac{1}{n} \frac{x_f}{t}$$

on vérifie que pour  $x_f \propto t^{1/n}$  on a bien

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{1}{n} \frac{x_f}{t}$$

#### 9.2.2 cas particuliers

L'équilibre général est  $0 = \rho g h \alpha - \tau_0$  qui donne Q.

Ecoulement laminaire, débit de Darcy

$$Q = \frac{Kh}{\mu} \rho g \alpha$$
 avec  $n = 1$  et  $\beta = \frac{K}{\mu} \rho g \alpha$  advection pure

Ecoulement turbulent, frottement de Chézy  $\tau_0 = \frac{c_f}{2} \rho(Q/h)^2$ 

$$Q = h\sqrt{\frac{2\alpha h}{c_f}}$$
, avec  $n = 3/2$  et  $\beta = \sqrt{\frac{2\alpha}{c_f}}$  donc  $1/(n-1) = 2$ 

Ecoulement turbulent, frottement de Manning  $\tau_0 = \rho g n_{GM}^2 Q^2/h^{7/3}$ 

$$Q=\frac{\sqrt{\alpha}}{n_{GM}}h^{5/3}$$
 avec  $n=5/3$  et  $\beta=\frac{\sqrt{\alpha}}{n_{GM}}\mathrm{donc}~1/(n-1)=3/2$ 

Ecoulement "Bürgers non visqueux"  $\partial_t h + h \partial_x h = 0$ 

$$Q = h/2$$
, avec  $n = 2$  et  $\beta = \frac{1}{2}$  donc  $1/(n-1) = 1$ 

Ecoulement granulaire, débit de Bagnold

$$Q = \frac{2}{5} I_{\alpha} \sqrt{\cos \alpha} \sqrt{gh} \frac{h^2}{d} \text{ avec } n = 5/2 \text{ et } \beta = \frac{2}{5} I_{\alpha} \sqrt{\cos \alpha} \sqrt{g} \frac{1}{d} \text{ donc } 1/(n-1) = 2/3$$

Ecoulement visqueux (second problème de Huppert), frottement laminaire  $\tau_0 = 3\mu Q/h^2$ , pente  $\alpha$ 

$$Q = g\alpha h^3/(3\nu)$$
, avec  $n = 3$  et  $\beta = \frac{g\alpha}{3\nu}$  donc  $1/(n-1) = 1/2$ 

les différents profils de  $h/h_{\text{max}}$  fonction de  $x/x_f$ , pour les cas Visqueux, Granulaire, Bürgers, Manning Chézy sont tracés sur la figure suivante ??.

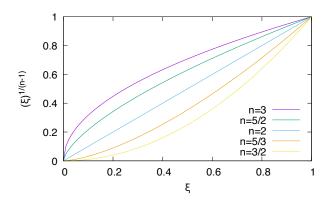


Figure 64: différents profils  $h/h_{\max}=\xi^{1/(n-1)}$  fonction de  $\xi=x/x_f$ , de bas en haut Visqueux, Granulaire, Bürgers, Manning Chézy

#### 9.3 Annexe: Pâte à Crêpe

Pour la pâte à crêpe, voir Roberto Zenit "Make a Pancake: Learn About Viscosity" ABSTRACT: http://meetings.aps.org/Meeting/DFD20/Session/L02.6 https://dropsu.sorbonne-universite.fr/s/AHdGtif7xSFcP3y

## Viscosity lab: viscous gravity current Make a pancake

- Measuring cup: change the volume
- A viscous liquid: change viscosity
- A pan
- · A smartphone



## Comparison Experiments against theory



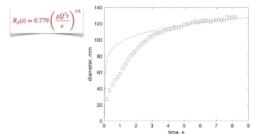




Figure 65: verser de la pâte à crêpe et observer la forme, captation de l'APS 2020 Zenit "Make a Pancake: Learn About Viscosity"

voir aussi E. Boujo & M. Sellier "Pancake making and surface coating: optimal control of a gravity-driven liquid film" Physical Review Fluids (IF2.537), Pub Date : 2019-06-11, DOI: 10.1103/physrevfluids.4.064802

#### 9.4 Annexe: Actualité du Béton, Août 2018

On ajoute ici quelques mots sur le béton (" béton" est antinomique avec "nature", mais les équations sont les mêmes pour le béton liquide que pour des écoulements de débris...).

Un premier article du Monde et un second article https://www.lemonde.fr/
economie/article/2024/01/04/dans-l-industrie-la-tres-lente-decarbonation-du-ciment
6208998\_3234.html Le temps de lire cet article – soit environ quatre minutes –
quelque 45 600 mètres cubes de béton auront été coulés dans le monde. Selon
un décompte de la Fédération française du bâtiment, près de 190 mètres cubes
de béton sont en effet utilisés chaque seconde sur la planète, soit près de 6 milliards de mètres cubes par an. Ce qui en fait le matériau manufacturé le plus
manipulé sur la Terre et la deuxième substance la plus consommée, derrière l'eau
mais devant le pétrole. Ces chiffres vertigineux illustrent l'importance cruciale de
la décarbonation de la filière industrielle du ciment-béton pour envisager une baisse
réelle des émissions de gaz à effet de serre à l'échelle internationale. A elle seule,
elle représente de 7 % à 8 % des émissions mondiales de gaz à effet de serre. Et
la production ne cesse ...



Figure 66: Le Monde 29/08/19, à propos du vieillissement du béton et de la chute du pont de Gênes

Quelques images sur l'effondrement d'un tas de béton. Il s'agit du "slump" test ( slump chute/forte baisse/ effondrement... krach boursier)



Figure 67: De gauche à droite Test du cône d'Abrams (slump test), du camion au pâté final. photos PYL. Remerciements à la CEMEX.