

Écoulements souterrains

”Écoulements en milieux naturels” Cours M1 MU4MEF04

P.-Y. Lagrée
CNRS & Sorbonne Université, UMR 7190,
Institut Jean Le Rond d’Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France
pierre-yves.lagree@upmc.fr ; www.lmm.jussieu.fr/~lagree

30 juin 2025

Résumé

Ces notes rappellent les équations de base pour les écoulement souterrains. Les équations sont classiques et sont dans la bibliographie, par exemple Thual [14] ou de Marsily [9] ou Bear [1] et bien d’autres encore. On introduit les écoulements en milieu poreux gouvernés par la loi de Darcy. Les Notions d’aquifères et d’écoulements souterrains saturés et insaturés sont abordés. On indique l’équation de Richards pour l’imbibition. Enfin, une attention particulière est portée au cas en cas en couche mince de l’équation d’évolution des aquifères : l’équation de Dupuit-Boussinesq, elle est résolue dans les cas sans et avec pluie. Quelques exemples numériques sont proposés.

planning du cours MU4MEF04 2022-23 mercredi 18/01 au 22/02 de 8h30 à 10h30 en salle 56.66.111
http://master.spi.sorbonne-universite.fr/fr/mecanique-des-fluides/m1-mf2a/test_planning.html
cours, notes... <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/index.html>
<https://moodle-sciences-22.sorbonne-universite.fr/course/view.php?id=4487#section-0>

1 Introduction

1.1 Généralités

La compréhension des écoulements en milieu naturel est un enjeu majeur à différents égards. Le sujet est important car c’est un enjeu essentiellement humain : la majeure partie des humains vivent le long des fleuves, des côtes, au dessus des aquifères et ont besoin d’eau pour vivre. C’est une évidence, mais pas d’eau pas de vie. L’eau en sous sol est une part importante de la consommation humaine. C’est aussi un enjeu agro industriel (irrigation des sols, captage de l’eau par des puits, capter l’eau en profondeur, stoker l’eau, réseaux d’approvisionnement et d’assainissement...). C’est bien sûr un enjeu de première importance dans le cadre des conséquences du réchauffement planétaire global (dérèglement climatique) : moins d’eau, élévation du niveau de l’océan qui produit l’érosion de la côte (et rend salés les aquifères) et par la pluie du ruissellement qui produit l’érosion des sols.

C’est aussi un enjeu scientifique (modélisation, simplification pour la compréhension des phénomènes) qui va nous permettre de comprendre les mécanismes pour proposer des solutions, ou pas...

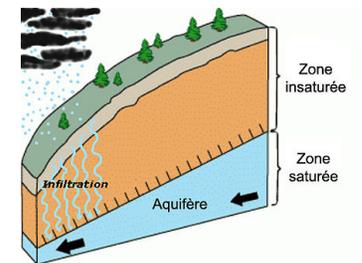


FIGURE 1 – ”Nappe phréatique”, une partie du cycle de l’eau, dessin sursimplifié, idéalisé de wikipedia

Dans l'étude des planètes autres que la terre, les enseignements que nous tirons de la Terre peuvent être extrapolés. Dans le cas de Mars, il est possible que l'eau se soit évaporée, mais il est aussi possible que l'eau se soit infiltrée et n'est jamais remontée (contrairement à la terre, où la remontée est aussi assurée par la tectonique des plaques) https://www.lemonde.fr/sciences/article/2021/03/17/les-paysages-de-mars-gardent-la-trace-d-un-passe-aquatique-mais-ou-est-passee-l-eau_6073512_1650684.html

Nous examinons dans ce chapitre non plus les écoulements à surface libre (vagues....<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEhoule.pdf> fleuves....<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf>) mais les écoulement souterrains.

La création de Méga Bassines ne sera pas discutée, ni la création plus subtile de d'aquifères artificiels https://www.lemonde.fr/planete/article/2022/04/23/dans-un-village-cevenol-une-nappe-phreatique-artificielle-pour-eviter-les-coupures-d-eau_6123374_3244.html.

Nous allons dans ce chapitre poser les équations de l'écoulement dans le sous-sols, le fait qu'il ne pleuve plus ou trop, n'est pas de notre champ d'analyse (mais celui des écoulements météorologiques) et sera une condition aux limites. La donnée de la pluviosité à la surface sera le flux d'eau qui traverse le sol poreux.

Les phénomènes sont sur de grandes distances, en kilomètres, le temps caractéristique de la pluie est d'une année. Pour ce qui est du temps de résidence, il faut savoir que les nappes profondes se renouvellent lentement. Il leur faut des centaines, voire des milliers d'années, selon la profondeur et la nature des terrains, par exemple dans la région de Bordeaux, l'eau met entre 10 000 et 20 000 ans pour se renouveler. En Bretagne, le temps est de l'ordre de cinq années voire moins. Voir le site <https://sigesbre.brgm.fr> qui fait le tour d'horizon des valeurs. Dans le cas d'aquifères karstiques le temps de résidence peut être encore plus court : de quelques jours à quelques semaines (vides souterrains et cavernes qui favorisent la circulation).

enfin il faut noter que ces aquifères lorsqu'ils affleurent créent les rivières.

Nous donnons ici simplement les clefs minimales pour l'ingénieur hydrologue. La discipline "hydrologie" est tout un art développé sur la pratique. Nous revisitons cette discipline de manière sommaire avec l'optique de la Mécanique des fluides générale.

1.2 Notions de base

1.2.1 Notion de milieu poreux

La première remarque importante est que le sol n'est pas imperméable en général. S'il est constitué de sable, c'est particulièrement évident, l'eau s'infiltré entre les grains et disparaît de la surface pour descendre... Le sable en tant qu'assemblée de grains de sable n'est pas imperméable, il est perméable. Les autres sols ont de même des propriétés de perméabilité plus ou moins fortes dépendant de la structure du sol, sable plus ou moins grossier, graviers, roches, argile... Il y a toujours de petites possibilités pour l'eau de s'écouler à travers. Ces milieux perméables sont appelés "milieux poreux". Ils ne sont pas "pleins" mais sont constitués de trous connectés, d'interstices... appelés "pores". On note φ la fraction de volume entre les grains dans le matériau poreux étudié. On l'appelle aussi la "porosité", φ varie de 1% à 40% suivant les sols (Schistes, Calcaire ~ 10 Sable 0.15 à .5 Argiles ~ 0.5 etc). La porosité d'un empilement compact de sphères parfaitement identiques est $1 - \pi\sqrt{2}/6 \sim 0.26$.

Dans la suite le sol sera considéré comme un milieu poreux. Mais nous supposons qu'il existe toujours des endroits plus denses non perméables qui vont finir par retenir l'eau.

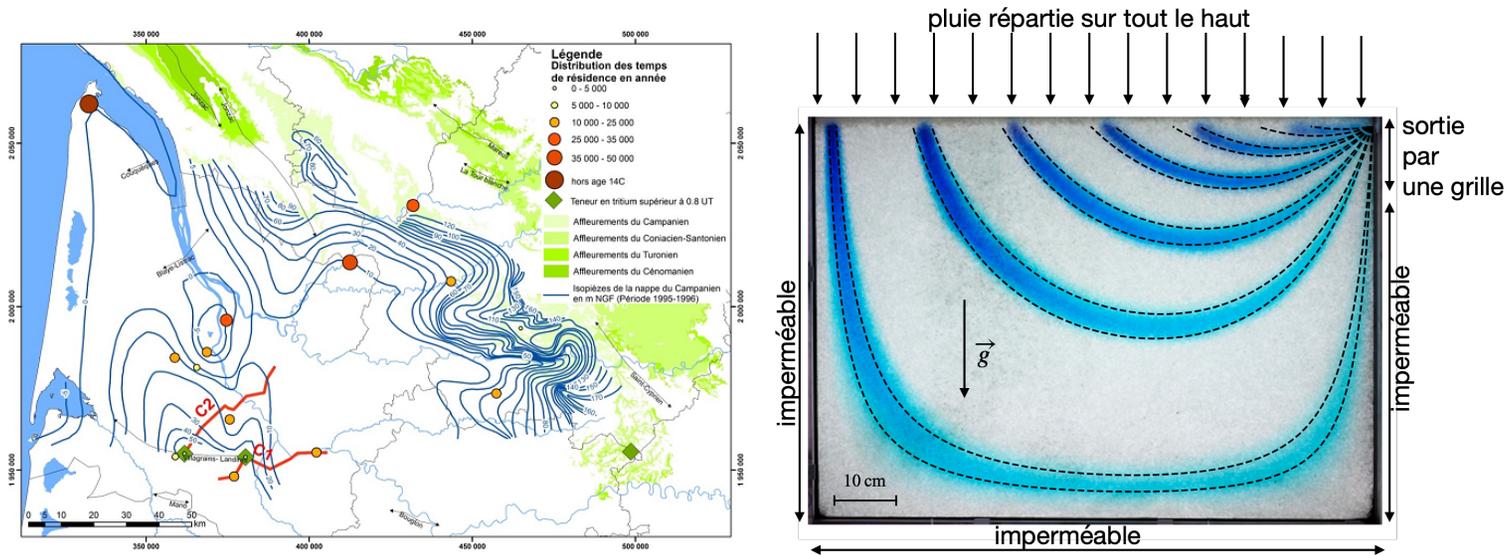
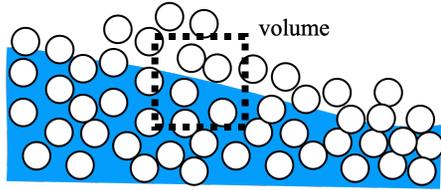


FIGURE 2 – images de <https://sigesaqi.brgm.fr/L-age-des-eaux-souterraines.html>, gauche : l'eau des nappes profondes situées sous la ville de Bordeaux (la hauteur de la carte est de 140km, on voit l'Océan à gauche, et la Gironde et le bassin d'Arcachon en bas) met entre 10 000 et 20 000 ans pour se renouveler. Droite : trajectoires dans un aquifère de laboratoire [7], vue de côté par la paroi de verre, la verticale est de haut en bas, la pluie tombe en haut, la sortie est toute petite dans le coin supérieur droit, le reste de la paroi de droite, celle du bas et celle de gauche sont imperméables. Le temps de résidence mesuré par le déplacement d'un traceur bleu dépend du rapport d'aspect a (hauteur sur longueur de la cuve), plus l'aquifère est profond, plus ce temps est long, ici environ 2 heures. Un comportement en $\sinh(\pi a)/(\pi a)$ y est proposé.

1.2.2 Notion de Saturation



L'eau ruisselant sur le sol finit toujours par rencontrer des surfaces délimitant des milieux poreux dans lesquels elle va s'infiltrer et le ruissellement va disparaître de la surface. L'eau est conservée, elle s'infiltré dans le sol et passe entre les interstices, par exemple si le matériau est du sable, on imagine bien l'eau passant autour des grains. Dans cette zone instaurée, on définit θ la teneur en eau volumétrique, elle correspond au fait que l'eau ne remplit pas tous les interstices disponibles, θ est la quantité d'eau contenue dans le matériau (*volume fraction saturation, volumetric water content, or moisture content* en anglais, *moisture=humidité*).

$$\theta = V_{\text{eau}}/V_{\text{total}} = \frac{\text{volume eau}}{\text{volume eau} + \text{volume air} + \text{volume materiau}}$$

La porosité φ est la fraction de volume accessible par le fluide dans le matériau, c'est dans ce domaine que le fluide pourrait être présent. On appelle degré de saturation $S = \theta/\varphi$. Dans un milieu sec $\theta = 0$, $S = 0$, s'il est complètement mouillé $\theta = \varphi$ et $S = 1$.

L'eau s'accumule lorsqu'elle rencontre finalement un milieu imperméable. Elle ne peut plus descendre, elle remplit tous les interstices : c'est ce qui forme un "aquifère" ou une "nappe phréatique libre". Les eaux souterraines peuvent être trouvées presque partout dans le sous-sol peu profond (voir image 11 de https://fr.wikipedia.org/wiki/Nappe_phr%C3%A9atique).

La pluviométrie en France nous donne des ordres de grandeur, sur 760mm d'eau tombant en moyenne, 450 s'évaporent, 300 ruissellent et 10 s'infiltrent, voir <http://step.ipgp.fr/images/e/e4/GE2008ch2.pdf> pour des ordres de grandeurs pratiques. Notons que les années deviennent de plus en plus sèches, on estime qu'en 2050 il y aura 10% de moins d'eau que vers 2020.

Sur la figure 3, un dessin représentant une vision commune schématique des écoulements souterrains, et à droite une expérience de laboratoire du même auteur (A. Guerin de l'IPGP) pour les modéliser mécaniquement. Le massif montagneux est modélisé par un empilement de billes de verre de taille connue. Le fond imperméable rocheux est remplacé par un fond rigide plat. Un tuyau supérieur percé tout du long fait couler goutte à goutte en haut par un tuyau percé une pluie qui s'infiltré dans le sol. On voit clairement l'eau accumulée au fond (vert plus sombre), le niveau de la "table" *water table* est incliné car à droite, il y a un mur imperméable, mais à gauche, il y a une grille qui retient les billes, et l'eau peut donc sortir (représentant l'alimentation d'une rivière, ou le fond d'un puits dans la réalité). L'eau qui sort est pesée, l'eau qui rentre par la pluie est aussi mesurée. Sur la figure de droite 2 on a le dispositif expérimental de V. Jules (Jules [7]) qui en est une variation. Dans cette nouvelle version on s'affranchit du caractère allongé en faisant une cuve dont les dimensions sont de même ordre de grandeur, un colorant disposé en patches à la surface est entraîné par la pluie et trace les lignes de courant bleu foncé. On voit le fluide sortir en haut à droite, par une petite grille de taille plus petite que la hauteur du dispositif.

On a par ces dispositifs expérimentaux accès à des quantités cachées dans le cas du sol. Voir la thèse de A. Guerin <http://adrienguerin.fr/papers/manuscrit.pdf> et celle de V. Jules https://u-paris.fr/theses/detail-dune-these/?id_these=4682 pour plus de détails.

Un point important pour la suite est la notion de saturation déjà évoquée avec θ . Le sous sol peut être divisé en deux régions : la zone saturée ou la "zone phréatique" (avec les "aquifères"), où tous les espaces disponibles du milieu poreux sont remplis d'eau, et la zone non saturée (également appelée "zone vadose"), où il y a sont encore des poches d'air qui contiennent de l'eau, mais qui peuvent être remplies avec plus d'eau.

Un milieu est dit "saturé" lorsque la pression de l'eau y est supérieure à la pression atmosphérique. La nappe phréatique est la surface où la pression est égale à la pression atmosphérique. On mesure toutes les pressions en prenant le niveau 0 à la pression atmosphérique, sur la nappe phréatique la pression est nulle $p = 0$. Les conditions saturées correspondent donc à $p > 0$. Des conditions non saturées se produisent au-dessus de la nappe phréatique où la pression est négative (pression inférieure à la pression atmosphérique) et l'eau qui remplit incomplètement les pores du matériau de l'aquifère est sous aspiration (pression négative $p < 0$). La teneur en eau dans la zone insaturée est maintenue par des forces d'adhérence de surface et elle s'élève au-dessus de la nappe phréatique (l'isobare à pression nulle $p = 0$) par capillarité pour saturer une petite zone au-dessus de la surface phréatique (la "frange capillaire") à pression inférieure à la pression atmosphérique.

Ces considérations sont particulièrement importantes à considérer à l'endroit où la nappe va affleurer au sol : c'est en effet ainsi que naissent les rivières. La source est l'endroit où affleure la nappe.

Sur la figure suivante extraite de la thèse de M Vuillet [19], on voit une réalisation expérimentale d'un aquifère réalisé avec des billes de verres. A gauche, on distingue bien la partie mouillée saturée, plus claire. A droite, on effectue un zoom sur l'endroit où la paroi affleure. Entre le point de "contact" visuel de la nappe avec la surface extérieure du massif et l'endroit où effectivement, l'eau commence à suinter (où la source apparaît, "spring"), il y a une différence de hauteur liée aux effets capillaires de

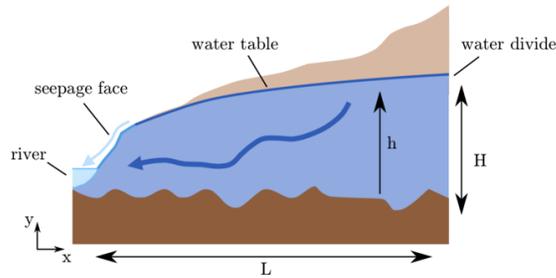


Figure 2.2: Two-dimensional groundwater flow towards a river, in a vertical section perpendicular to the river channel.

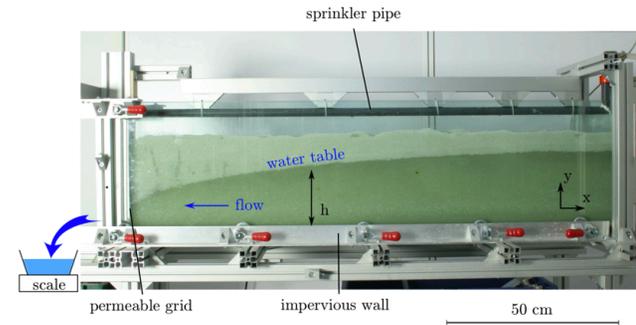


Figure 3.1: Experimental aquifer. The water table separates the unsaturated zone of porous material (light zone, above) from its saturated zone (darker zone, bottom). At the outlet, we collect water in a bucket weighed every second.

FIGURE 3 – images de <http://adrienguierin.fr/papers/manuscrit.pdf>, gauche l'eau s'infiltré par la pluie dans le sous sol poreux et s'accumule lorsqu'elle rencontre un sol imperméable. Une partie de l'eau suinte *seepage* le long du sol du massif. Cette eau qui suinte forme un rivièrre. Le niveau hydrostatique est appelé *water table*, la pression y est la pression atmosphérique extérieure, on dit aussi "nappe phréatique". L'eau emprisonnée est appelée Aquifère

retenue d'eau. En pratique, il ne s'agit que de quelques centimètres.



FIGURE 4 – images de la thèse de Marie Vuillet 2023 <http://XXXX/manuscrit.pdf>, gauche : eau infiltrée dans un massif poreux de billes de verre accumulée en bas sur le sol imperméable. Longueur environ 40cm, hauteur environ 12cm, billes de 1mm de diamètre. La partie mouillée saturée est plus claire que la partie sèche. Entre le point de "contact" visuel de la nappe avec la surface extérieure du massif et l'endroit où effectivement, une partie de l'eau suinte *seepage*, il se forme une source *spring*. A droite, on effectue un zoom sur l'endroit où la paroi affleure (taille environ 5 cm). il y a une différence de hauteur entre le contact et la source liée aux effets capillaires de retenue d'eau.

On introduira la hauteur de pression h qui est la pression exprimée en mètres, c'est $h = p/(\rho g)$. Attention, dans la description à la Saint-Venant des équations de Dupuit-Boussinesq, h sera l'épaisseur d'eau de l'aquifère (comme sur la figure 4 gauche). On note qu'un puits s'écrit avec un "s" à la fin mais pas Dupuit.

2 Loi de Darcy

2.1 Formulation de loi de Darcy

Partons de ce milieu imaginé plus haut constitué de trous et d'interstices répartis dans son ensemble. Ce milieu est saturé en eau, $\theta = 1$, toutes les pores sont remplies de fluide. On note φ la fraction de volume accessible par le fluide dans le matériau poreux étudié, c'est dans ce domaine que le fluide coule. On l'appelle aussi la "porosité", on note parfois s pour la porosité. La porosité φ varie de 1% pour le granite (le "granite" est une roche qui fait partie de celles qui sont l'essentiel de la croûte continentale de la planète, à ne pas confondre avec le "granit", matériau de construction, dont le granite fait partie) à 40 % pour des graviers. Du point de vue du solide, on parle de compacité $\phi = 1 - \varphi$. La densité passe de l'eau à celle du grain et la vitesse passe de 0 dans le grain à une valeur différente de 0 hors du grain. On va faire une moyenne sur une échelle plus grande que celle du grain, et on va considérer à présent que le milieu est moyenné,

En considérant le milieu moyenné, on pourra ainsi définir une vitesse et une pression en tout point de l'espace. La loi de Darcy relie la vitesse moyenne du fluide ("vitesse débitante", *seepage velocity*) au gradient de pression, c'est une relation locale, valable en tout point du milieu moyen idéalisé.

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p,$$

k en m^2 est la perméabilité, l'unité D, le Darcy, correspond à une vitesse de 1 cm/s sous un gradient de pression un gradient de pression d'une atmosphère par cm, comme la viscosité de l'eau est $10^{-3} Pa.s$ on a $1D = 10^{-12} m^2$

Pour du sable k est environ 1D, pour du granite du μD , du gravier 100D. Les pétroliers utilisent le le milidarcy comme unité pour les gisements de pétrole.

Pour un dispositif expérimental en billes de verre de 1mm, K est environ 1cm/s. Le tableau de la figure 5 extrait du livre de Bear donne des ordres de grandeur, comme 1cm/s est (à peu près!!) 1 m/Jour, pour du gravier gravier K varie de 1000 m/J à 1m/J, le sable fin 100 m/J à 0,1 m/J, l'argile encore moins...

Attention, on a supposé un milieu moyen isotrope, mais des fibres peuvent créer des directions privilégiées, donc pour un milieu anisotrope k est en fait un tenseur k_{ij} , par symétrie, il n'y a que 6 coefficients.

Pour que la relation de Darcy soit valable, il faut que l'écoulement soit relativement lent, le nombre de Reynolds fondé sur la taille des pores ou des grains doit être petit : $\rho |\vec{u}| \sqrt{k} / \mu = |\rho \frac{k^{3/2}}{\mu^2} \vec{\nabla} p| \ll 1$.

Bien entendu, dans un milieu inhomogène, k peut varier en plus suivant la position. Il peut varier au cours du temps sous l'action de contraintes mécaniques ou thermiques extérieures.

2.2 Loi de Darcy, autres notations et introduction de la "charge hydraulique"

En hydrologie, on mesure les pressions en hauteur d'eau, et il y a aussi la gravité qui joue dans l'équilibre des contraintes. En effet, l'eau s'écoule vers le bas sous l'action de la gravité $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, on peut donc considérer $-\rho \vec{g}$ comme un gradient de pression supplémentaire. La loi de Darcy s'écrit sous la forme suivante qui rappelle l'équation de Stokes et dans laquelle la gravité a été introduite :

$$0 = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u}, \text{ donc la loi de Darcy avec gravité est : } \vec{u} = -\frac{k}{\mu} (\vec{\nabla} p - \rho \vec{g}),$$

que l'on écrit aussi, en définissant la pression par $p/(\rho g)$ qui est une "hauteur d'eau" que l'on note h , cette utilisation d'une pression mesurée par une hauteur d'eau est classique en hydrologie :

$$\vec{u} = -\frac{k \rho g}{\mu} (\vec{\nabla} h + \vec{e}_z) \text{ ou } \vec{u} = -K \vec{\nabla} (h + z) \text{ ou encore } \vec{u} = -K \vec{\nabla} (H).$$

Table 5.5.1
Typical Values of Hydraulic Conductivity and Permeability

$-\log_{10} \cdot K(\text{cm/s})$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Permeability	Pervious			Semipervious					Impervious						
Aquifer	Good					Poor					None				
Soils	Clean gravel		Clean sand or sand and gravel			Very fine sand, silt, loess, loam, solonetz									
Rocks						Peat		Stratified clay			Unweathered clay				
Rocks						Oil rocks			Sandstone		Good limestone, dolomite		Breccia, granite		
$-\log_{10} \cdot k(\text{cm}^2)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$\log_{10} k(\text{md})$	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	

FIGURE 5 – Valeurs typiques de k , en mD (mili Darcy), extrait du livre Bear [1] page 136

On note $K = \frac{k\rho g}{\mu}$ la conductivité hydraulique, et h la hauteur piézométrique. et on utilise $\rho g H = p + \rho g z$, ou $H = h + z$ avec H la "charge hydraulique" (écart à la pression hydrostatique), et K est en m/s, pour k valant 1D, K vaut 10^{-5} m/s. K est homogène à une vitesse.

Il est important de voir que la pression est positive quand on est dans l'eau et normalement nulle dans l'air (c'est la référence de pression). Comme on définit la pression avec une hauteur h telle que $p = (\rho g)h$, la hauteur h définie ici est nulle à pression atmosphérique. Cependant, des pressions négatives peuvent apparaître dans des conditions non saturées au-dessus de la nappe phréatique.

2.3 Remarques importantes

Toutes les remarques qui suivent correspondent à des écoulements saturés, c'est à dire que l'eau occupe toutes les pores, il n'y a que de l'eau et la matrice solide.

• Attention, \vec{u} de Darcy est une vitesse (en m/s), mais on écrit aussi parfois \vec{q} pour cette vitesse que l'on considère comme un rapport en entre un débit en m^3/s divisé par une surface en m^2 $((L/T)L^2)/L^2 = L/T$, d'où le nom de "vitesse débitante". Elle exprime la portion de vitesse du fluide avec la porosité φ

$$\vec{u}^f = \vec{u}/\varphi \text{ ou encore } \vec{u} = (1 - \phi)\vec{u}^f.$$

Comme $\varphi = 1 - \phi < 1$ (compacité ϕ), la vitesse du fluide \vec{u}^f est plus grande que la vitesse de Darcy. Cette relation prend son sens si on suppose un milieu poreux constitué de grains, et que ces grains sont en mouvement. Ce qui va arriver lorsque l'on fait de l'érosion par exemple. Si on ajoute la vitesse des grains, la vitesse moyenne \vec{u} est : $\vec{u} = (1 - \phi)\vec{u}^f + (\phi)\vec{u}^p = \varphi\vec{u}^f + (1 - \varphi)\vec{u}^p$, la vitesse \vec{u} est bien une vitesse moyenne sur le volume complet *volume-averaged velocity* (voir Annexe sur la théorie de Jackson).

• L'équation initiale de Darcy 1856 (qui étudiait les fontaines de Dijon) est une équation globale (ce qui évite les φ). Elle porte sur le flux traversant une surface S et soumis à un gradient de pression $-\Delta P/L$ (en pratique pour Darcy, la surpression est faite avec de l'eau donc la définition initiale est avec la charge H , et donc $-\Delta P/L = -\rho g \Delta H/L$). Darcy dit : "Il paraît donc que pour un sable de même nature, on peut admettre que le volume débité est proportionnel à la charge et en raison inverse de l'épaisseur de la couche traversée" :

$$\frac{Q}{S} = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{L}, \text{ avec la pression, mais historiquement avec la charge } \frac{Q}{S} = -K \frac{\Delta H}{L}$$

on retrouve le fait que $\frac{Q}{S}$ est certes une vitesse, mais aussi un débit surfacique. Cette relation est expérimentale et globale, on peut mesurer expérimentalement la perméabilité et constater que le coefficient k est proportionnel à d^2 où d est la taille du diamètre caractéristique des grains (voir figure 5.5.1 de Bear [1]).

- Le vrai problème complet de mécanique des fluide dans un milieu constitué d'une assemblée de grains (ou un milieu avec des vides disposés) est : résoudre pour la vitesse \vec{u}^f à la petite échelle de la pore les équations de Stokes autour des grains qui serait

$$0 = -\vec{\nabla} p^f + \rho \vec{g} + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u}^f, \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^f = 0,$$

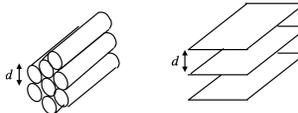
la vitesse du fluide circulant dans le milieu poreux \vec{u}^f est nulle dans et sur les grains, elle a une valeur dans les pores. Le problème est très ardu numériquement. C'est pour cela que l'on passe à la moyenne et que l'on définit une vitesse moyenne en oublie tout le détail de la géométrie.

Cependant, notons que si l'on écrit cette équation de Stokes sans dimension, $\bar{x} = x/d, \bar{y} = y/d, \bar{z} = z/d$, avec d taille des grains et que l'on choisit Π' le gradient de pression comme échelle motrice pour l'écoulement : $\vec{\nabla} p^f = \Pi' \vec{\nabla} \bar{p}^f$. On écrit pour la vitesse $\vec{u}^f = U_D \vec{\bar{u}}^f$, avec U_D vitesse caractéristique à déterminer, alors par "Moindre Dégénérescence"

$$U_D = \frac{d^2}{\mu} \Pi', \text{ qui est bien l'ordre de grandeur de la loi de Darcy...}$$

... mais comme dit à l'instant le problème est très ardu numériquement car on doit résoudre Stokes autour des milliers ou millions de grains. Le calcul de la valeur du coefficient est donc quasi impossible, d'où l'utilisation encore pour longtemps d'une loi homogénéisée.

- On peut estimer la perméabilité sur des modèles simples idéalisés de milieux poreux. Par exemple, pour un milieu constitué de tubes parallèles de rayon $d/2 = R$ le long de x :

$$u = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{\partial}{\partial x} p \text{ i. e. } k = \frac{d^2}{32}.$$


Pour des plaques parallèles séparées de d le long de x , on a $k = \frac{d^2}{12}$ (Hele Shaw). On retrouve bien la dépendance en d^2 .

- De nombreuses loi empiriques ont vu le jour pour estimer la relation entre k , la porosité et la taille des grains. La loi de Kozeny Carman (1937) est semi empirique (voir Guyon Hulin p 495), elle est très utilisée en pratique (Bear p 166 [1]) :

$$k = \frac{d^2 \varphi^3}{180(1 - \varphi)^2}.$$

- Pour résoudre effectivement le problème d'un écoulement de Stokes dans un milieu constitué de grains, il faut passer par la théorie de l'homogénéisation. La méthode asymptotique d'homogénéisation a été introduite par Sanchez-Palencia en 1980, cette méthode est subtile car il faut faire intervenir ce qui se passe à petite (autour de chaque grain) et grande échelle (tout l'échantillon), voir image [6]. On fait donc une moyenne puisque tous les grains se ressemblent, mais il y a toujours une influence de ce qui se passe à grande échelle. L'approche mélange les grandes et petites échelles de l'écoulement (c'est tout la difficulté de la méthode des échelles multiples mise en oeuvre dans la théorie de l'homogénéisation). Elle permet connaissant la micro structure et résolvant l'écoulement dedans, de calculer ensuite le coefficient k , voir comme introduction <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/homo.pdf>.

En utilisant cette méthode on retrouve Darcy (on le justifie). On trouve pour la vitesse \vec{u} , vitesse moyenne définie cette fois en tout point :

$$0 = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \frac{\mu}{k} \vec{u}, \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

En première lecture on peut sauter la suite jusqu'à §6 .

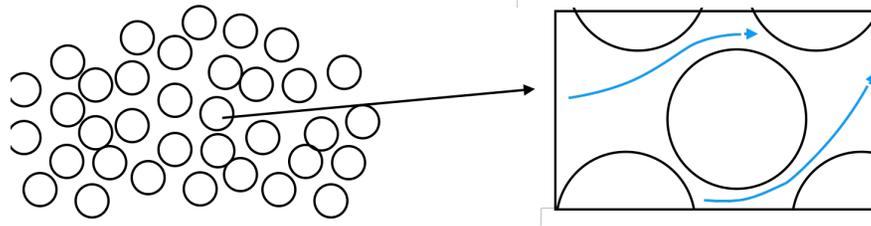


FIGURE 6 – Exemple de cas d'écoulement dans un milieu poreux constitué de grains, on regarde à droite un motif simple répétitif autour duquel il faut résoudre Stokes.

2.4 Loi de Darcy-Forchheimer

2.4.1 Forchheimer

La relation de Darcy est linéaire : la vitesse est proportionnelle au gradient de pression (rappelons que Navier Stokes est non linéaire par le terme $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ et que l'équation de Stokes, pour des Reynolds infiniment petits, est linéaire). Il s'agit de généraliser la relation en tenant compte qualitativement des termes non linéaires causés par un écoulement plus rapide (le Reynolds augmente) ρ^f est la densité du fluide. La loi de Darcy-Forchheimer s'écrit

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \text{ et } 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \vec{u} + \frac{\rho_f d}{\kappa_i} |\vec{u}| \vec{u} + \rho_f \vec{g}$$

la contribution non linéaire de Ergun 1952 est le terme supplémentaire. On remarque le côté implicite de la relation pour u : on ne calcule plus la vitesse directement à partir du gradient de pression, il faut résoudre une équation du second degré. Ce terme supplémentaire $\frac{\rho_f d}{\kappa_i}$ a en facteur de la vitesse au carré. On appelle $\frac{\kappa_i}{d}$ la "passabilité". On peut aussi écrire pour les termes Darcy et Forchheimer

$$-\frac{\mu}{k} \vec{u} + \frac{\rho_f d}{\kappa_i} |\vec{u}| \vec{u} = -\frac{\mu}{k} \left(1 + \frac{k}{\kappa_i} \left(\frac{\rho_f |\vec{u}| d}{\mu} \right) \right) \vec{u}$$

ce qui met en relief le fait que la correction est proportionnelle au nombre de Reynolds. Les coefficients à déterminer sont k et κ_i .

Les coefficients sont mesurés expérimentalement, et ensuite des corrélations sont tabulées, tout comme pour k . Si on choisit la loi de Kozeny -Carman pour $k = \frac{(1 - \phi)^3 d^2}{180 \phi^2}$, on a approximativement, si on veut être cohérent avec Kozeny Carman, la forme de Ergun : $\kappa_i = \frac{(1 - \phi)^3 d^2}{1.75 \phi} = \frac{(\phi)^3 d^2}{1.75(1 - \phi)}$.

2.4.2 Les ordres suivants, discussion de la validité de Forchheimer

Par hypothèse, conforme aux observations expérimentales, la vitesse n'est pas très grande dans le milieu poreux, le nombre de Reynolds est un petit paramètre. Pour corriger la loi de Darcy, on peut imaginer un développement en puissances de u . Ou plus précisément on peut imaginer un développement dans le cadre d'un développement en puissances du nombre de Reynolds (le petit paramètre). C'est bien ce qui est fait pour pour Darcy- Forchheimer que lon vient de voir :

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \text{ et } 0 = -\nabla p - \frac{\mu}{k} \left(1 + \frac{k}{\kappa_i} \left(\frac{\rho_f |\vec{u}| d}{\mu} \right) \right) \vec{u} + \rho_f \vec{g}$$

avec le Reynolds $Re = \frac{\rho_f |\vec{u}| d}{\mu}$. Pour aller plus loin dans les termes du développement, on peut définir $Re = \Delta P d^3 \rho / (L^3 2 \mu)$, avec L la taille du milieu poreux, ΔP la chute de pression caractéristique imposée, d le diamètre des grains.

Dans le cadre de ce développement, Darcy (linéaire $-\frac{\mu}{k} \vec{u}$) est le premier ordre en Re^0 , Forchheimer (quadratique $\frac{\rho_f d}{\kappa_i} |\vec{u}| \vec{u}$) le second ordre en Re et il pourrait y avoir un terme suivant (cubique en vitesse) le troisième ordre en Re^2 , etc.

il y a cependant une controverse, en effet Wodié et Levy [21] (1991) ont montré dans le cadre de la théorie formelle de l'homogénéisation que la première correction inertielle à la loi de Darcy est une fonction cubique de la vitesse (la quadratique étant nulle). En reprenant les expériences historiques de Darcy, Hazen et Chaveteau (qui ont permis d'établir la loi de Forchheimer en 1901), Firdaouss et al. [3] on montré qu'en fait la contribution en carré de vitesse n'était pas pertinente! En fait elle est nulle, et c'est le terme suivant d'ordre trois en vitesse et en Re^2 qui est important. Ils l'ont aussi vérifié sur des simulations numériques complètes du système Navier Stokes dans un motif périodique.

Néanmoins, en pratique, la loi de Forchheimer continue a être utilisée.

3 Ecoulements saturés

3.1 Loi de Darcy : équation en pression

Par la suite nous étudierons des milieux poreux à moitié sec et mouillés. Pour l'instant, depuis le début de ce cours, nous étudions ici un milieu poreux rempli d'eau, sans air. C'est un milieu "saturé" (sous entendu "saturé en eau"). Comme nous l'avons écrit, la loi de Darcy avec gravité est

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu}(\vec{\nabla}p - \rho\vec{g}).$$

Comme le fluide est incompressible, on a une seconde équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ donc

$$\vec{\nabla} \cdot (k\vec{\nabla}p) = 0.$$

On utilise parfois $\rho gH = p + \rho g z$, avec H la charge hydraulique (écart à la pression hydrostatique) :

$$\vec{u} = -K(\vec{\nabla}H)$$

il faut résoudre le problème en H ; c'est un Laplacien si K est constant :

$$\vec{\nabla} \cdot (K\vec{\nabla}H) = 0.$$

A l'interface de l'aquifère et le long des frontières imperméables, la vitesse normale s'annule :

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}H = 0.$$

Il faut donner les conditions adéquates ensuite aux autres bords : pression imposée, flux imposé, imperméabilité.... Nous verrons des exemples de mise en œuvre.

3.2 Ecoulement de Darcy confiné (saturé)

Un exemple typique d'écoulement confiné est celui qui se produit lorsque l'on a une rivière creusée dans un milieu poreux. Ici nous mettons en plus une digue qui retient l'eau, Mais en fait il n'en est rien, de l'eau va passer dans le sol et si la pression est suffisante, tout le sol va être mouillé.

Le schéma est présenté sur la figure suivante à gauche. Il est extrait du livre de J. Bear. Sur la figure suivante à droite, un exemple plus simple issu de l'article cité dans le livre : Todd & Bear 1959 <https://escholarship.org/uc/item/1nx0q3dd>.

On voit aussi les lignes de courant (*streamlines*).

Il s'agit donc d'un canal avec une digue posée sur un milieu poreux d'épaisseur H_d de sol en $z = H_d$. Il y a un fond imperméable en bas en $y = 0$. Le canal qui a lui même une profondeur (le fond est en $y = H_c$) est rempli d'eau, jusqu'à une hauteur d'eau $y = H_0$. Le sol est complètement imprégné, la nappe de l'aquifère affleure en $y = H_d$.

* sur le domaine à gauche une condition d'invariance pour exprimer que ça ne change plus trop $x = 0$ and $0 < y < H_d$ $\partial u / \partial x = 0$, $\partial v / \partial x = 0$, $\partial p / \partial x = 0$

* sur le fond $y = 0$ pas de pénétration, $v = 0$, $\partial u / \partial y = 0$, $-\partial p / \partial y = \rho g$

* en haut avant le barrage $y = H_d$ pour $x < x_0$ le sol est limite sec $p = \rho g h = 0$ pression atmosphérique de référence $p = 0$, glissement $\partial u / \partial y = \partial v / \partial y = 0$

* à droite, $x = L_0$ de $y = 0$ en montant jusqu'au fond de la rivière par symétrie $\partial p / \partial x = 0$

* pour la rivière elle même, en $x = x_0$ la pression le long de la berge est la pression hydrostatique $p = \rho g(H_0 + H_d - y)$ où $\rho g H_0$ est la sur pression due à la hauteur du barrage.

une mise en œuvre dans *Basilisk* à la page <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/toddbear59.c>

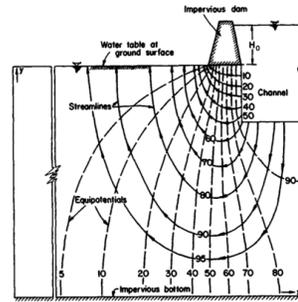


FIG. 6.6.1. Flow-net in an anisotropic medium (Todd and Bear, 1959).

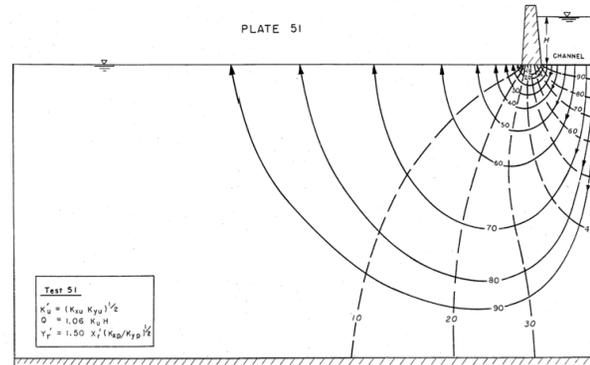


FIGURE 7 – Exemple de cas d’écoulement dans un milieu poreux sous un barrage (talus imperméable : *impervious dam*) retenant une rivière. La figure issue du livre de Bear, on note bien que l’eau affleure (*water table at ground surface*). Droite figure de l’article de Todd & Bear 1959 <https://escholarship.org/uc/item/1nx0q3dd>, cette fois la retenue d’eau n’est pas encaissée. Dans les deux cas, tout est mouillé.

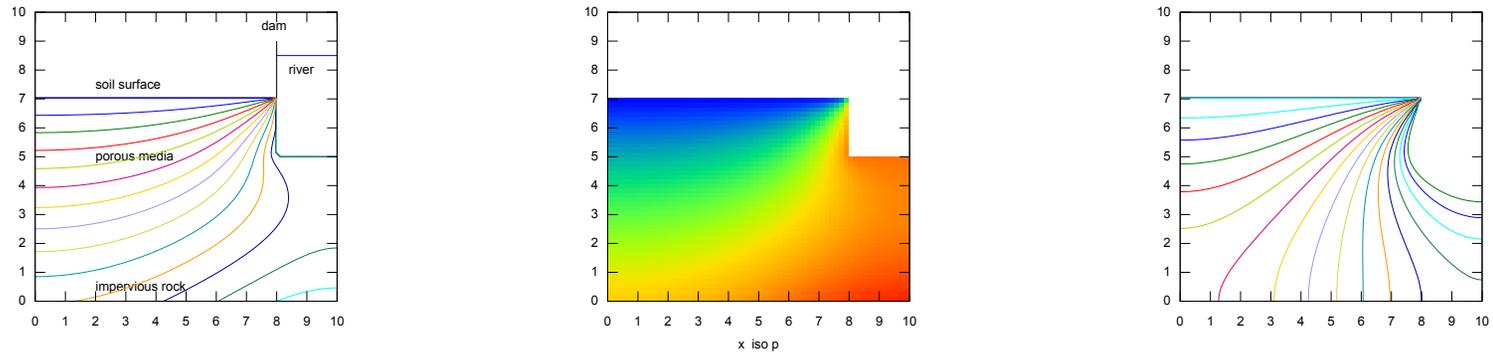


FIGURE 8 – Exemple de cas d’écoulement sous un barrage, tout est mouillé, calcul *Basilisk*, gauche et centre iso pression. Droite charge hydraulique $H = h + z$.

4 Ecoulements non saturés ;

Sauter en première lecture et poursuivre en §6

4.1 Conservation de la masse

Les cas précédents supposaient que tout le milieu dans son ensemble est rempli d'eau, mais en pratique, il va y avoir des parties mouillées, des parties sèches, et des parties avec un peu d'eau. On définit la teneur en eau volumétrique θ *volume fraction saturation, volumetric water content (or moisture content : the quantity of water contained in the material)*. L'équation de conservation de la masse d'eau s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

on peut rajouter un terme source. A noter qu'un φ est caché dans la vitesse \vec{u} débitante. K est défini dans la partie mouillée accumulée jusqu'à une hauteur h , la vitesse $\vec{u} = -K \vec{\nabla}(h + z)$. La position de la surface libre sera un résultat du calcul.

En utilisant $s = \frac{\partial(\theta)}{\partial h}$ le coefficient d'emménagement du milieu

$$s \frac{\partial h}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla}(h + z)) = 0,$$

dans la sous section suivante on suppose que toute l'eau va vers l'aquifère, il y a un domaine mouillé parfaitement, et au dessus un domaine parfaitement sec. On va voir que l'on peut aussi penser que K dépend de θ .

4.2 Ecoulement de Darcy non confiné

Dans cette sous section, nous supposons que toute l'eau va vers l'aquifère pour s'y accumuler. Il y a un domaine mouillé complètement, et au dessus un domaine parfaitement sec. Un exemple typique d'écoulement non confiné est présenté sur la figure 9. On a deux rivières (ou deux retenues d'eau) à des hauteurs différentes sur un fond imperméable. Ces deux domaines de hauteurs différentes sont séparée par un digue en milieu poreux. L'eau est passée à travers les pores du poreux et s'est accumulée au dessus du fond imperméable, elle ressort de l'autre côté. La difficulté est ici qu'il existe une surface (que l'on suppose bien définie) qui sépare une partie saturée d'eau d'une partie sèche. Cette surface est une inconnue, on sait seulement qu'elle est à la pression atmosphérique, donc $p = 0$ ($h = 0$ par connection à travers les pores à l'air à pression nulle). Le problème est beaucoup plus difficile à résoudre, il va falloir itérer pour que les conditions soient satisfaites.

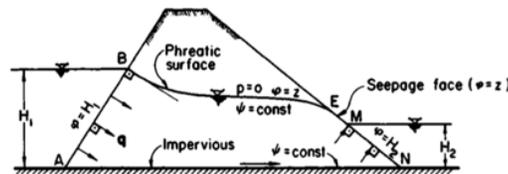


FIG. 7.1.2. Boundaries and boundary conditions in an earth embankment (Steady flow, isotropic medium).

FIGURE 9 – Exemple de cas d'écoulement dans un barrage (une digue *embankment*) poreux. Figure issue de Bear, une digue (un barrage) sépare deux hauteurs d'eau. Noter la surface de suintement *seepage*.

En bas, la vitesse glisse $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} H = 0$. à gauche du barrage de hauteur H_1 , la surface libre est inconnue et $H = z$ le long de la ligne de courant (et $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} H = 0$), mais il faut déterminer la surface libre (qui part du point "B" à gauche du barrage de hauteur H_2 sur la figure 9).

Remarquons que la surface de l'eau confinée (qui part du point "B" à gauche sur la figure 9) peut intersecter la surface de la digue (point "E" de la figure) avant d'atteindre la deuxième rivière (point "M" de la figure). Cette surface est donc humide, on parle de "suintement" (*seepage*, voir aussi figure 5), la pression est la pression atmosphérique, $h = z$. La position du point "E" est aussi une inconnue du problème qui est déterminée par la résolution.

En pratique, pour de la modélisation à grande échelle (pas une digue, mais un grand aquifère sous une montagne), on néglige le suintement ; on a vu qu'il est de quelques centimètres (figure 5)).

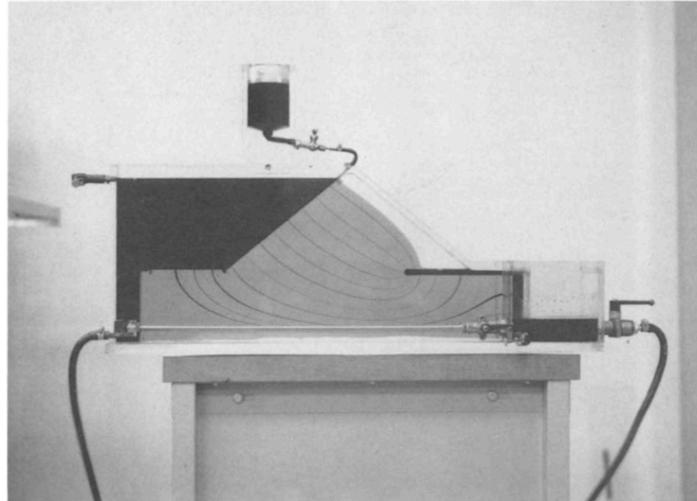


FIGURE 10 – Exemple d'expérience de la boratoire montrant l'écoulement d'infiltration dans un massif poreux, (barrage en terre). Cette visualisation a été obtenue à l'aide d'une cuve d'Hele-Shaw verticale, et montre clairement la forme de la surface libre et les lignes de courant de l'écoulement potentiel. (Photographie réalisée au laboratoire d'hydrodynamique de l'E.N.S.T.A). Photo du livre de Darrozès & François Cours Mécanique des Fluides de l'ENSTA

4.3 Méthode des variables complexes

Comme nous venons de le dire la résolution de ce type de problème nécessite la détermination d'une frontière inconnue solution de l'équation qui est un laplacien.

Ce genre de problème avec des Laplacien peut se résoudre en variables complexes. Voir Guerin page 164 pour un exemple (voir le livre Polubarinova-Kochina, P. (1962). Theory of ground water movement princeton university press. Princeton, NJ.)

4.4 Imbibition : écoulements insaturés

4.4.1 Equation de Richards

Les cas précédents supposaient une interface sec/mouillé claire et tranchée. On peut cependant penser que l'interface est diffuse et qu'elle a donc une certaine épaisseur. Il y a une région de transition entre parfaitement sec et parfaitement mouillé. De fait, on a défini la teneur en eau volumétrique θ *volume fraction saturation, volumetric water content* c'est au maximum φ la fraction de volume accessible par le fluide dans le matériau poreux étudié. L'équation de conservation de la masse d'eau s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

on peut rajouter un terme source qui traduirait un échange évaporation/ condensation.

On a écrit déjà cette équation en supposant ensuite que toute l'eau était retenue par un fond imperméable et formait une hauteur d'eau saturée, et du poreux sec au dessus. Dans les d'infiltration d'eau, il faut avoir une version différente, l'eau n'a pas encore touché le fond. Il y a donc un front mouillé qui progresse.

On va supposer (avec Richards 1931) que la l'on peut généraliser l'équation de Darcy avec un coefficient $K(h)$ qui dépend cette fois de h , la pression. On a ainsi la loi de Darcy généralisée :

$$\vec{u} = -K(h)\vec{\nabla}(h + z).$$

L'équation de conservation devient

$$\frac{\partial(\theta)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (K(h)\vec{\nabla}(h + z)).$$

L'équation est écrite aussi avec $C(h) = \partial\theta/\partial h$ la capacité capillaire, ou "emménagement", c'est l'équation de Richards :

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (K(h)\vec{\nabla}(h + z)).$$

Cette équation présente la difficulté d'avoir deux coefficients $C(h)$ et $K(h)$ difficiles à mesurer et qui dépendent beaucoup de la texture du sol. Par exemple dans Vauclin et al. [17] on prend : $\theta = 0.3/(1 + (|h|^{2.9})/40000)$ et $K_s = 35$ cm/h et $K/K_s = 310^6/(310^6 + |h|^5)$ pour de l'argile la courbe $K(h)$ est plus plate (elle présente moins le passage marqué de décroissance), de même pour $\theta(h)$. Sur la figue 12 droite, on montre que la courbe $\theta(h)$ peut varier entre l'infiltration et le drainage, la longueur L_c ordre de grandeur de la distance à laquelle la courbe varie fortement est une longueur dite "capillaire". Un sable (structure grossière) a une conductibilité hydraulique à saturation forte, une longueur L_c faible et $K(h)$ et $\theta(h)$ sont plus non linéaires que pour 'autres types de sols. Les sols à texture plus fine ont un K_s plus faible et une longueur L_c plus grande. Entre l'infiltration et le drainage, la courbe peut être différente : il y a un phénomène d'hystérésis.

4.4.2 Exemple de résolution de l'Equation de Richards en 1D

Dans le cas d'une infiltration suivant une direction (suivant z)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(K\frac{\partial H}{\partial z})$$

avec H charge hydraulique ; h pression de l'eau dans le sol, $H = h + z$ ou $H = p/(\rho g) + z$ *hydraulic head* (charge hydraulique), $K(h)$ perméabilité *hydraulic conductivity* qui dépend maintenant le la teneur en eau :

$$C(h)\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(K(h)\frac{\partial H}{\partial z})$$

avec $C(h)$ la capacité spécifique (*specific moisture capacity*) et la conductivité $K(h)$ *hydraulic conductivity*, l'équation de Richards 1D s'écrit :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K\frac{\partial H}{\partial x}) \text{ est écrite } \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(K\frac{\partial H}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}).$$

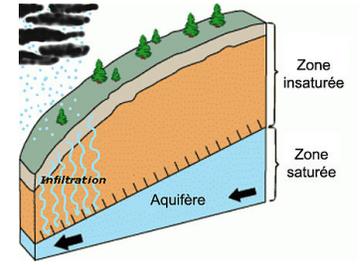


FIGURE 11 – "Nappe phréatique", une partie du cycle de l'eau, dessin sursimplifié, idéalisé de wikipedia

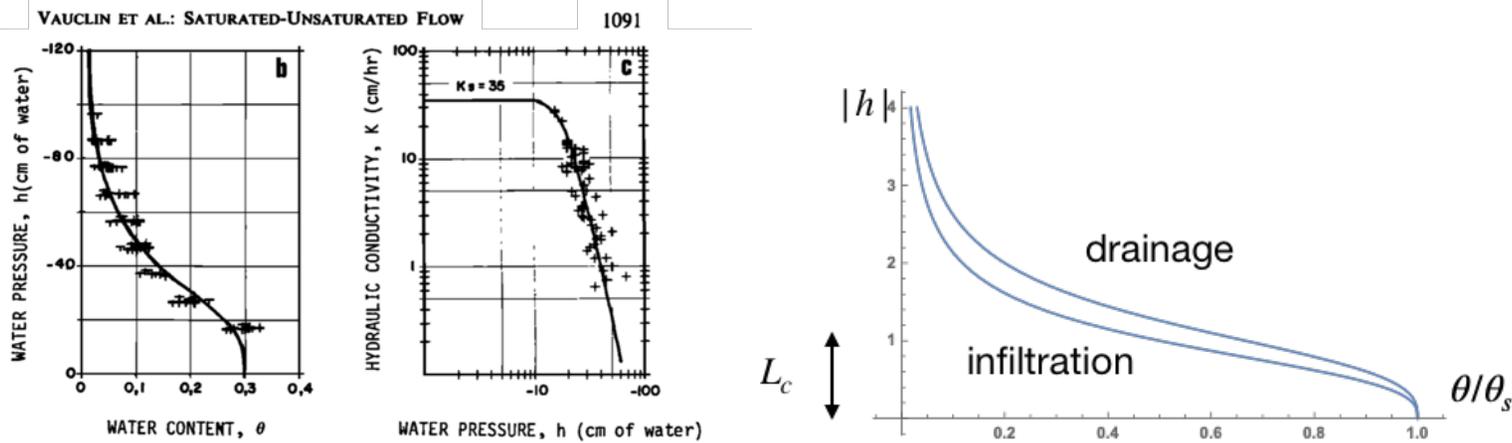


FIGURE 12 – $\theta(h)$ et $K(h)$ pour du sable fin de rivière tamisé (expérience de Vauclin 1979 [17]). A droite, la courbe $\theta(h)$ peut varier entre l'infiltration et le drainage.

C'est une équation de diffusion avec une diffusivité $D(h)$ hydraulic diffusivity :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right).$$

La surface en $z = 0$, on impose θ , C'est le problème d'imbibition. Une solution *self similar* peut être obtenue $\eta = z/\sqrt{t}$ et

$$-\frac{\eta}{2} \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(D \frac{d\theta}{d\eta} \right)$$

Écoulement en zone non saturée profil d'infiltration dynamique : réponse à une pluie :

cet exemple de résolution, les valeurs et les images sont issues de ftp://iris.metis.upmc.fr/m2HH/Support_cours_Ledoux/Cours_hydrogéologie-3.pdf

• fig. 13 gauche

Phase d'infiltration Durée 5 h Infiltration cumulée = 8,3 cm Intervalle entre courbes : 1 h Vitesse du front : $V_{Darcy} / (\text{porosité} \cdot \text{saturation en air}) \Rightarrow \text{distance} = 8,3 / (0,7 \cdot 0,3) = 40 \text{ cm}$

• fig. 13 centre

1 cycle infiltration - évaporation Durée des phases : 6 h Infiltration = 10 cm Intervalle entre courbes : 1 h

• fig. 13 droite

Phase de redistribution « naturelle » sur 100 jours Infiltration = 10^{-8} m/s Durée : 100 j Intervalle entre courbes : Infiltration : 1 h Redistribution : 10j

4.4.3 Equation de Lucas-Washburn

Il s'agit d'un petit aparté qui rappelle que l'on peut interpréter simplement l'imbibition dans les tubes fins. On connaît la loi de Jurin qui montre que la force de capillarité soulève de l'eau dans un tube vertical de rayon R jusqu'à une hauteur $h \sim \sigma / (R\rho g)$ (équilibre poids tension de surface). Pour l'écoulement dans un capillaire causé par le ménisque, on va avoir un équilibre entre la tension de surface et le frottement. La vitesse est $u = \frac{dL}{dt}$ et la pression $\Delta p = -\frac{2\sigma}{R}$

$$0 = -\frac{\Delta p}{L} - 8\pi \frac{\mu}{R^2} u \text{ en substituant } \frac{2\sigma}{L} = 8\pi \frac{\mu}{R} \frac{dL}{dt}$$

donc en éliminant et en intégrant :

$$L = \sqrt{\frac{\sigma R}{2\mu}} t \text{ ce qui donne une vitesse } u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma R}{2\mu}}$$

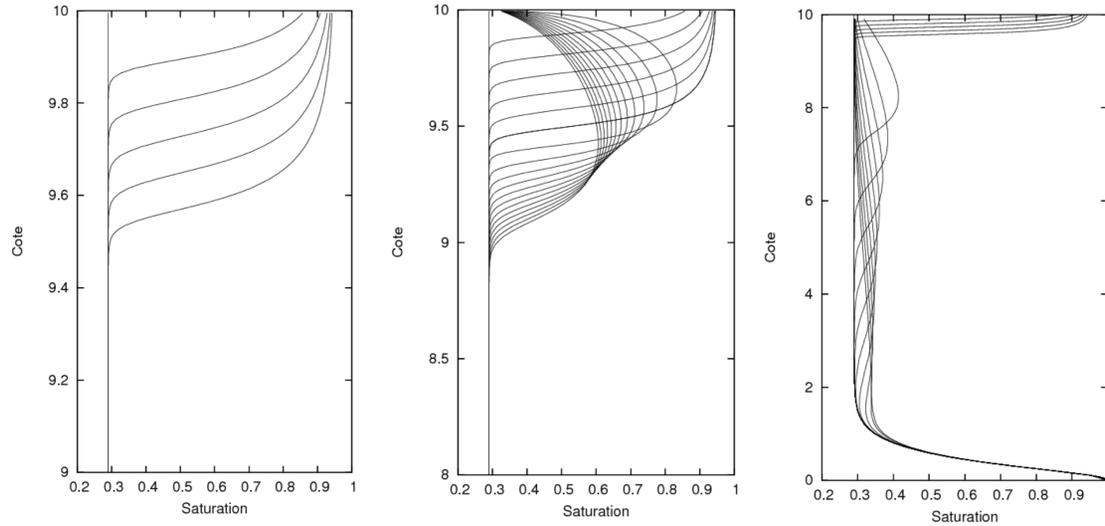


FIGURE 13 – Résolution de l'équation d'imbibition de Richards, issue de metis.upmc.fr/m2HH/Ledoux

on appelle $\sqrt{\frac{\sigma R}{2\mu}}$ la "sorptivité" de Poiseuille (capacité du milieu à absorber ou désorber du liquide par capillarité).

La sorptivité de l'équation de Richards est

$$\left(D \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_0 t^{1/2}$$

c'est la valeur de la pente de la solution autosemblable en 0.

4.4.4 Application à Saint-Venant

Lorsqu'un écoulement de ruissellement se produit (voir <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf>), on met en terme source dans l'équation de la masse de SV :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = R - I,$$

le terme R correspond à de la pluie qui tombe, et le terme I à l'infiltration.

Reste à coupler cette infiltration avec le sol et l'équation de Richards. En théorie il faudrait bien coupler à Richards cette équation ; ce qui n'est que rarement fait.

Parfois on simplifie, un modèle simple est celui de Horton :

$$I = I_0 + I_1 e^{-kt}$$

où les trois constantes sont empiriques... $I(t)$ est la capacité d'infiltration au cours du temps, I_0 la capacité d'infiltration initiale [cm/s] I_1 la capacité d'infiltration finale et où k est une constante fonction de la nature du sol.

Un modèle plus élaboré est celui de "Green Ampt" :

$$I(t) = K_s \left(1 + \frac{h_0 - h_f}{z_f(t)}\right)$$

où K_s est la conductivité hydraulique à saturation, h_0 la charge de pression en surface, h_f est la charge de pression au front d'humidification et z_f la profondeur atteinte par le front d'humidification.

5 Synthèse unifiée des deux points de vue : saturé vs insaturé

Continuer à sauter en première lecture et poursuivre en §6

5.1 Milieux modélisé par une interface diffuse fonction du champ continu de p

Pour unifier le propos, reprenons les équations des cas saturés et des cas insaturés. Il faut bien avoir à l'esprit, que la pression (notée h) est positive, quand on est dans l'eau et normalement nulle dans l'air. Ici comme le milieu est insaturé, la pression est négative ($h < 0$). Dans la partie saturée la pression est positive ($h > 0$).

$$s \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_s \frac{\partial (h+z)}{\partial x} \right) \text{ dans la zone saturée } h > 0$$

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h) \frac{\partial (h+z)}{\partial x} \right) \text{ dans la zone non saturée } h < 0$$

s coefficient d'emménagement, $K(h)$ conductivité hydraulique, K_s conductivité hydraulique à saturation, $C(h)$ capacité capillaire. La teneur en eau θ varie de φ la porosité quand les pores sont pleins à 0 suivant une loi $\theta(h)$ fittée. $C(h)$ varie de s pour $h > 0$ et est une fonction fittée $\frac{\partial \theta}{\partial h}$ pour $h < 0$.

Par exemple, on utilise les formules de Van Genuchten <https://hwbdocuments.env.nm.gov/Los%20Alamos%20National%20Labs/TA%2054/11569.pdf> pour la saturation S du milieu (noter la possibilité d'une teneur en eau résiduelle θ_r)

$$S(h) = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left(\frac{1}{1 + \alpha|h|} \right)^n \text{ pour } h < 0 \text{ sinon } 1$$

et

$$K(h) = S^{1/2} [1 - (1 - S^{1/m})^m]^2$$

les coefficients étant fittés à partir des expériences.

5.2 Milieux modélisé par une interface nette, saturé / sec

Une simplification de cette analyse est de suppose l'interface nette entre le mouillé et le sec.

Pour $(x, y) \in$ au domaine mouillé

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_s \frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial x} \right)$$

si $(x, y) \notin$ au domaine mouillé, alors il n'y a pas de champs. Sur la surface séparant le sec du mouillé, la pression est $p = 0$ et la vitesse est tangente.

Cette dernière vision est celle qui est utilisée par l'analyse couche mince qui va suivre.

6 Approximation 1D "à la Saint-Venant" : équation de Dupuit-Boussinesq

Reprendre ici en première lecture.

6.1 Approximation de Dupuit, ou encore approximation de Dupuit-Boussinesq, vision simple

6.1.1 Masse, Equation de Dupuit-Boussinesq

Dans cette section, l'eau s'est infiltrée jusqu'au sol imperméable qui l'arrête : une nappe est bien formée séparant une partie complètement mouillée et saturée en bas, d'une partie supérieure complètement sèche, voir la figure 15. La hauteur h sera alors effectivement la hauteur d'eau emprisonnée (ce symbole h n'est plus la pression sans dimension $p/(\rho g)$, c'est une vraie hauteur physique mesurable).

L'apport d'eau peut ici se faire par la pluie (*rain*). Cette pluie qui tombe donne une vitesse normale $-R$ vers le bas ($-R\vec{e}_z$), (on note le paradoxe du milieu sec mais dans lequel la pluie s'est infiltrée, mais tout cela est pour simplifier).

Les aquifères étant longs et minces (voir figure 15), l'écoulement étant lent, la pression est supposée hydrostatique. L'eau a pris le temps de tomber et d'être accumulée au dessus du fond imperméable. Donc, dans l'aquifère de hauteur h , avec dimensions :

$$p = \rho g(h - z).$$

Dans les classbooks d'hydrologie, il est d'usage de faire un bilan rapide sur une tranche le longueur Δx délimitée par deux hauteurs $h(x, t)$ et $h(x + \Delta x)$. On regarde la quantité d'eau qui rentre et sort et on fait un bilan de masse d'eau. Un débit d'eau entre $q(x, t)$ et sort $q(x + \Delta x, t)$, apportant ainsi $q(x, t) - q(x + \Delta x, t)$, la pluie d'intensité $R(x, t)$ fournit $R(x, t)\Delta x$. La hauteur d'eau varie sous le deux apports précédents de $\frac{\partial h}{\partial t}$, mais comme le milieu est poreux, la variation de volume d'eau n'est que $\varphi \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x$. Comme $q(x, t) - q(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x + \dots$, on obtient la relation finale de conservation de la masse

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R.$$

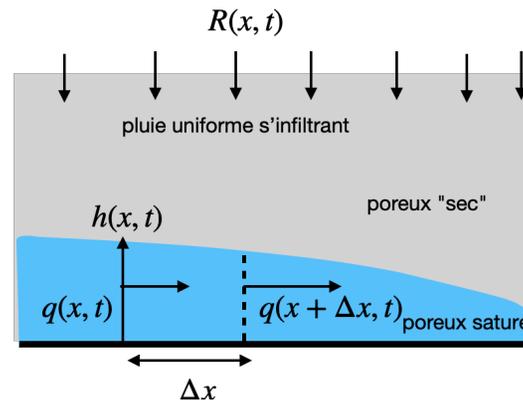


FIGURE 14 – Bilan simplifié pour établir la relation de Dupuit-Boussinesq, le poreux est supposé sec (malgré l'infiltration) et l'eau est piégée dans la nappe fine d'épaisseur h , soit q le débit circulant dans la couche d'eau. On fait un bilan sur une tranche δx de ce qui entre et sort.

En première approximation, puisque l'écoulement est en couche mince, la vitesse est principalement le long de x , elle vaut $u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} p$. La vitesse de Darcy est alors

uniforme sur la hauteur, et comme le flux est $q = \int_0^h u dz$, donc

$$q = -\frac{\rho g k h}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ ou encore } q = -K h \frac{\partial h}{\partial x} \text{ ou encore } q = -\frac{K}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}.$$

En substituant cette équation liant q à h dans l'équation de conservation de la masse d'eau, cela donne l'Equation de Dupuit-Boussinesq en instationnaire :

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + R,$$

écrite avec un terme source correspondant à la pluie R .

On va résoudre cette équation dans différents cas. Auparavant, on revient sur la démonstration des équations.

6.2 Approximation de Dupuit, ou encore approximation de Dupuit-Boussinesq, vision moins simple

Sauter en première lecture ce §

6.2.1 Retour sur la Masse et l'équation de Dupuit-Boussinesq

On revient sur ce que l'on a montré en utilisant des théories plus compliquées, d'une part pour justifier la conservation de la masse et d'autre part pour justifier le caractère hydrostatique. On va rétablir la même équation de Dupuit-Boussinesq, mais par une démarche plus rigoureuse. L'apport d'eau peut ici se faire par la pluie (*rain*). Cette pluie qui tombe donne une vitesse normale $-R$ vers le bas ($-R \vec{e}_z$), (on note le paradoxe du milieu sec mais dans lequel la pluie s'est infiltrée, mais tout cela est pour simplifier).

6.2.2 Rappel : vitesse à une interface entre deux fluides

Soit la courbe $z = h(x, t)$ de la surface libre en 2D, la tangente est obtenue en dérivant pour avoir la pente et en normant, la normale est prise perpendiculaire :

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial x^2}}} (\vec{e}_x + \frac{\partial h}{\partial x} \vec{e}_z) \text{ et } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial x^2}}} (\vec{e}_z - \frac{\partial h}{\partial x} \vec{e}_x).$$

La surface entre deux fluides en $z - h(x, t) = 0$, on l'écrit sous forme implicite $f(x, z, t) = 0$. Ainsi, la normale peut être calculée d'une autre manière, en prenant le gradient : $\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2}}} (\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z) \text{ ce qui redonne } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial x^2}}} (-\frac{\partial h}{\partial x} \vec{e}_x + \vec{e}_z).$$

La définition habituelle d'une surface est que le fluide ne la traverse pas. Donc la vitesse du fluide normale à l'interface doit être égale à la vitesse de l'interface, normale à elle même (Whitham 1974 [20] p 433). Avec $f(x, z, t) = z - h(x, t)$, la vitesse de la surface est $-\frac{\partial f}{\partial t} \vec{e}_z$, multiplié par la normale $\vec{n} = (-\frac{\partial h}{\partial x} \vec{e}_x + \vec{e}_z) / \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2}}$, ce la donne donc :

$$\text{la vitesse normale à la surface qui est, } \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial z^2} + \frac{\partial f^2}{\partial x^2}}},$$

la vitesse du fluide est $\vec{u} = u \vec{e}_x + w \vec{e}_z$, multipliée par la normale $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2}}} (\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z)$ cela donne

$$\text{la vitesse normale du fluide qui est } \frac{u \frac{\partial f}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial z^2} + \frac{\partial f^2}{\partial x^2}}},$$

donc en égalant ces deux vitesses

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = u \frac{\partial f}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial z} \text{ donc } + \frac{\partial h}{\partial t} = -u \frac{\partial h}{\partial x} + w, \text{ donc } w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Cette dernière forme s'interprète aussi en disant que l'interface reste interface, que l'interface est transportée donc que la dérivée totale de l'interface est nulle :

$$\frac{df}{dt} = 0, \text{ en remplaçant la dérivée totale } \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \text{ ou } -\frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} + w = 0.$$

On retrouve bien la même condition.

6.2.3 Cas avec Pluie, d'un fluide dans un poreux

Dans notre cas, il y a de la pluie en plus ($-R \vec{e}_z$) qui traverse l'interface, de plus la vitesse de l'interface doit être corrigée de la porosité φ puisque le milieu n'est pas plein (et que par définition de la vitesse de Darcy et reliée à \vec{u}^f la vitesse du fluide par : $\vec{u} = \varphi \vec{u}^f$) :

$$\frac{(-\varphi \frac{\partial f}{\partial t} - R)}{\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial z} + \frac{\partial f^2}{\partial x}}} = \frac{u \frac{\partial f}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial z} + \frac{\partial f^2}{\partial x}}} \text{ donc } + \varphi \frac{\partial h}{\partial t} - R = -u \frac{\partial h}{\partial x} + w.$$

Partant toujours de l'incompressibilité $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, intégrée sur l'épaisseur h , elle devient

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + w(x, h) - 0 = 0 \text{ et par Leibniz } \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - u \frac{\partial h}{\partial x} + w(x, h) = 0$$

Dans ce cas, on ne tient plus compte de $\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t}$ qui est constant sous la surface (θ passe de φ constant à 0). En substituant dans cette dernière relation l'expression $-u \frac{\partial h}{\partial x} + w = \varphi \frac{\partial h}{\partial t} - R$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + (-u \frac{\partial h}{\partial x} + w(x, h)) = 0, \text{ devient } \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + (\varphi \frac{\partial h}{\partial t} - R) = \varphi \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} q - R = 0$$

où on a reconnu la dérivée du débit : $\frac{\partial q}{\partial x}$ avec q le débit. L'équation de conservation de la masse est donc l'équation que l'on appellera de Dupuit Boussinesq lorsque l'on aura exprimé q en fonction de h , mais qui n'est encore que l'expression de la conservation de la masse, équation sans approximation :

$$\boxed{\varphi \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R.}$$

Il faut maintenant exprimer q en fonction de h , on se doute que l'on va utiliser la loi de Darcy. Nous allons le faire dans le paragraphe suivant en utilisant l'approche "couche limite", car l'aquifère est mince.

6.2.4 Vision "couche limite" pour les équations du mouvement

Dans ce paragraphe, on profite de l'analogie couche mince qui existe avec la couche limite (telle que la couche limite de Prandtl en aérodynamique). Dans le cas de la couche limite d'épaisseur δ on a $\delta/L \ll 1$, ici ce sera $h_0/L \ll 1$, ou h_0 est l'épaisseur fine caractéristique de l'aquifère. De même la vitesse transverse sera petite. Dans le cas de la couche limite de Prandtl, il y a un fluide parfait au dessus de la couche où la viscosité est dominante. Ici il n'y a pas de couche supérieure (l'eau est retenue en $0 \leq z \leq h$). On utilise tout naturellement les mêmes idées de couche mince. Incompressibilité et la quantité de mouvement pour $z < h$ sont pour notre milieu poreux rempli d'un fluide incompressible ; compte tenu de la loi de Darcy avec gravité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad u = -\frac{K}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad w = -\frac{K}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} - K.$$

On en déduit que si l'on pose les quantités caractéristiques suivantes ($U_0, V_0, \Delta P$ non connus à ce stade)

$$x = L\bar{x}, \quad z = h_0\bar{z}, \quad u = U_0\bar{u}, \quad v = V_0\bar{v}, \quad p = \Delta P\bar{p}, \quad h = h_0\bar{h},$$

en utilisant le principe de Moindre Dégénérescence (comme pour établir la couche limite de Prandtl), c'est à dire pour garder le maximum de termes, l'équation de la masse donne $U_0/L = V_0/h_0$. Donc on a une relation entre les deux vitesses (comme en couche limite). Ensuite, puis par le mouvement longitudinal $U_0 = \frac{K\Delta p}{\rho g L}$, reliant l'échelle de pression à celle de vitesse. La troisième équation pour w est juste écrite compte tenu de notre analyse qui a donné $V_0 = (h_0/L)U_0$ et $U_0/K = \frac{\Delta p}{\rho g L}$ (notons que dans le cas de la couche limite, la pression ne varie pas sur l'épaisseur de la couche limite, ici, la pression va varier sur l'épaisseur à cause de la gravité)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\Delta p}{\rho g L} \frac{h_0}{L} \bar{w} = -\frac{\Delta p}{\rho g L} \frac{L}{h_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - 1.$$

Dans l'équation de w il y a trois termes, on va choisir $\frac{\Delta p}{\rho g L} = \frac{h_0}{L}$, par Moindre Dégénérescence, de manière à ce que la pression varie sous la gravité (d'autres choix feraient perdre plus de termes). Ainsi l'équation sur w devient

$$\left(\frac{h_0}{L}\right)^2 \bar{w} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - 1,$$

il est alors évident que pour une faible épaisseur, il ne reste que $0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - 1$. (dans le cas de la couche limite, la pression est constante au travers de la couche limite, ici, la pression varie sur l'épaisseur à cause de la gravité -1). La pression est donc, puisque $\bar{p} = 0$ sur la surface de la nappe en $\bar{z} = \bar{h}$:

$$\bar{p} = \bar{h} - \bar{z}.$$

La pression est hydrostatique. Ce résultat est très général pour les écoulements de couche de fluide en couche mince (on l'a vu/ va le voir/ avec Saint-Venant). La vitesse $\bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}$, ne dépend alors que de \bar{x} , elle vaut $\bar{u} = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$. La vitesse \bar{w} est nulle à l'ordre considéré.

6.3 Equation de Dupuit-Boussinesq

Reprendre la lecture en ce §

Les aquifères étant longs et minces (voir figure 15), l'écoulement étant lent, la pression est hydrostatique comme on vient de le voir. L'eau a pris le temps de tomber et d'être accumulée au dessus du fond imperméable. Attention, répétons que le h que l'on définit ici, est la hauteur effective de la table d'eau de la base imperméable à la surface. Donc, dans l'aquifère de hauteur h , avec dimensions :

$$p = \rho g(h - z).$$

En première approximation, puisque l'écoulement est en couche mince, la vitesse est principalement le long de x , elle vaut $u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$. La vitesse de Darcy est alors uniforme sur la hauteur h , et comme le flux est $q = \int_0^h u dz$, donc

$$q = -\frac{\rho g k h}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ ou encore } q = -K h \frac{\partial h}{\partial x} \text{ ou encore } q = -\frac{K}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}.$$

Pour aller à l'ordre suivant, voir par exemple [2].

En substituant cette équation liant q à h dans l'équation de conservation de la masse d'eau, cela donne l'Equation de Dupuit-Boussinesq en instationnaire :

$$\boxed{\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + R,}$$

écrite avec un terme source correspondant à la pluie R .

Arsène Dupuit (Arsène Jules Emile Juvénal Dupuit 1804-1866) est contemporain de Henry Darcy (1803-1858). Joseph Boussinesq (1842-1929) a été Professeur à la Sorbonne ("Chaire de mécanique physique et expérimentale de la Faculté des sciences de Paris" de 1886- 1896, il passe ensuite à la chaire de "mathématiques appliquées" de 1896 à 1918), on ne le présente plus tellement son œuvre en fluides est immense...

6.4 Solution stationnaire de Dupuit

Le problème précédent deux retenues de hauteur h_1 et h_2 séparés par une distance L de percolation, cas de la figure 9 était traité en supposant que les dimensions longitudinales et transversales étaient du même ordre de grandeur et le problème était 2D. Nous reprenons ce problème dans le cas d'écoulement dans un barrage poreux, mais sur une épaisseur d'aquifère mince. C'est donc le cadre de cette section en approximation 1D que nous nous plaçons, la figure 15 représente le problème à résoudre.

L'équation (conservation de la masse d'eau) en couche mince $\varphi \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R$, en stationnaire et sans pluie donne :

$$0 = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \text{donc } q = cst,$$

le débit est constant et ainsi $2qd x = -Kd(h^2)$ qui s'intègre en une formule appelée "décharge de Dupuit-Forchheimer" :

$$q = \frac{K(h_1^2 - h_2^2)}{2L},$$

la forme de la surface est une parabole (parabole de Dupuit)

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{2qx}{K}}.$$

On a une solution explicite.

Remarque

Si h_2 est nul, posons $L = Kh_1/(2q)$ la hauteur est donc $h = h_1 \sqrt{1 - \frac{x}{L}}$. A la sortie en $x = L$, on voit que la pente de h , est en $(h_1/2/L)/\sqrt{1 - x/L}$, en x proche de la sortie L , la pente est infinie. Proche de la sortie, les hypothèses de pente faible sont donc fausses. La formule de Dupuit-Boussinesq tombe en défaut.

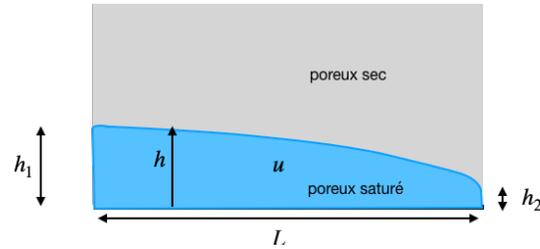


FIGURE 15 – Exemple de cas d'écoulement en couche mince dans un milieu poreux : deux retenues d'eau de hauteur h_1 et h_2 séparés par une distance L de percolation,

6.5 Approximation de Dupuit stationnaire, cas avec pluie

Un autre exemple intéressant est celui dans le cas où il y a une pluie donnée qui rajoute une source R tout le long : voir figure 16, on a un terme de pluie (supposée uniforme) additionnel :

$$0 = -\frac{\partial q}{\partial x} + R$$

On trouve en partant de $x = 0$ où $h = h_1$ jusqu'à $x = L$ où $h = h_2$ en intégrant :

$$h^2 = h_1^2 + \frac{(h_1^2 - h_2^2)x}{L} + \frac{R}{K}x(L - x).$$

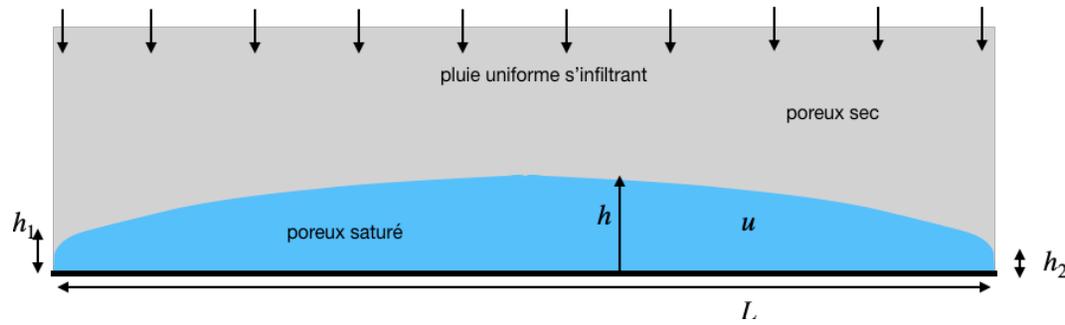


FIGURE 16 – Exemple de cas d’écoulement en couche mince dans un milieu poreux avec un terme de pluie. L l’aquifère est alimenté par la pluie, il se vide à droite et à gauche.

C’est l’ellipsoïde de Dupuit. La ligne de partage des eaux est là où h est au maximum, elle sépare des régions où l’eau s’écoule dans un sens et dans l’autre. Si les hauteurs sont les mêmes $h_1 = h_2$ on trouve $h_m = \sqrt{\frac{RL}{K} \frac{L}{2}}$ Prenons par exemple un massif d’un kilomètre ayant une perméabilité de 100 mD (soit une conductivité hydraulique de 10^{-6} m/s) en présence d’une infiltration de 10 mm par an, on aura une sur hauteur de 9 mètres (cf <http://step.ipgp.fr/images/e/e4/GE2008ch2.pdf>)

6.6 Approximation de Dupuit, instationnaire mais linéarisé

On suppose que l’aquifère est rempli à un niveau $h_0 + \Delta h_0$ initialement. On va étudier la décharge (ou l’étiage) de cet aquifère. On suppose que la sortie en $x = 0$ est tout juste au niveau h_0 , avec $\Delta h_0 \ll h_0$. On peut alors linéariser les équations, en écrivant (f_1 sans dimension)

$$h = h_0 + (\Delta h_0) f_1$$

avec f_1 variant de 0 en 0 à là ∞ pour que h varie de h_0 à $h_0 + \Delta h_0$. Nous linéarisons l’équation

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + R$$

qui devient, comme $\frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 (h_0^2 + 2(\Delta h_0)h_0 f_1 + \dots)}{\partial x^2} = h_0 K (\Delta h_0) \frac{\partial^2 (f_1 + \dots)}{\partial x^2}$ et $\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = (\Delta h_0) \frac{\partial}{\partial t} f_1$, on pose de plus que la pluie est faible $R = (\Delta h_0) r$ pour être cohérents. On trouve une équation de diffusion, comme l’équation de la chaleur :

$$\varphi \frac{\partial f_1}{\partial t} = K h_0 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + r$$

-cas linéarisé sans pluie

Dans le cas sans pluie $r = 0$, on retrouve l’équation de la chaleur (sans source), la solution est avec la fonction erreur avec la variable de similitude x/\sqrt{t} comme pour l’équation de la chaleur.

cf la résolution de l’équation de la chaleur :

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MECAVENIR/cours6_eqchal_resol.pdf

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/PC1.ENSTA.pdf>

Problème final : $\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{f}_1}{\partial \tilde{x}^2}$, avec les conditions $\tilde{f}_1(\tilde{x} = 0, \tilde{t}) = 0$, $\tilde{f}_1(\tilde{x}, 0) = 1$ et $\tilde{f}_1(\infty, \tilde{t}) = 1$.

Solution semblable (*self similar/Selbstähnlich*) : on cherche par dilatations des variables de manière à rendre l’équation différentielle et ses conditions aux limites invariantes par un groupe particulier de dilatations : $\tilde{x} = \hat{x} x^*$, $\tilde{t} = \hat{t} t^*$, $\tilde{f}_1 = \hat{f}_1 F^*$. donc $\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{t}} = (t^* x^{*-2}) \frac{\partial^2 \hat{f}_1}{\partial \hat{x}^2}$, $\hat{f}_1(\hat{x} = 0, \hat{t}) = 0$, $\hat{f}_1(\hat{x}, 0) = 1$, pour que le problème "chapeau" soit

invariant, nous devons choisir $x^{*2} = t^*$ et $F^* = 1$.

La solution est une fonction implicite des trois variables :

$$\mathcal{F}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{f}_1) = 0 \text{ équivaut à } \tilde{f}_1 = f(\tilde{t}, \tilde{x}),$$

par l'invariance on écrit : $\mathcal{F}(\hat{t}t^*, \hat{x}x^*, \hat{f}_1F^*) = 0$ ou encore

$$\mathcal{F}(\hat{t}t^*, \hat{x}t^{*1/2}, \hat{f}_1) = 0.$$

Ce que l'on peut reformuler en faisant disparaître t^* du maximum d'arguments :

$$\mathcal{F}_2(\hat{t}t^*, \hat{x}\hat{t}^{-1/2}, \hat{f}_1) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout t^* , cet argument n'intervient pas, la solution est donc de la forme : $\hat{f}_1 = \theta(\eta)$ avec $\eta = \hat{x}\hat{t}^{-1/2}$. Substituons cette variable dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{t}} = \theta'(-1/2)\eta/\hat{x} = \frac{\partial^2 \hat{f}_1}{\partial x^2} = \theta''\hat{x}^{-1}, \text{ soit le problème final : } (-\eta/2) = \theta''/\theta', \theta(0) = 0 \text{ et } \theta(\infty) = 1.$$

En général on résout numériquement, mais ici on peut continuer le calcul : $\text{Log}(\theta') = -\eta^2/4$ compte tenu des conditions aux limites :

$$\theta(\eta) = \frac{\int_0^{\eta/2} \exp(-\xi^2)d\xi}{\int_0^{\infty} \exp(-\xi^2)d\xi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta/2} \exp(-\xi^2)d\xi$$

car il est bien connu que $\int_0^{\infty} \exp(-\xi^2)d\xi = \sqrt{\pi}/2$.

Rappel, la fonction erreur, et la fonction erreur complémentaire sont définies par :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2)d\xi \text{ et } \text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x).$$

Elle permet d'écrire la température sous la forme :

$$\theta(\eta) = \text{erf}(\eta/2)$$

On a pour $\text{erfc}(\eta)$ une fonction qui décroît de 1 à 0 (figure 17 gauche pour erf).

Remarque, si on joue bien avec les variables de similitude on trouve comme ici $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$, qui donne : $\eta\theta' + 2\theta'' = 0$. Si par malchance on choisit $\eta = x^2/t$ on trouve : $-2\theta' - \eta\theta'' - 4\eta\theta''' = 0$ La solution en est bien entendu $\theta = \text{erf}((\sqrt{\eta})/2)$, mais elle n'est pas simple à voir ! Il n'y a pas de règle précise pour le choix de la bonne variable. De toutes façons, il faut à la fin résoudre une équation différentielle (les cas de solutions exactes, comme ici sont rarissimes).

-cas linéarisé avec pluie,

la montée régulière au loin suggère de chercher une solution proportionnelle au temps : $h = tf(x/\sqrt{t})$ (bien entendu la recherche de solution de similitude laissée à titre d'exercice (<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/M2MHP/SSS.pdf>) suggère que h/t est fonction x/\sqrt{t}), après substitution, on trouve :

$$2f'' + 2\eta f' - 2f + 2 = 0 \quad f(0) = 0 \quad f(\infty) = 1.$$

La solution analytique n'est pas évidente, on la trouve avec **Mathematica** : elle sécrit $f(\eta) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta \text{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) - e^{-\frac{\eta^2}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta + 1$ (figure 17 droite). Dérivée de la solution en 0 : $2/\sqrt{\pi}$.

-cas linéarisé taille finie.

Si l'Aquifère est de dimension finie, alors il faut chercher la solution sous forme de série de Fourier ([16])....

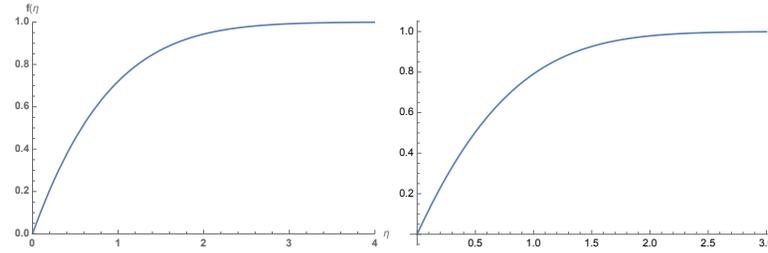


FIGURE 17 – Solution autosemblable, gauche $\text{erf}(\eta/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta/2} e^{-\xi^2} d\xi$ de l'équation linéarisée dans le cas d'une sortie de quasi même niveau que l'aquifère initial, droite solution semblable linéarisée du cas avec pluie solution $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta\text{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) - e^{-\frac{\eta^2}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta + 1$

6.7 Approximation de Dupuit, instationnaire, problème non linéarisé

6.7.1 Equations

Nous allons dans cette sous section examiner comment un aquifère évolue et répond à une pluie ou à son arrêt. Nous résolvons cette fois l'équation complète non linéaire. L'Equation de Dupuit-Boussinesq en instationnaire :

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + R$$

est écrite avec un terme source correspondant à la pluie R nulle ou pas, et le terme instationnaire. La sortie sera toujours en $x = 0$. Examinons différents scenarii.

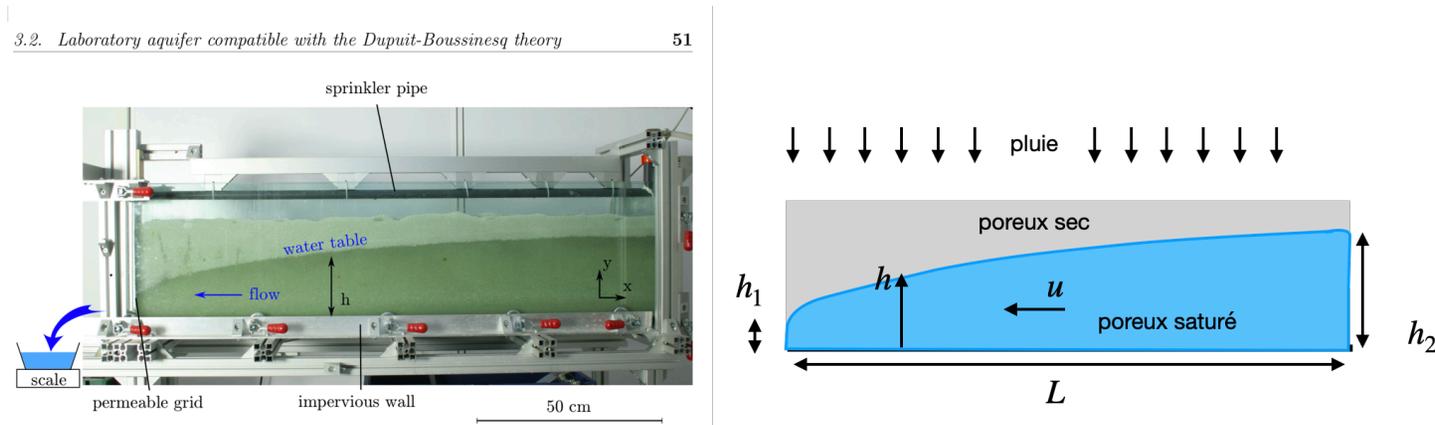


FIGURE 18 – Exemple de cas d'écoulement poreux, empilement de billes de verres entre deux plaques de verre, à droite et en bas, les billes sont retenues par une plaque de verre, à gauche par une grille. Un tube percé en eau laisse goutter une pluie. Expérience à gauche, schéma à droite.

L'expérience est de dimension finie, si on se donne une pluie R , une hauteur initiale au temps $t = 0$, sachant que toute l'eau part en $x = 0$ (que donc $(h(x = 0, t) = 0)$ et enfin qu'à droite il y a un mur où $q = 0$ (donc $\partial h / \partial x = 0$ en $x = L$).

Suivant les cas de R on va résoudre ce problème. Souvent on va supposer les temps courts, ou les distances courtes pour que la condition $x = L$ soit en fait à l'infini. On commence par un cas avec pluie, puis on assèche l'aquifère (Dupuit, 1863 ; Boussinesq, 1877 et travaux de Devauchelle et Lajeunesse depuis 2014).

Voir la présentation de Eric Lajeunesse <https://www.youtube.com/watch?v=dUHckguCQxs>

6.7.2 Pluie : régime de tempête (*storm flow*), montée de crue

• **dans le cas avec pluie en domaine infini** : cas où la sortie à gauche est sèche, $h = 0$ en $x = 0$, et le domaine est infini (le mur est infiniment loin à droite, $L \rightarrow \infty$). C'est le régime de tempête (*storm flow*). On se doute qu'au loin h est proportionnel à t . La méthode des solutions de similitude appliquée à

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + R, \quad \text{avec } h = h^* \hat{f}, \quad t = t^* \hat{t}, \quad x = x^* \hat{x}, \quad \text{montre que } h^*/t^* = h^{*2}/x^{*2} = 1$$

Pour que l'équation en variable chapeau soit la même, cela donne $h^* = t^*$, et on a $x^* = t^*$. Cela suggère que $h = tf$, fonction de la variable x/t . Avec $h = \frac{Rt}{\varphi} f(\sqrt{\frac{2\varphi^2}{KR} \frac{x}{t}})$, on a donc à résoudre :

$$2ff'' + 2f'^2 + \eta f' - f + 1 = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1.$$

L'équation reste compliquée à résoudre, on peut regarder près de l'entrée pour commencer. Pour les petits états, près de l'entrée, on pose $\eta = \varepsilon \tilde{\eta}$, et $f = \tilde{f}$, avec $f(0) = 1$

$$2f\tilde{f}'' + 2\tilde{f}'^2 + \eta\tilde{f}' - f + 1 = 0, \quad \text{devient } \frac{2\tilde{f}\tilde{f}'' + 2\tilde{f}'^2}{\varepsilon^2} + \tilde{\eta}\tilde{f}' + (1 - f) = 0$$

à l'ordre dominant, $2\tilde{f}\tilde{f}'' + 2\tilde{f}'^2 = 0$, ou en séparant $\tilde{f}'/\tilde{f} = -\tilde{f}''/\tilde{f}'$ intégré cela donne $\tilde{f}\tilde{f}' = cst$, puis par intégration $\tilde{f} \simeq a\sqrt{\tilde{\eta}}$, on trouve numériquement (après résolution numérique non détaillée ici, voir Guérin) $a = 1.016$, le comportement de la hauteur près de l'entrée est donc :

$$h \simeq a \frac{Rt}{\varphi} \left(\sqrt{\frac{2\varphi^2}{KR} \frac{x}{t}} \right)^{1/2}, \quad \text{et le flux est } q(0, t) \simeq a^2 \frac{\sqrt{K/2}}{\varphi} R^{3/2} t.$$

Cela nous donne le comportement de remplissage, la première partie de la courbe 20. On remarque que le pic de crue est en $R^{3/2}$ fois la durée de la pluie. Si on multiplie par $2R$, la réponse $2^{3/2} = 2.8$ soit presque 3 fois plus de débit pour un doublement de pluie...

6.7.3 Assèchement (*Drought Flow*) "étiage"

• **Cas sans pluie d'un aquifère infini à droite**, initialement complètement rempli à une hauteur constante h_0 , à $t = 0$ on ouvre à gauche et on impose en $x = 0$, $h = 0$ (toute l'eau part). C'est une sorte de problème de "rupture de barrage". C'est l'écoulement de vidange d'un aquifère ou d'assèchement (*Drought Flow*, Guerin page 37), $R = 0$.

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \quad \text{avec } h(x = 0, t) = 0, \quad h(x, t = 0) = h_0, \quad h(\infty, t) = h_0.$$

On voit de manière évidente (en utilisant la technique habituelle de changement d'échelle, $x^{*2} = t^*$ et $h^* = 1$) qu'il y a une solution auto semblable avec $\eta = (\frac{2\varphi}{Kh_0} \frac{x}{t^{1/2}})$

$$h = h_0 f\left(\frac{2\varphi}{Kh_0} \frac{x}{t^{1/2}}\right) \quad \text{avec } f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1, \quad \text{le problème à résoudre est donc } ff'' + 2\eta f' + f'^2 = 0, \quad f(0) = 0 \quad f(\infty) = 1.$$

Lors de la résolution pour η on voit que pour les petites valeurs (près de la sortie à gauche, ou pour les temps assez longs, attention, subtilement, si on suppose que cet exemple est l'approximation d'un aquifère fini près de l'entrée, le temps doit être mesuré avec une échelle assez courte, mais comme on le voit, au temps long dans cette échelle courte), si on pose $\eta = \varepsilon \tilde{\eta}$, et $f = \tilde{f}$,

$$f\tilde{f}'' + \tilde{f}'^2 + 2\eta\tilde{f}' = 0, \quad \text{devient } \frac{\tilde{f}\tilde{f}'' + \tilde{f}'^2}{\varepsilon^2} + \tilde{\eta}\tilde{f}' = 0$$

à l'ordre dominant on retrouve la même équation (avec des variables différentes), $\tilde{f}\tilde{f}'' + \tilde{f}'^2 = 0$ donc $\tilde{f}\tilde{f}'' \sim -\tilde{f}'^2$ donc $\tilde{f}''/\tilde{f}' \sim -\tilde{f}'/\tilde{f}$ donc $\tilde{f}' \sim -(cste)/\tilde{f}$ et $(\tilde{f}')^2 = -2cste \tilde{\eta}$ d'où $\tilde{f} = a\sqrt{\tilde{\eta}}$, on voit que $f(\eta) \sim a\sqrt{\eta}$ pour η petit, la résolution numérique (non détaillée ici, voir Guérin) nous donne $a = 1.1152$ on en déduit h puis

q pour η petit : $q \sim \frac{a^2 \sqrt{\varphi K h_0^3}}{4t^{1/2}}$ Ce cas est bien celui d'un aquifère infini, dont on vient de trouver le comportement du débit de sortie pour les temps longs.

Bien entendu, ce cas correspond aussi à celui d'un aquifère fini de longueur L , mais étudié aux temps courts. Tant que l'information de l'existence de la borne à droite n'est pas atteinte, un aquifère fini de longueur L se comporte comme un aquifère infini. En effet tant que le temps est petit et est tel que $\frac{2\varphi}{Kh_0} \frac{L}{t^{1/2}} \gg 1$, l'aquifère fini se comporte comme cet aquifère infini. Le problème que nous venons d'étudier est qualifié de vidange au temps court (*drought flow early stage*), pour un aquifère de longueur L , mais ce temps est suffisamment long et on est assez près de l'entrée. La solution précédente n'est plus valable aux temps longs $t \sim \varphi L^2 / (Kh_0)$.

• **Cas sans pluie d'un aquifère fini à droite**, initialement complètement rempli à une hauteur h_0 , à $t = 0$ on ouvre à gauche et on impose en $x = 0$, $h = 0$ (toute l'eau part). C'est une sorte de problème de "rupture de barrage". C'est l'écoulement de vidange d'un aquifère de taille finie au temps long (ou étiage, *Drought Flow, late stage*, Guerin page 37). La condition à changer est celle à droite, le flux est nul donc la pente de h est nulle :

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \text{ avec } h(x=0, t) = 0, \quad h(x, t=0) = h_0, \quad h'(x=L, t) = 0.$$

Ce problème n'a plus de solution autosemblable, l'astuce classique consiste à chercher une solution en variables séparées (et ensuite faire une somme infinie de fonctions élémentaires à variables séparées, voir par exemple l'équation de la chaleur en domaine fini).

On pose $h = F(t)f(x/L)$, donc $\varphi F'(t)f(x) = -KL^{-2}F^2(f f'' + f'^2)$, que l'on écrit $\frac{F'(t)}{F(t)^2} = -\frac{K}{\varphi L^2}(f(x/L)f''(x/L) + f'(x/L)^2)/f(x/L)$. On en déduit que $\frac{F'(t)}{F(t)^2}$ est une constante disons négative, donc $\frac{F'(t)}{F(t)^2} = -C^2$ qui s'intègre en $F(t) = 1/(C^2 t)$.

On a pour f le problème $C^2 f = \frac{K}{\varphi L^2}(f(x/L)f''(x/L) + f'(x/L)^2)$ on pose $x = L\bar{x}$ et $f = \bar{f}$, d'où :

$$\bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x})\bar{f}''(\bar{x}) + \bar{f}'(\bar{x})^2 = 0 \text{ avec } \bar{f}(0) = 0, \bar{f}'(1) = 0$$

on voit que près de $\bar{x} = 0$ on a $\bar{f}(\bar{x}) \sim a\sqrt{\bar{x}}$ avec $a = 1.177$ le débit est donc

$$q \sim \frac{a^2 \varphi^2 L^3}{2Kt^2}$$

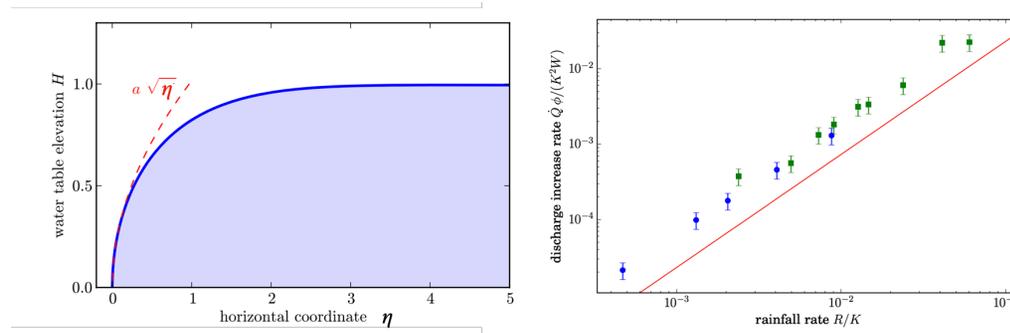


FIGURE 19 – Gauche : résolution de l'équation du régime de tempête (*storm flow*), image de Guérin et al. A droite : débit de sortie en fonction du tau de pluie R pour deux expériences 4 mm glass beads (blue dots) and 1 mm glass beads (green squares). La ligne rouge est le régime asymptotique $q(0, t) \propto R^{3/2}$.

6.7.4 Résolution numérique

Nous pouvons donc maintenant modéliser l'évènement pluie/ étiage en simulant numériquement Dupuit-Boussinesq ($\varphi = K = 1$, $R(t < .25) = 1$ et $R(t > .25) = 0$), la figure 20 de Guérin [5] montre le résultat de ce créneau de pluie.

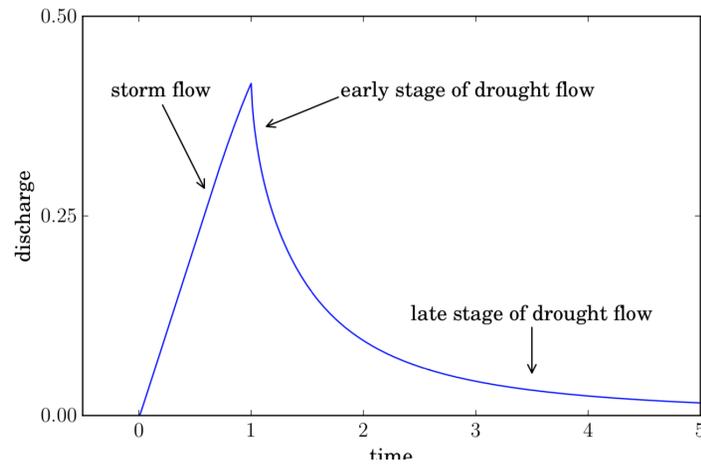


FIGURE 20 – Réponse $q(x = 0, t)$ d'un aquifère à un créneau de pluie $R(t < .25) = 1$ et $R(t > .25) = 0$ (issu de Guérin [5]).

il faudrait maintenant le coder avec *Basilisk*, ce qui est fait plus loin
<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/dupuitboussinesq.c#202>

6.7.5 Cas de la double rupture de barrage en milieux poreux

Drainage pour un "dam break" Pritchard et al. 2001 " On the slow draining of a gravity current moving" J. Fluid Mech. (2001), vol. 444, pp. 23-47. IL s'agit d'un région de largeur finie qui brusquement s'écoule (comme une double ruptur de barrage, ou comme les problèmes de Huppert vus dans le cours sur Saint-Venant). L'équation de Dupuit-Boussinesq

$$\varphi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} \text{ avec } \int h dx = \text{donné}$$

sans dimension

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{h}^2}{\partial \hat{x}^2} \text{ avec } \int \hat{h} d\hat{x} = 1$$

On voit de manière évidente (en utilisant la technique habituelle de changement d'échelle ($h^* x^* = 1$ et $1/t^* = h^*/x^{*3}$), donc $x^{*3} = t^*$ et $h^* = 1/x^* = 1/t^{*1/3}$), il y a une solution auto semblable avec $\eta = \frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}}$)

Lors de la résolution pour η on voit la solution semblable analytique Pattle 1959 :

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{6\hat{t}^{1/3}} (9^{2/3} - (\frac{\hat{x}}{\hat{t}^{1/3}})^2)$$

etc

7 Exemples de résolution numérique, avec *Basilisk*

7.1 Codes de résolution

Les problèmes font intervenir des laplaciens, on peut coder avec :

- FreeFem+++ (Jules et al [7]),
- *Basilisk*
- Un code utilisé dans l'industrie est MODFLOW 2005, https://water.usgs.gov/ogw/modflow/MODFLOW-2005-Guide/parameter_value_file.html
- Feflow, aux éléments finis, <https://en.wikipedia.org/wiki/FEFLOW>
- CATHY (CATchment HYdrology) <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/2016WR019277>
- MARTHE <https://www.brgm.fr/fr/logiciel/marthe-logiciel-modelisation-ecoulements-souterrains>
- Un code de 1967 "simulation par modèle mathématique des écoulements souterrains permanents et transitoires. application a l'étude de l'exploitation des nappes", Lagarde et Lanchon, La Houille Blanche <https://www.shf-lhb.org/articles/lhb/pdf/1967/02/lhb1967010.pdf>

7.2 cas saturé avec *Basilisk*

Il s'agit de résoudre un problème inspiré de rapport de Todd & Bear 1959 <https://escholarship.org/uc/item/1nx0q3dd>, dans ce rapport, la résolution est faite par un calculateur à analogie électrique, ancêtre des calculateurs actuels.

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/toddbear59.c>

les résultats ont été présentés au §3.2 sur la figure ??, ??

7.3 Exemple de résolution de l'Equation de Richards avec *Basilisk*

Une mise en oeuvre de la solution est proposée <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/richards.c>
"Saturation-based model"

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) \text{ est écrit } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$D(h)$ diffusivité hydraulique

La surface est en $x = 0$, on impose $h = 1$, on impose un Neumann à la profondeur $x = L_0$. C'est le problème d'imbibition

Self similar solution $\eta = x/\sqrt{t}$ et

$$-\frac{\eta}{2} \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(D \frac{d\theta}{d\eta} \right)$$

voir figure 21.

7.4 Exemple de résolution de Dupuit-Boussinesq avec *Basilisk*

Résolution du "Basic problem" en 2D, écoulement potentiel incompressible

$$\bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - 1, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

résolu :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

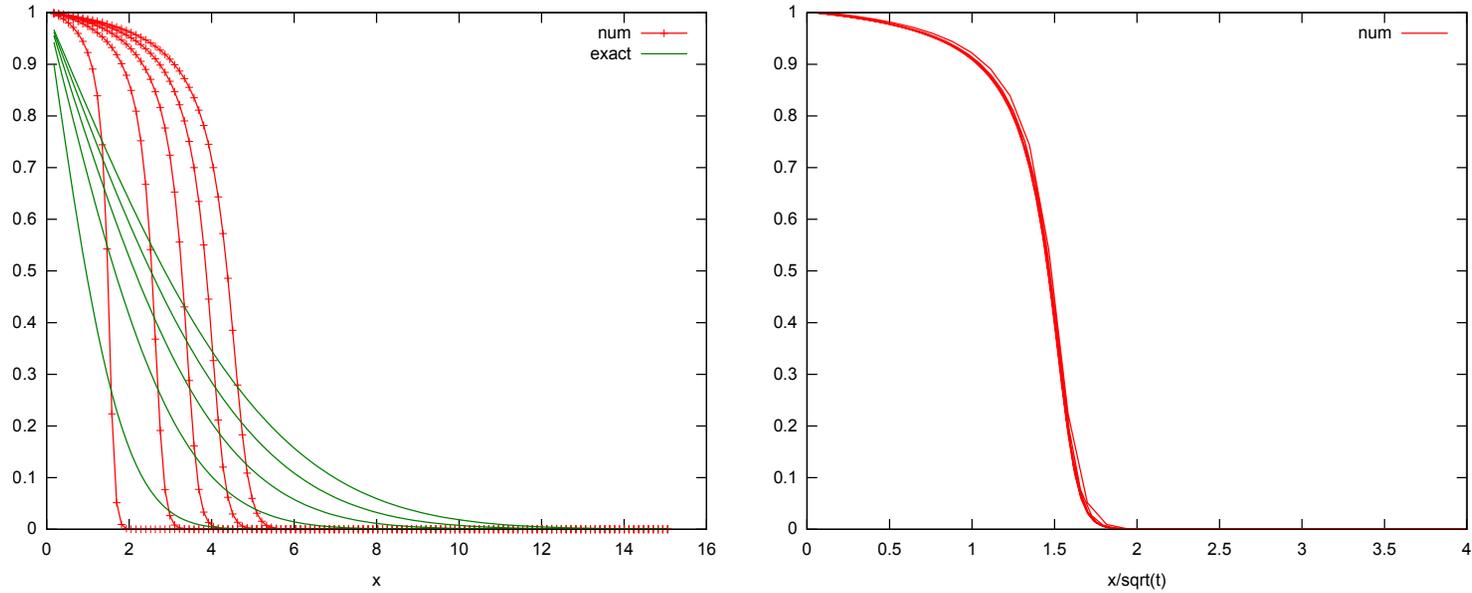


FIGURE 21 – Résolution de l'équation d'imbibition de Richards, avec $D = (0.05/(1.05 - \theta))^2$ en rouge. En vert le cas à coefficient D constant de la diffusion classique. A gauche, avancée du front en fonction du temps, à droite superposition de la solution semblable x/\sqrt{t} .

en espace $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) > \bar{y} > 0$ and $0 < \bar{x} < L_0$ au mur $\bar{y} = 0$ vitesse de glissement.

The shape of the aquifer $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t})$ has to be found. At time zero $\bar{h}(\bar{x}, \bar{t} = 0) = 1$.

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGE0/dupuit2D.c>

The flow is in thin layer we have almost an hydrostatic pressure :

$$p = \rho gh$$

so that the longitudinal velocity is proportional to the slope, and the flux is :

$$q = -K \rho g h \frac{\partial h}{\partial x}$$

and by mass conservation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \rho g \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

case of the Dupuit steady solution, q is constant so that

$$q = \frac{K(h_1^2 - h_2^2)}{2L}$$

la forme de la surface est une parabole (parabole de Dupuit)

$$h = \sqrt{h_1^2 - \frac{2qx}{K}}.$$

The Dupuit-Boussinesq equation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = K \rho g \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

has a self similar solution of variable

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

and the mass flow rate is proportional to $t^{-1/2}$. That is visible at the beginning, after a while, the flow is no more self similar as it goes to the Dupuit parabolic solution.

7.5 Exemple de résolution de Dupuit-Boussinesq avec *Basilisk*

Filling of a 1D aquifer due to a continuous rain, there is an output of water in $x = 0$ where water goes out from soil. In the aquifer we have Darcy flow, we solve Dupuit-Boussinesq.

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/dupuitboussinesq.c#202>

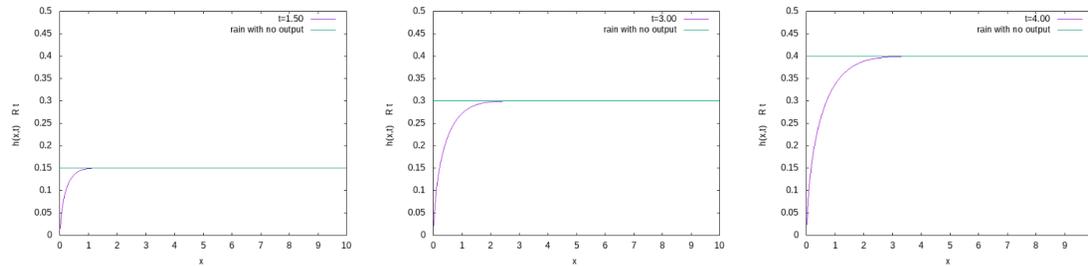


FIGURE 22 – Filling an aquifer with a constant rain at three times

7.6 Vauclin avec *Basilisk*

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/HYDGEO/vauclin.c>

The river full of water imbibes the soil which is at first unsaturated. As time evolves, saturation (i.e. $p > 0$) arises. A water table is generated at the bottom over the impervious soil in $y = 0$, thickness of the porous media is H_d .

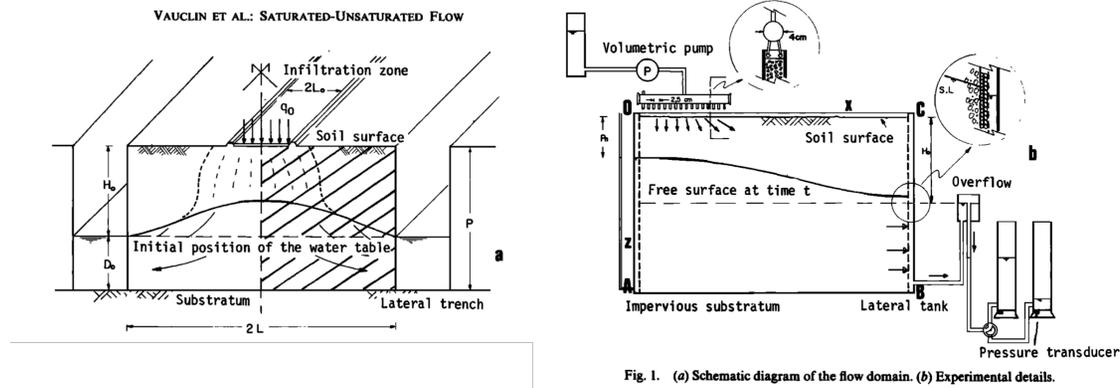


Fig. 1. (a) Schematic diagram of the flow domain. (b) Experimental details.

FIGURE 23 – Expérience de Vauclin et al, 1979, Water Resources Research

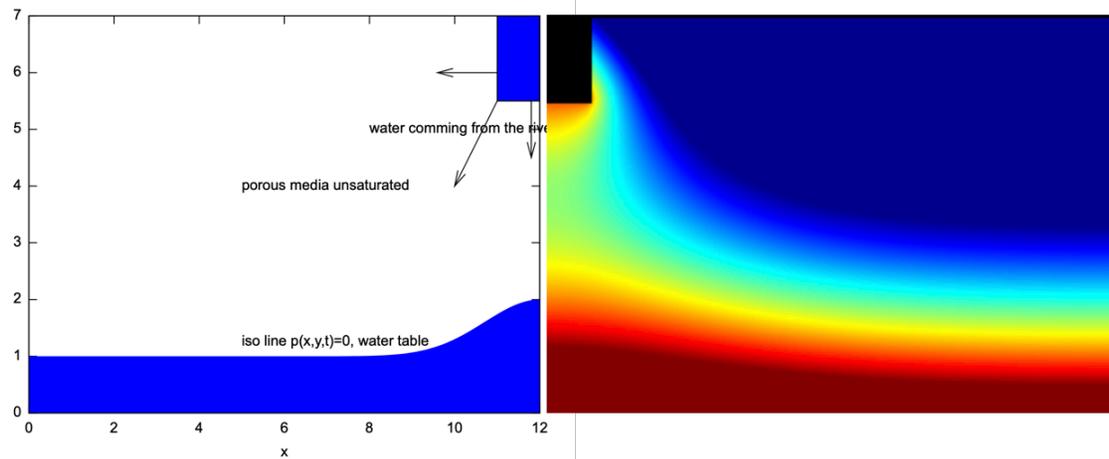


FIGURE 24 – Vauclin’s experiment, and a numerical plot with *Basilisk*

We model this with Darcy unsaturated theory. We have to solve a Darcy problem without dimension :

$$u = -\beta(p)\frac{\partial p}{\partial x} \text{ and } v = -\beta(p)\left(\frac{\partial p}{\partial y} - 1\right)$$

β is proportional to the permeability or the conductivity and is function of the pressure p .

Conservation of water is $C(p)\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ so that we have to solve an unsteady non linear diffusion problem :

$$C(p)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(p)\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta(p)\frac{\partial p}{\partial y} - 1\right)$$

with $C(p)$ and $\beta(p)$ given functions, as p is without dimension p is as well h . The so called 'hydraulic head' is then $H = p + y$ (again p is without dimension). Note that if pressure is negative, the porous media is unsaturated, if pressure is positive the porous media is saturated. The *ad hoc* functions $C(p)$ and $\beta(p)$ are given thereafter.

evaluate physical quantities β permeability and ρ density as function of pressure, if pressure is negative, the porous media is unsaturated, if pressure is positive the porous media is saturated

$$C = 1 \text{ for saturated, and for unsaturated : } C = \frac{1}{1 + \alpha_1(|p|^{n_1})}$$

$$\beta = 1 \text{ for saturated, and for unsaturated : } \beta = \frac{1}{1 + \alpha_2(|p|^{n_2})}$$

empirical values α_1 , α_2 , n_1 and n_2 are provided... and the density is 1 by adimensionalisation

8 Conclusion

Ce cours nous donne les grands classiques de la modélisation des écoulements souterrains dans les milieux poreux (Darcy, Dupuit Boussinesq, Richards...) avec un point de vue mécanique des fluides (Navier Stokes, écoulements très visqueux de Stokes, couche limite de Prandtl). On consultera dans la très riche littérature sur le sujet qui a souvent un œil plus "hydrologique" et plus appliqué. A l'issue de ces quelques sections certains aspects devraient donc être précisés suivant les échelles d'étude et le besoin de détail. Par exemple, l'imbibition et tous les phénomènes à petite échelle dans la frange capillaire qui ne sont ici que très sommairement évoqués. Du point de vue des grandes échelles, il y a encore aussi beaucoup à dire. Il faudrait préciser les aspects de couplage entre l'eau interne et l'eau externe, c'est à dire le couplage Darcy/ Saint-Venant (important pour les inondations et pour la recharge des aquifères). Du point de vue modélisation intermédiaire, il manque la description des puits (qui passe par une description 2D axisymétrique de Dupuit-Boussinesq) et leur couplage à l'aquifère...

On peut ensuite parler de la diffusion (par exemple de polluants, de matières radioactives etc) dans le sous sol en introduisant l'équation de convection diffusion (avec possiblement des effets aussi de dissolution des roches). Ceci ouvre une vaste classe d'applications.

Au niveau des applications, encore, on a parlé principalement de l'eau, on a parlé des réservoirs d'eau, mais il y aussi les réservoirs de pétrole... Ce sont les mêmes équations en génie pétrolier, plutôt que le remplissage de l'aquifère par la pluie, le problème est celui de la vidange complète du réservoir pour ne pas perdre de pétrole.

On peut parler aussi de l'injection de gaz pour faire des stocks stratégiques (injection dans des milieux caverneux/ fracturés/ poreux), et maintenant on parle beaucoup de l'injection de CO_2 pour son stockage souterrain ...

Tout ce qui est stockage et utilisation de la ressource d'eau souterraine ne peut être compris qu'avec les outils mécaniques esquissés ici.

8.1 Annexe : Loi de Darcy-Forchheimer, présentation à la Jackson

Ce paragraphe est une annexe, il est à sauter en première lecture, il traite d'une vision moyenne de l'écoulement du fluide moyen u^f et surtout de son établissement en temps (cf Zhou). En effet la loi de Darcy Instationnaire est

$$\rho_f \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u}, \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

mais si on veut aller à une vitesse plus grande, ce n'est pas $\rho_f \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u}$, le terme non linéaire d'advection est subtilement différent. Il faut repasser à l'écoulement moyen du fluide.

Si on considère le point de vue du fluide moyen, on écrit les équations d'évolution de ce fluide dans le cas avec non linéarité de vitesse et le terme instationnaire complet de la dérivée totale. Pour le fluide moyen s'écoulant dans le milieu poreux, on a l'incompressibilité, et il faut voir que les contraintes se partagent entre des contraintes sur le fluide d'où le $(1 - \phi)$ et des contraintes sur la matrice solide qui est ici fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial((1 - \phi)u_i^f)}{\partial x_i} = 0, \\ \rho_f(1 - \phi) \left[\frac{\partial u_i^f}{\partial t} + u_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} \right] = -(1 - \phi) \frac{\partial p^f}{\partial x_i} - f_i + (1 - \phi) \rho_f g_i, \end{array} \right. \quad (1)$$

ϕ est la fraction volumique du granulaire $u_i^p = 0$, les particules sont fixes, u_i^f est la vitesse du fluide. Le terme f_i représente les forces d'interaction entre la phase fluide et solide, en plus de la flottabilité.

Il faut donc modéliser cette force d'interaction, le plus simple est alors d'en faire un développement en puissance de la vitesse relative (avec une forme Darcy Forchheimer) :

$$f_i = \frac{\mu}{k} (1 - \phi)^2 u_i^f + \frac{\rho_f d}{\kappa_i} (1 - \phi)^3 |u_i^f| u_i^f \quad (2)$$

C'est donc le système précédent que l'on doit résoudre si on veut faire des écoulements instationnaires. On n'écrit pas l'accélération avec u_i mais avec u_i^f .

Comme les vitesses sont faibles, on néglige le terme d'accélération avec u_i^f (on néglige $+u_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j}$) et comme $u_i = (1 - \phi)u_i^f$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \\ \rho_f \frac{\partial u_i}{\partial t} = -(1 - \phi) \frac{\partial p^f}{\partial x_i} - (1 - \phi) \frac{\eta_f}{\kappa_v} u_i + (1 - \phi) \frac{\rho_f d}{\kappa_i} |u_i| u_i + (1 - \phi) \rho_f g_i, \end{array} \right. \quad (3)$$

on voit que la bonne expression est :

$$\frac{\rho_f}{1 - \phi} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{u}, \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

Dans le cas stationnaire on retrouve que la vitesse u_i satisfait à l'équation de Darcy Forchheimer Par la suite, on ne se pose plus de question d'accélération du fluide, on suppose qu'il est toujours à l'équilibre, et on ne distingue plus ρ_f , on écrit simplement ρ .

Références

- [1] Jacob Bear 1988 “Dynamic of fluids in porous media” Dover Publications,
- [2] Castro-Orgaz, O., Giráldez, J. V., and Robinson, N. I. (2012), Second-order two-dimensional solution for the drainage of recharge based on Picard’s iteration technique : A generalized Dupuit-Forchheimer equation, *Water Resour. Res.*, 48, W06516, doi :10.1029/2011WR011751. <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1029/2011WR011751>
voir aussi C. Nucci 2018 <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072118300561>
- [3] M. Firdaouss, M. Guermond, P. Le Quéré ”Nonlinear correction to Darcy’s law at low Reynolds numbers”, *J. Fluid Mech.* 343 (1997) 331–350. https://people.tamu.edu/~guermond/PUBLICATIONS/firdaouss_guermond_lequere_JFM_1997.pdf
- [4] Guérin, A., Devauchelle, O., & Lajeunesse, E. (2014). ”Response of a laboratory aquifer to rainfall.” *Journal of Fluid Mechanics*, 759, R1. doi :10.1017/jfm.2014.590 <https://hal.science/hal-01499504>
- [5] A. Guerin Thèse <http://adrienguerin.fr/papers/manuscrit.pdf>
- [6] Guyon Hulin Petit ”Hydrodynamique physique” nouvelle édition
- [7] Jules, V., Lajeunesse, E., Devauchelle, O., Guérin, A., Jaupart, C., & Lagrée, P.-Y. (2021). ”Flow and residence time in a two-dimensional aquifer recharged by rainfall”. *Journal of Fluid Mechanics*, 917, A13. doi :10.1017/jfm.2021.221 <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/PDF/flow-and-residence-time-in-a-two-dimensional-aquifer-recharged-by-rainfall.pdf>
- [8] F. Lafolie, R. Guennelon, and M. Th. van Genuchten ”Analysis of Water Flow under Trickle Irrigation : I. Theory and Numerical Solution” *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 53, September-October 1989
- [9] Guillain de Marsily, Cours d’hydrologie, UP VI 1981-2004 https://www.pseau.org/outils/ouvrages/upmc_cours_d_hydrogeologie_marsilly_2004.pdf
- [10] <http://mquintard.free.fr/cours/cours.html>
- [11] L. A. Richards ” Capillary conduction of liquids through porous mediums” *Physics* 1, 318 (1931) ; doi : 10.1063/1.1745010
- [12] <http://step.ipgp.fr/images/e/e4/GE2008ch2.pdf>
- [13] Todd & Bear 1959 ”River Seepage investigation”
- [14] O. Thual Hydrodynamique de l’environnement. Edition : 2010 Pages : 328 ISBN : 978-2-7302-1564-0
<http://thual.perso.enseeiht.fr/xsee/2010/00main.pdf>
- [15] TH. Vangenuchten ”A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils” *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 44, 1980
- [16] van de Giesen, N. C., Parlange, J.-Y., and Steenhuis, T. S. (1994), Transient flow to open drains : Comparison of linearized solutions with and without the Dupuit assumption, *Water Resour. Res.*, 30(11), 3033- 3039, doi :10.1029/94WR01733.
- [17] M. Vauclin , D. Khanji , G. Vachaud “Experimental and numerical study of a transient, two dimensional unsaturated saturated water table recharge problem” *Water Resour. Res.*, 15(5), 1089- 1101, doi :10.1029/WR015i005p01089.
- [18] Yury Villagrán Zaccardi, Natalia Alderete, and Nele De Belie ”Lucas-Washburn vs Richards equation for the modelling of water absorption in cementitious materials” *MATEC Web of Conferences* 199, 02019 (2018)
- [19] Vuillet M. PhD
- [20] Whitham Linear and non linear waves, Wiley 1974
- [21] Wodié, J.-C. & Levy, T. 1991 ”Correction non linéaire de la loi de Darcy” *C. R. Acad. Sci. Paris II* 312, 157-161.
- [22] ftp://iris.metis.upmc.fr/m2HH/Support_cours_Ledoux/Cours%20hydrog\unhbox\voidb@x\bgroupl\et\unhbox\voidb@x\setboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactorologie-1.pdf

The web page of this text is :

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/>

The last version of this file is on :

http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv_aquifere.pdf

