

Équations de Saint Venant et application aux mouvements de fonds érodables. "MU4MEF04 - Ondes et Écoulements en milieu naturel", M1 SU

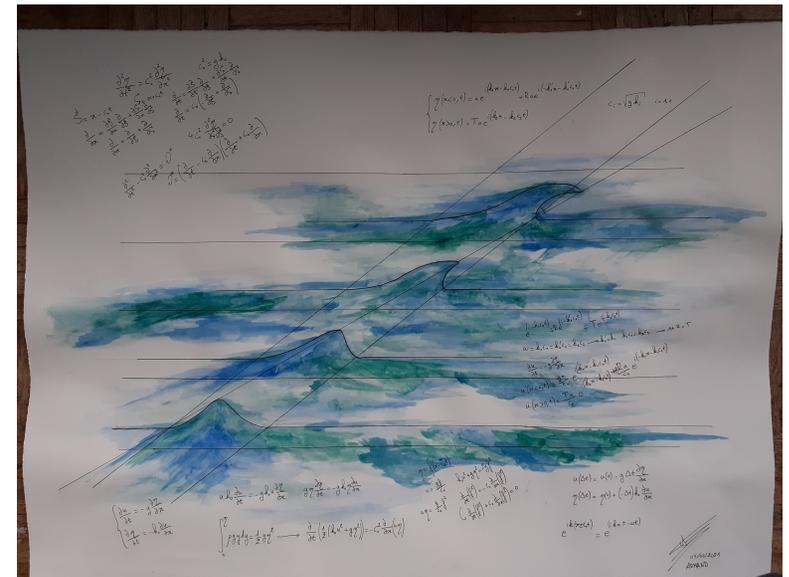
P.-Y. Lagrée
CNRS & Sorbonne Université, UMR 7190,
Institut Jean Le Rond d'Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France
pierre-yves.lagree@upmc.fr ; www.lmm.jussieu.fr/~lagree

30 juin 2025

Résumé

Ces notes de cours traitent des équations de Saint-Venant et de leur application. Les premières pages rappellent différents événements de l'actualité mettant en jeu des inondations, des tsunamis ou des ruptures de barrages. Les équations sont ensuite démontrées par la méthode des "tranches" puis par une approximation de "couche limite". Différentes simplifications pertinentes correspondant souvent à différentes échelles en jeu sont ensuite proposées et étudiées (analytiquement et numériquement) : onde d'inondation, onde diffusive, résolution linéarisée, rupture de barrage, ressaut, équation du remous, tsunamis, marées... L'influence de la dispersion est évoquée pour introduire KdV (l'onde solitaire) et les mascarets.

- cours, notes... <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/index.html>
 - page Moodle pour l'année 2024-2025 <https://moodle-sciences-24.sorbonne-universite.fr/course/view.php?id=4877>
 - 2024-2025 : salle 24-34 207
 - http://master.spi.sorbonne-universite.fr/fr/mecanique-des-fluides/m1-mf2a/test_planning.html
- MU4MEF04 19/02 05/03 12/03 19/03 26/03 02/04 24-34 salle 207
19 février. 2024 interruption la semaine du 24 au 28 fév. puis reprise jusqu'au 09/04 uniquement le mercredi de 08 :30 à 12 :30



Armand Ledanois 2021

Qui aurait pu prédire (...) la crise climatique aux effets spectaculaires encore cet été dans notre pays ?

E.M. 31/12/2022

1 Introduction

1.1 Généralités

”Source de toute vie sur Terre, l’eau est un enjeu évident pour l’humanité.”

”La compréhension des écoulements en milieu naturel est un enjeu fondamental pour la société humaine”, voici deux phrases bateau, mais elles sont vraies...

Enjeu scientifique (modélisation, simplification pour compréhension des phénomènes et du monde qui nous entoure), industriel (par l’énergie que l’on en tire depuis les anciens moulins à marée, aux actuelles usines marémotrices et aux fermes à courant en cours, ainsi que toute l’énergie des barrages, appelée houille blanche dans la région de Grenoble...) et enfin et surtout humain car la majeure partie des humains vivent le long des fleuves ou des côtes et que l’eau est indispensable à la vie. (70 % des côtes sont en érosion, 80 % de la population mondiale habite à basse altitude et plus de 20 % à proximité d’un océan ou d’un estuaire. (source [https://fr.wikipedia.org/wiki/Cote_\(geographie\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Cote_(geographie)))).

De nombreux lieux sont en péril par ensablement, sédimentation : Mont St Michel, Lagune Venise, Lagune Cocody (Afrique de l’Ouest), ensablement des ports, comblement par sédimentation des barrages, grands deltas...

au contraire, l’érosion côtière provoque la reculée des terres (emblématique ”Signal” [https://fr.wikipedia.org/wiki/Le_Signal_\(immeuble\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Le_Signal_(immeuble)))...

On peut faire des Polders pour augmenter la surface habitable, : Hollande Danemark (historiquement, les alluvions du Nil sont à l’origine de la civilisation des Pharaons)

Ce sont des problèmes d’aménagement du territoire BRGM (<https://www.brgm.fr/fr>), et de nombreuses sociétés de service, Veolia, Artelia, etc ;

Comme déjà signalé, on tire de l’énergie de l’eau, la parties liées à l’énergie intéressent EDF (arrivées d’eaux aux centrales nucléaires, hydrauliques) et les autres acteurs de l’énergie plus ou moins verte...

Il y a aussi les eaux à boire et les eaux usées, les égouts,

Veolia, gestion d’eau, Eau de Paris, re-traitement des eaux usées, distribution d’eau potable

dispersion de polluants, dispersion du COVID dans les égouts (action ”obépine” de SU)...

Notons que 3 personnes sur 10 dans le monde n’ont pas accès à des services d’eau potable.

Les écoulements ne sont pas toujours maîtrisés : Inondation par débordement de fleuves, identification de zones inondables,

Tsunamis, ressaut, mascaret.... 17,1 millions de français exposés aux différentes conséquences des inondations par débordement de cours d’eau, 1,4 million d’habitants exposés au risque submersion marine Plus de 9 millions d’emplois exposés aux débordements de cours d’eau et plus de 850 000 emplois exposés aux submersions marines (<https://www.bioaddict.fr/article/17-millions-de-francais-sont-exposes-a-un-risque-d-inondation-a3328p1.html>)

la pollution peut s’y déverser, prolifération d’algues

prévention, simulation des accidents

Codes EDF utilisés pour la protection de l’environnement, le calcul des tempêtes, de marées des courants de marées, pour estimer les contraintes exercées sur les ouvrages (ponts barrages, digues), aide à la navigation (prédiction des marées).

Bien entendu, les changements climatiques liés au réchauffement planétaire global ont une influence directe sur les sources ou sur les conditions aux limites de ces écoulements. Malheureusement, nous ne traitons pas ici cette partie thermique qui en est le moteur. Nous ne regardons en fait que les conséquences d’une partie de cette cause, et nous avons ici la vision ingénierie gestion du territoire. Par exemple, en se donnant un scénario de pluies sur une région, on pourra prédire des inondations associées. Des écoulements nous pourrions prévoir l’érosion des côtes. Dans un autre registre, se donnant un déplacement de terrain causé par un tremblement de terre on pourra prédire le tsunami et les raz de marées associés.

1.2 Exemples d'évènements :

D'innombrables exemples d'inondations souvent catastrophiques se produisent régulièrement, en voici quelques uns au hasard des mythes, de l'histoire et de l'actualité :

- inondations

- Un problème antédiluvien : l'épopée de Gilgamesh dont les racines viennent d'il y a 3200 ans https://fr.wikipedia.org/wiki/epopee_de_Gilgamesh. L'Épopée raconte plusieurs exploits du roi Gilgamesh, c'est le plus vieux récit écrit de l'humanité, il a été retrouvé à Ninive sur des tablettes transcrites vers -700. L'histoire du déluge et du navire de Utnapishtî qui a sauvé quelques hommes et les animaux y tient une grande place à la fin de l'épopée.

- captage et stockage de l'eau sont intimement liés au développement des sociétés humaines <https://lejournal.cnrs.fr/articles/lhydraulique-une-histoire-vieille-de-9000-ans>

- En 709, soixante ans avant l'avènement de Charlemagne, un coup de mer a "détaché" Jersey de la France. D'autres sommets des terres antérieurement submergées sont, comme Jersey, visibles. Ces pointes qui sortent de l'eau, sont des îles. C'est ce qu'on nomme l'archipel normand, mythe colporté par Victor Hugo (https://fr.wikipedia.org/wiki/Mythe_du_raz-de-mar%C3%A9_de_mars_709)

- Inondations de Grenoble 1219 et 1859

- Mac Mahon : dans la nuit du 23 au 24 juin 1875, une importante crue de la Garonne se produit. Visitant des villes et des villages dévastés, ne sachant que dire, il déclara le célèbre « que d'eau... que d'eau!... » Le préfet du département lui répondit alors : « Et encore, Monsieur le Président, vous n'en voyez que le dessus...! » https://fr.wikipedia.org/wiki/Patrice_de_Mac_Mahon

- Grande inondation de Paris 1910

- ...

- Crues catastrophiques aux Etats-Unis en mars 1936 et janvier 1937 (Janvier 1937, la Ohio Rivière couvre 70 % de Louisville, Kentucky, célèbre photo "There's no way like the American way" de Margaret Bourke-White)

<https://www.google.com/search?q=Margaret+Bourke-White%C2%A0%22There%E2%80%99s+no+way+like+the+American+way>

- Les inondations en 2013 ont fait environ 10.000 morts dans le monde

- Les inondations en 2013 ont coûté 150 10⁹ € dans le monde

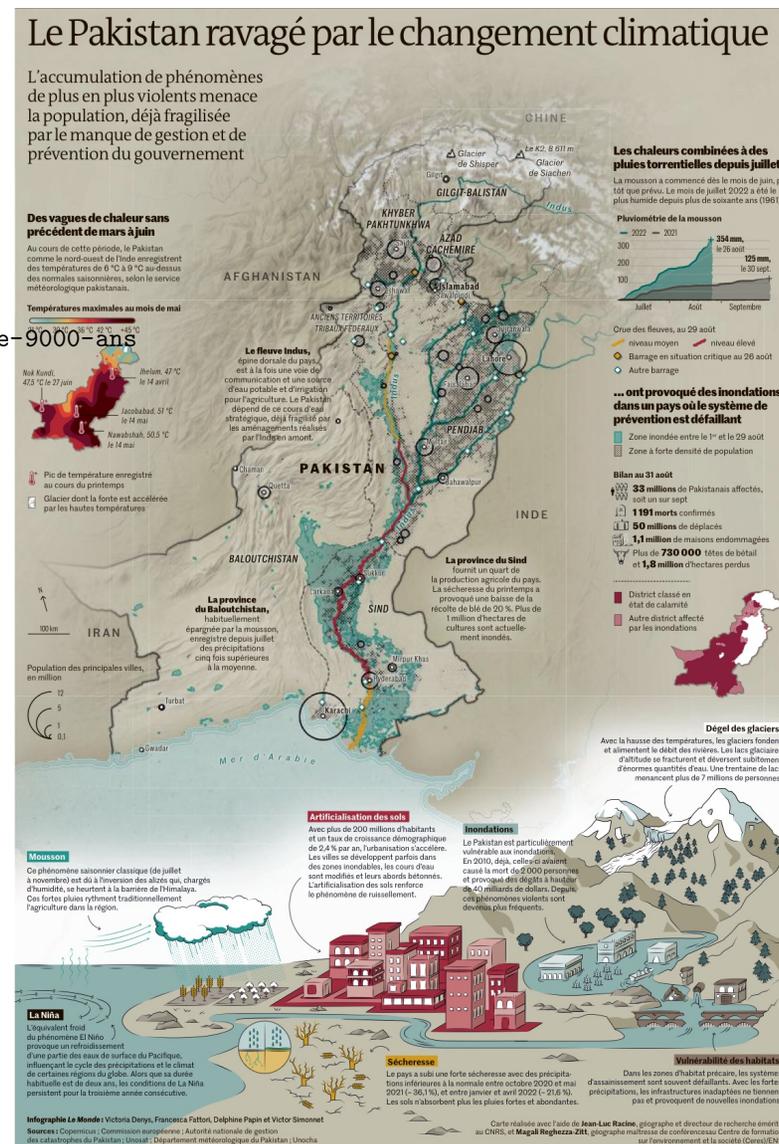
- Les inondations en 2013 ont couté 50.000.000 € en dégâts en France.

- inondation Grande Bretagne décembre 2015

- Cannes inondation octobre 2015 (<https://www.youtube.com/watch?v=4ZoEPpG4RqY>)

- Brague inondation octobre 2015, 250 mm de pluie en 3 heures, 20 victimes 600ME dégâts assurés

- crues de la Seine et de la Loire en 2016; plus d' un milliard d'Euros (https://www.aif.fr/system/files/files/rapport_rex_juin_2016_interminist.pdf), deuxième évènement le plus couteux après Xynthia



Le Monde 03 Août 2022, le Pakistan pose la plupart des problèmes de ce cours, sauf la partie thermique

- 22/01/2018 alerte inondation, 1m d'eau à Ornans (Doubs), niveau de la Seine et du Rhin inquiétant, le Zouave a les pieds dans l'eau
- mercredi 24 janvier 2018, la présence d'eau a été constatée dans des galeries techniques situées au 2ème sous-sol du campus Pierre et Marie Curie. Des pompes y sont réalisés.
- Inondations meurtrières dans la nuit du 18 au 19 juin 2018 à Cocody Abidjan, environ 20 morts.
- Inondation meurtrières dans l'Aude nuit du 14 octobre 2018
- 8 avril 2019 inondations en Iran.
- 23 octobre 2019 inondation dans l'Hérault, 3 mois en 48h, inondation en Catalogne et en Italie la veille
- 11 mars 2020 Apilly : commune inondée depuis 1 mois ; le barrage de Manicamp déverse l'eau de l'Oise sur cette commune.
- Pluies fortes en Afrique de l'Est, inondation et coulée de Boues, 120 morts au Kenya le 06/12/19 (Le Monde)
- 2020 inondations au Japon pendant le confinement
- 2020 inondations en Chine
- 2020 "La Chine est confrontée à des crues exceptionnelles, Plus de 140 personnes sont mortes (région de Wuhan), L'état de certains barrages inquiète. 20 millions de personnes affectées, pertes 7.76 Milliards d'Euros. Barrage des trois Gorges Le monde 12-13/07/20
- Les crues du 2 octobre 2020 (tempête Alex) ont littéralement dévasté certaines parties des vallées de la Vésubie et de la Roya dans l'arrière-pays niçois. Des travaux colossaux de reconstruction des routes, de ponts, des réseaux d'eau et d'électricité, sont nécessaires désormais pour un coût d'au moins un milliard d'euros (France Bleue). - Crues 2021 a Garonne a atteint 10,22 m à Marmande.
- février 2021 Rupture d'un glacier dans l'Himalaya, au moins dix-huit morts et deux cents disparus : La rupture d'une partie d'un glacier dans le nord de l'Inde a provoqué dimanche des flots torrentiels qui ont tout emporté sur leur passage, y compris un barrage hydroélectrique. https://www.youtube.com/watch?v=Ab4Px_JVb8A
- Journée de l'eau 22 mars 2021
- 15 juillet 2021 At least 20 people dead in destructive flooding that hit Germany and Belgium this week Heavy rainfall across parts of western Europe has resulted in destructive and unfortunately <https://twitter.com/i/topics/news/e285954819?cn=ZmxleGlibGVfcmlVjcw%3D%3D&refsrc=email>
- Crues 14 et 15 juillet 2021, en Allemagne et Europe de l'Ouest, la crue est due à des précipitations record pour la saison. Une des pires catastrophes naturelles du début du siècle en nombre de victimes.
- novembre d'importantes inondations ont lieu en Colombie-Britannique (Canada), provoquant des glissements de terrain. Plusieurs personnes sont portées disparues.
- Inondation en Australie mars 22 <https://www.sudouest.fr/environnement/meteo/intemperies/inondations-en-australie-le-bilan-s-eleve-a-20-morts-des-mil>
php
- Inondations en janvier 2023 en Californie
- Au Venezuela, les inondations aggravent la crise économique https://www.lemonde.fr/ameriques/article/2018/08/10/au-venezuela-les-inondations-aggravent-la-5341018_3222.html#xtor=AL-32280270
- Les crues du fleuve Orénoque touchent huit Etats du sud du pays, affectant les maisons et récoltes, et favorisant la résurgence de maladies. — 10.08.2018 à 04 :06
- Inondations en Iran : au moins 76 morts en un mois Vingt-cinq des 31 provinces du pays ont été touchées. Les dégâts s'élèvent à environ 2 milliards d'euros. Le Monde avec AFP Publié le 14 avril 2019 à 11h02
https://www.lemonde.fr/planete/article/2019/04/14/au-moins-76-morts-dans-les-inondations-et-les-pluies-qui-frappent-l-iran-depuis-un-mois-5449988_3244.html
- près de 230 MORTS dans des inondations dantesques EN Allemagne et EN Belgique en 2021.
- Espagne : Samedi 2 et dimanche 3 septembre 2023, des violentes intempéries ont provoqué des inondations, coulées de boue et dégradations conséquentes <https://france3-regions.francetvinfo.fr/occitanie/hautes-pyrenees/lourdes/videos-inondations-en-espagne-la-france-n-echappera-pas-a-ces-phenomenes-viol.html>
- Grèce 05/09/23 https://www.lemonde.fr/planete/article/2023/09/10/inondations-en-grece-15-morts-selon-un-nouveau-bilan_6188770_3244.html
- Inondations dans le Nord de la France : Novembre 2023
- Inondations 10 octobre 2024 https://www.lemonde.fr/planete/article/2024/10/10/kirk-des-precipitations-records-pour-l-automne-aggravees-par-le-deregl-6348472_3244.html
- septembre et octobre 2024, l'Ardèche a été sous l'eau après l'épisode cévenol le plus intense sur deux jours jamais enregistré, le nord de la France a été inondé par la tempête Kirk, tandis que Boris faisait 22 morts en Europe centrale. Dans le sud-est des Etats-Unis, les ouragans Helene et Milton ont provoqué plus de 250 morts.
- Inondations les 17 et 18 octobre 2024, cumuls de précipitations entre 650 et 700 mm de précipitations en 48 heures. 17 environ 400 millions € de dégâts chez les particuliers
- ESV 4-

liers <https://www.liberation.fr/environnement/climat/le-cout-des-inondations-des-17-et-18-octobre-evalue-entre-350-et-420-millions-deuros-20241024>
 FYG5TVHVS5HYTC6SUSWZJVZMSA/

- 31/10/24 terribles inondations qui ravagent la région de Valence, faisant plus de 200 morts en Espagne
- Les inondations en Europe en 2024 ont coûté 15 Milliards € en dégâts et causé 335 morts.
- 27 janvier 25 Inondations de l'Ile et la Vilaine à Rennes

- Tsunami

- en -479 l'armée Perse est détruite en attaquant les grecs suite à un retrait des eaux créé par un tsunami. Les Grecs, vainqueurs y voient la juste vengeance de Poseidon, Thucydide y voit la conséquence d'un séisme.
- Lac Léman 563, "Tauredeum", destruction de Genève
- 1 novembre 1755 tremblement de terre et raz de marée à Lisbonne : "À peine ont-ils mis le pied dans la ville, en pleurant la mort de leur bienfaiteur, qu'ils sentent la terre trembler sous leurs pas ; la mer s'élève en bouillonnant dans le port, et brise les vaisseaux qui sont à l'ancre. Des tourbillons de flammes et de cendres couvrent les rues et les places publiques ; les maisons s'écroulent, les toits sont renversés sur les fondements, et les fondements se dispersent ; trente mille habitants de tout âge et de tout sexe sont écrasés sous des ruines." Candide 1759, Voltaire
- 1958 Mégatsunami de 1958 de la baie Lituya https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9gatsunami_de_1958_de_la_baie_Lituya
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_tsunamis_notables 22 mai 1960 Chili
- tsunami de Sumatra 26/12/2004 séisme de magnitude 9.1, 14 pays touchés 230 000 morts et disparus
- tsunami Fukushima 11/03/2011
- 2015 The Tyndall Glacier landslide occurred at about 8 :19 pm local time on 17th October 2015 at the toe of the Tyndall Glacier. The landslide is enormous – Stark and Ekstrom estimate from the seismic data that it had a mass of about 180 million tonnes, which would give a volume in the order of 72 million cubic metres. The landslide flowed into Taan Fjord, triggering a localised tsunami that was detected 155 km away <https://blogs.agu.org/landslideblog/2016/01/02/tyndall-glacier-landslide-1/>
- Tsunami généré par un glissement de terrain dans le Fjord de Karat Groenland, 17/06/2017, 4 morts
- Tsunami aux Célèbes sept 2018.
- Tsunami aux Iles Tonga (Hunga Tonga) 15 janvier 2022 <https://www.youtube.com/watch?v=z0MRwyNhqJ4>
- Suivi des tremblements de terre <https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/map/?extent=-84.16085,-175.42969&extent=63.70472,188.08594> générateurs possibles

- ruptures de barrage

- 02/12/1959 rupture du barrage EDF de Malpasset (Var) 423 victimes. La rupture du barrage de Malpasset en 1959 a été très documentée à l'époque (les gendarmes ont mesuré l'extension maximale, des transformateurs EDF en disjonctant ont donné l'heure de passage de la vague), cette documentation en fait un cas de simulation à re simuler.
- rupture du barrage de Vajont, 09/10/1963, 3 ans après sa mise en eau, 1900 morts dans la vallée du Piave.
- La rupture du barrage de Banqiao (Chine du nord), 1975, aurait causé plus de victimes que n'importe quelle autre rupture de barrage.
- le barrage d'Oroville aux US qui risquait de se déverser en février 2017..https://fr.wikipedia.org/wiki/Crise_du_barrage_d%27Oroville_de_2017. à noter un an après en Colombie : un barrage hydroélectrique en construction menace de céder : 25 000 personnes évacuées 200 000 habitants en danger https://www.francetvinfo.fr/meteo/inondations/alerte-rouge-en-colombie-un-barrage-menace-de-ceder_2763047.html.
- Le plus haut barrage des Etats-Unis, situé dans la région d'Oroville et plein à ras bord après des semaines de fortes pluies, menace de céder. fv 2017
- 25/01/19 rupture du barrage de Brumadinho 150 morts 200 disparus.
- 1944, les marais et les champs de Ouistream ont été inondés par rupture des barrage de l'Orne de nombreux parachutistes alliés sont morts noyés dans la nuit du 5 au 6 juin 1944
- Catastrophe du lac Nyos Cameroun 1986 https://fr.wikipedia.org/wiki/Lac_Nyos
- 29/082018 Rupture d'un barrage en Birmanie, des milliers de déplacés En savoir plus sur http://portail.free.fr/actualites/monde/7840502_20180829_rupture-de-barrage-en-birmanie-des-milliers-de-deplacés.html#GteVZeM1ythVxwMD.99
- Le Monde.fr Brésil : après la rupture d'un barrage minier, les chances "minimes" de retrouver des survivants Au moins neuf personnes sont mortes et 300 disparues

dans la tragédie, selon le dernier bilan des autorités de l'Etat du Minas Gerais. Le barrage avait été inspecté le 10 janvier.

- Inondations au Canada : des milliers d'évacués près de Montréal après la rupture d'une digue La digue végétale a cédé, entraînant une montée subite des eaux, parfois de 1,5 mètre, dans plusieurs quartiers de la ville de Sainte-Marthe-sur-le-Lac. Le Monde avec AFP Publié le 28 avril 2019 à 16h16

https://www.lemonde.fr/climat/article/2019/04/28/inondations-au-canada-des-milliers-d-evacues-pres-de-montreal-apres-la-rupture-d-une-digue-5455948_1652612.html

- Guerre d'Ukraine déclarée par la Russie, l'armée russe détruit le barrage de Kryvyi Rig en septembre 2022 puis celui de Kakhovka. le 6 juin 2023, pour provoquer une inondation et détruire les installations énergétiques

- Réchauffement climatique en 2023 : 15 millions de personnes menacées par des crues de lacs glaciaires Les vidanges brutales de lacs glaciaires représentent un risque pour les populations qui vivent en aval, principalement en Inde, au Pakistan, au Pérou et en Chine https://www.lemonde.fr/planete/article/2023/02/07/rechauffement-climatique-15-millions-de-personnes-menacees-par-des-crues-de-lacs-glaciaires_6160885_3244.html

- Dans la nuit de dimanche 10 à lundi 11 septembre 2023, les deux barrages de retenue des eaux du Wadi Derna, l'oued qui traverse la ville de Derna, https://www.francetvinfo.fr/monde/afrique/libye/inondations-en-libye-pourquoi-la-tempete-daniel-a-t-elle-ete-aussi-meurtriere_6059937.html, l'oued qui traverse la ville de Derna, sur la côte est de la Méditerranée, ont lâché. Des torrents puissants ont détruit les ponts et emporté des quartiers entiers avec leurs habitants de part et d'autre de l'oued, avant de se déverser dans la mer.

<https://www.francebleu.fr/infos/environnement/catastrophe-de-la-berarde-les-explications-du-responsable-du-rtm-service-de-restauration-des-terres-jeudi-20-au-vendredi-21-juin-la-nature-s-est-dechainee-dans-le-massif-de-l-oisans>. La crue torrentielle du Vénéon a ravagé le hameau de La Bérarde (Rupture du Barrage glaciaire)

- glissements de terrain

- Glissements de terrain et de boue suite à des pluies (Rio Brésil 1988)

- Glissement de terrain en Éthiopie, au moins 113 morts dans l'éboulement d'une décharge à Addis-Abeba samedi 11 mars 2017.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Catastrophe_de_Koshe#:~:text=Des%20travaux%20de%20terrassement%20de,113%20morts%20selon%20Le%20Monde.

- 15 avr. 2017 - Au moins quinze personnes, dont quatre enfants, ont été tuées, vendredi 14 avril, au Sri Lanka, dans l'effondrement d'une montagne d'ordures (www.francetvinfo.fr Monde > Asie-Pacifique), ...

- Pluies fortes en Afrique de l'Est, inondation et coulée de Boues, 120 morts au Kenya le 06/12/19 (Le Monde)

- Suite aux incendies de Los Angeles, les pluies ont provoqué des coulées de boue Janvier 2018, 13 morts 47 disparus

<https://www.france3-regions.francetvinfo.fr/2Fauvergne-rhone-alpes/2Fvideo-effondrement-spectaculaire-glacier-suisse-nouveau-symbole-crise-du-html>

- Chine Shaanxi : 12 08 2023

- Savoie voie de chemin de fer avec l'Italie détruite 27 08 2023

- érosion

- 10 mai 2017 - Depuis 1984, la plage de Dooagh (Irlande) n'était que rochers. Le sable est revenu en quelques semaines, comme en atteste la photo ... <https://www.leparisien.fr/environnement/video-irlande-une-plage-disparue-depuis-pres-de-30-ans-refait-surface-10-05-2017-6934290.php>

- "Pacifica" érosion de la côte aux US, recul en 20 ans, 28 janvier 2016 Le Monde https://www.lemonde.fr/planete/video/2016/01/28/images-impressionnantes-de-l-er-4855511_3244.html

- "The frontline of climate change" The Norfolk village falling into the sea January 30, 2021 <https://www.edp24.co.uk/news/happisburgh-cliff-falls-coastal-erosion-a-41-51-25-N-1-13-17-O>

- 41°51'25" N 1°13'17" O Construit à 200m de la mer en 1965 à Soulac-sur-Mer l'immeuble "le Signal" est devenu inhabitable à cause de l'érosion du littoral, 21 Jnv 2021 les occupants reçoivent un dédommagement de 70% (Le Monde 31/01/21)

2 Observations sur le Ouaipe

Quelques exemples sur Youtube

- Hill Collapse Earthquake Nepal 2015 <https://www.youtube.com/watch?v=jwPdEHsQoSM>
- Massive hills down nepal 2015 <https://www.youtube.com/watch?v=KXI7vMyq05s>
- Dart Landslide January 2014 https://www.youtube.com/watch?v=Y6vs_lNBqwY
- landslide caught on tape <https://www.youtube.com/watch?v=7RKSNTU0RsY>
- Glissement de terrain filmé en direct https://www.youtube.com/watch?v=_yVu53jR2Mc
- Illgraben 28 juillet 2014, front de lave <https://www.youtube.com/watch?v=43R3mjiNBKc>
- Illgraben - le torrent fou et ses laves torrentielles https://www.youtube.com/watch?v=GswDVCNHA_4
- Raw Footage of Gigantic Mudflow in Austria <https://www.youtube.com/watch?v=RR400jDr0w8>
- AGU 2012 Real-scale field experiment of debris flow <https://www.youtube.com/watch?v=8CHF11fI1-c>
- Amazing Mega Flood At Dam In Taiwan <https://www.youtube.com/watch?v=vFQTDuFecLw>
- volcano Web Shorts : Debris Flows <https://www.youtube.com/watch?v=dx6ZQ0bNMmg>
- Debris Flow Dynamic 1 of 3 <https://www.youtube.com/watch?v=zpGP1uoCHR4s>
- Debris flow, awesome rockfall in Afghanistan <https://www.youtube.com/watch?v=mnI0d8iqfNU>
- Illgraben 22.07.2013, arrivée du front illgraben <https://www.youtube.com/watch?v=XNLYFyK5ZZc>
- Big Avalanches - YouTube Avalanches 101, Video Choc Glissement Terrain San Fratello Italie France2 Blogparfait <https://www.youtube.com/watch?v=6JxmFHFgf2I>
- Devastating Avalanche accident caught on Camera, destroys houses <https://www.youtube.com/watch?v=6JxmFHFgf2I>
- Mount Ruapehu avalanche Big Avalanche at Mt Ruapehu/ NZ - YouTube
- Manival debris flow https://www.youtube.com/watch?v=rQj_WKsxuGM
- cornwall 2011 <https://www.youtube.com/watch?v=QdsxtCtX5nk>
- <https://www.youtube.com/watch?v=oyBvARsJUyI>
- <https://www.youtube.com/watch?v=aaJUXQmec-Q>
- <https://www.youtube.com/watch?v=BKTG58Bpziw>
- https://www.youtube.com/watch?v=WEQrt_w7gN4
- North Cliffs Failure - Amazing Cliff Collapse caught on Camera! <https://www.youtube.com/watch?v=ZVjr4mii3cE>
- Cliff fall at Birling Gap 4/3/14 <https://www.youtube.com/watch?v=ffxCBnrATe8>
- "tsunami landslide" 2016 ? <https://www.youtube.com/watch?v=1sKKULTp3mA>
- Malaysia Landslide
st helen <https://www.youtube.com/watch?v=K5pidzTZslo>
- Mt St Helens blast and landslide recreation mov Mount St. Helens Disintegrates in Enormous Landslide <https://www.youtube.com/watch?v=UK--hvgP2uY>
- Epic Landslide Captured On Video In French Alps April 19, 2013 <https://www.youtube.com/watch?v=S1GTirtRP4c>
<https://www.spi0n.com/avalanches-de-printemps/>
- Incredible Rock Slide Caught on Tape
- <https://www.youtube.com/watch?v=w40JgaKNihY>
- Dramatic amateur footage of deadly mudslide in Colombia <https://www.youtube.com/watch?v=BKTG58Bpziw>
- <https://www.youtube.com/watch?v=iciLigLgSwc> Biggest landslides worldwide 12 :32
- <https://www.youtube.com/watch?v=KGh4g399wpc&list=PL153CDBA27D796CEC>
- <https://www.youtube.com/watch?v=mknStAMia0Q&index=4&list=PL153CDBA27D796CEC>
- mudflow Brésil https://www.youtube.com/watch?v=XvIg6oI_Obg
- inondations survenues à Trèbes dans l'Aude 15-octobre-2018 <https://www.francetvinfo.fr/replay-jt/france-2/20-heures/jt-de-20h-du-lundi-15-octobre-2018/2959049.html>
- "Pacifica" érosion de la côte aux US, recul en 20 ans <https://www.youtube.com/watch?v=CzrymETf9hY>
- Vésubie octobre 2020 <https://www.youtube.com/watch?v=6KXGI63qWHI> Vésubie inondation et glissements de terrain octobre 2020
- 2021 Allemagne, Brésil, France
- 2022 ça continue...

- 2023 ça continue...
- 2024 ça continue... la chaîne matermost <https://capillarity.org/m1-21/channels/nature1> en témoigne

2.1 Difficulté de collecter les données

Cependant, il n'est pas évident de collecter toutes ces données - avant, pendant, après - l'écoulement, quelle surface mouillée maximale ? quelle "empreinte" ? pendant combien de temps ? On remarquera que les films sont toujours de mauvaise qualité et ne permettent pas de bien voir la dynamique. Dans le cas de Malpasset qui est emblématique, nous avons déjà dit que l'empreinte de l'inondation a été mesurée par des gendarmes, pour le tsunami de mars 2011 au Japon, de nombreuses personnes ont mesuré l'empreinte de manière systématique au GPS.... Mais ce sont des cas exceptionnels.

En pratique on utilise maintenant les photos de réseaux sociaux pour évaluer cette empreinte. La méthode marche bien pour les centre ville avec de jeunes urbains, moins en banlieue, et certainement pas en pleine campagne, les vaches n'ont pas d'iPhone pour faire des selfies de leurs pâtures inondées.

- Par exemple les inondations de d'octobre 2015 :

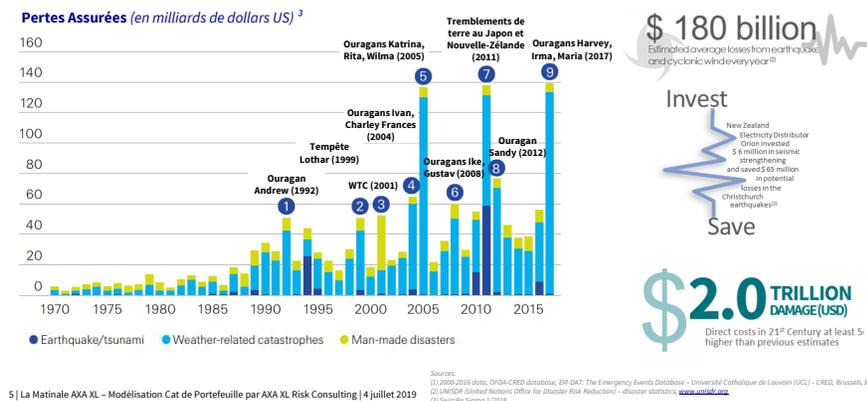
<http://www.keraunos.org/actualites/faits-marquants/2015/orage-diluvien-exceptionnel-nice-cannes-mandelieu-biot-3-octobre-2015-inondations.html> voir la simulation en *Basilisk* :

<https://www.youtube.com/watch?v=4ZoEPpG4RqY>. Ou en décembre 2015 dans le Yorkshire en Angleterre...

Dans ces deux cas récents, personne n'a mesuré exactement l'extension de l'inondation (pour les cas plus anciens, c'est pareil). On peut dire qu'il n'y a pas de "Big Data" dans ce domaine, bien au contraire. Cette incertitude sur l'étendue des événements est problématique pour le modélisateur qui veut reproduire les événements du passé.

L'impact des Catastrophes Naturelles dans le Monde

Le montant des pertes assurées induit par les catastrophes naturelles a significativement augmenté au cours des 45 dernières années, passant de moins de €5m à environ €100m par an depuis une dizaine d'année.



L'impact des Catastrophes Naturelles dans le Monde

Les tempêtes, inondations, et tremblements de terre ont générés sur les 10 dernières années plus de 90% des pertes économiques engendrées par l'ensemble des catastrophes naturelles dans le monde.

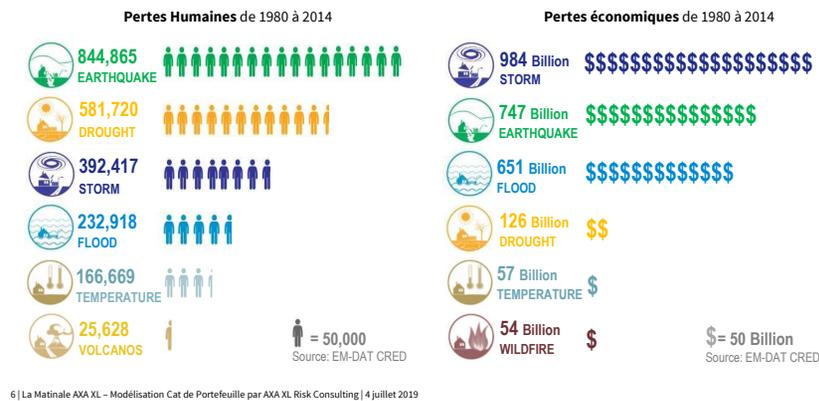


FIGURE 1 – Chiffres de l'assureur AXA montrant l'importance de l'impact des Catastrophes Naturelles dans le Monde, chaque année en France, les inondations causent de 650 à 800 millions d'euros de dégâts, en 2024, les inondations ont fait 950 million d'euros de dégâts. En Europe, 335 morts et 15 Milliards

3 Plan approximatif

Nous allons poser les équations de Saint-Venant et montrer d'abord comment elle s'écrivent en supposant un écoulement constant par tranche, puis en faisant un bilan sur une tranche à la section §5. C'est la manière la plus simple (et c'est la démarche historique de Saint-Venant lui même), elle a de plus l'intérêt d'être la forme utile pour une résolution numérique avec une approche volumes finis. Puis nous prenons le temps de rétablir ces équations en partant des Equations de Navier Stokes complètes écrites en couche mince. Cela fait ressortir l'équilibre hydrostatique. C'est une révision du cours de Couche Limite Dynamique. En intégrant sur l'épaisseur cela fait apparaître le frottement au fond et les flux de masse et de quantité de mouvement. On discute quelques cas d'écoulement stationnaires invariants §6.8.1 et §6.8.2. Nous discutons ensuite suivant le profil choisi quel est le lien entre le frottement et le débit et la hauteur dans §7, c'est là qu'apparaissent Chézy et Manning dont les noms sont associés aux hypothèses sur le frottement.

Ayant fixé le système et compris d'où il venait, nous pouvons attaquer sa résolution dans des cas particuliers dans §II. D'abord sur des échelles très très longues en x : les deux équations se réduisent à une équation : notamment le cas de l'onde de crue §8.5 pour lequel on introduit la notion de transport et de caractéristique. Puis, avant que ces notions ne soient reprises pour les Equations de Saint-Venant proprement dites : c'est le cas de la rupture de barrage, puis de la formation de ressaut, nous regardons les cas linéarisés à faible vitesse et faible variation de hauteur d'eau (cas des marées par exemple). Enfin, l'écoulement sur un obstacle est aussi abordé dans les cas linéaires et non linéaires.

En guise d'ouverture, un chapitre est esquissé sur l'érosion due aux écoulements §VII avec différentes modélisations.

Ce cours s'inscrit dans le triptyque Théorie, Expérience & Simulation. Ce fichier est la partie théorique où l'on essaye de comprendre la modélisation et les équations, la résolution numérique est présentée et des exemples pratiques seront étudiés avec le code *Basilisk*. Enfin, une cuve à vague à laquelle nous aurons accès permet d'observer *in vitro* les écoulements abordés.

- L'ensemble de ces cours compte aussi un chapitre sur les écoulements souterrains : http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv_aquifere.pdf
- Ainsi qu'un chapitre sur les vagues <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEhoule.pdf>
- Un chapitre spécial est consacré aux résolutions en volumes finis en C (adaptable facilement en python). http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/code_C_saintvenant.pdf
- Une fois introduites les notions de base, des exemples réalistes de calculs de marée, de tsunamis sont ensuite présentés en utilisant *Basilisk*. <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/README>

Bibliographie

Les notions abordées ici sont classiques et déjà bien expliquées dans différents ouvrages de mes estimés collègues Olivier Thual [46] ("Hydrodynamique de l'environnement"), Hubert Chanson [7] ("The Hydraulics of Open Channel Flow") et Christophe Ancey ("Ondes de crue et de rupture de barrage" https://cours-examens.org/images/An_2017_1/Etudes_superieures/Hydraulique/Barrages/cours-hydraulique.pdf). Bien entendu leur lecture est **fortement** encouragée ceux ci étant des experts internationaux reconnus dans ce domaine. Il existe bien d'autres ouvrages que l'on trouve en bibliothèque ou sur le ouaibe.

équation modélisant la réalité

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S$$

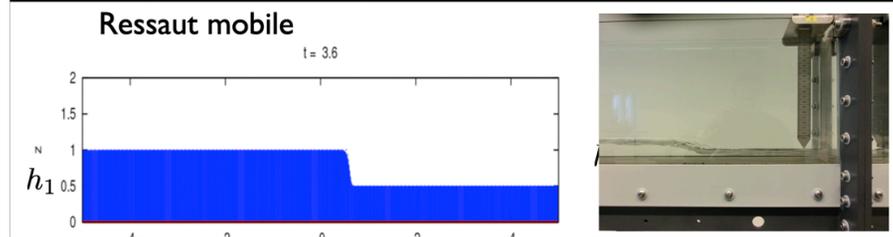
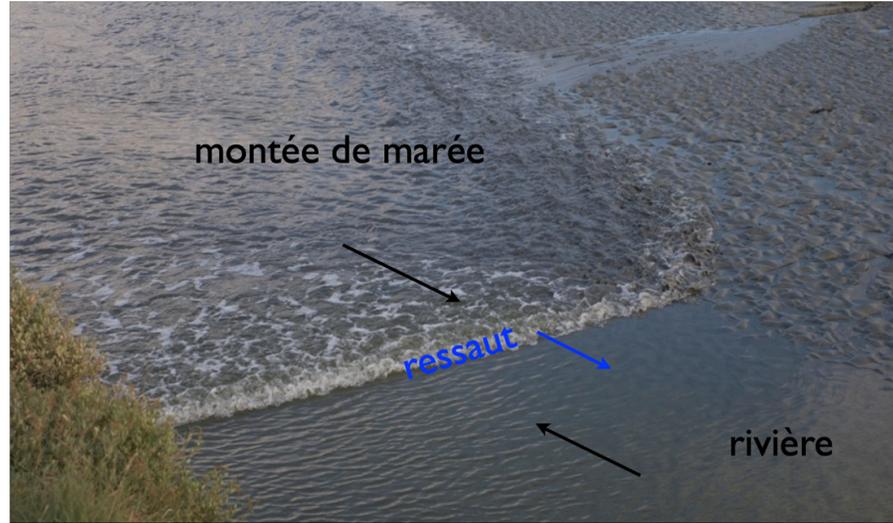
équation discrétisée

$$U_i^{n+1} - U_i^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}) + \Delta t S_i^n$$

code

```

50 void h1c (double hm, double hp, double um, double up, double Delta,
51         double * fh, double * fg, double * dmax)
52 {
53     double cm = sqrt (G*hm), cp = sqrt (G*hp);
54     double ustar = (um + up/2. + cm - cp);
55     double cstar = (cm + cp/2. + (um - up/2.));
56     double SL = hm == 0. ? up - 2.*cp : min (um - cm, ustar - cstar);
57     double SR = hp == 0. ? um + 2.*cm : max (up + cp, ustar + cstar);
58
59     if (f1 <= SL) {
60         *fh = um*hp;
61         *fg = hm*(um*um + G*hm/2.);
62     }
63     else if (f1 >= SR) {
64         *fh = up*hp;
65         *fg = hp*(up*up + G*hp/2.);
66     }
67     else {
68         double fun = um*hp;
69         double fum = hm*(um*um + G*hm/2.);
70         double fup = up*hp;
71         double fup = hp*(up*up + G*hp/2.);
72         *fh = (SR*fum - SL*fup + SL*SR*(hp - hm))/(SR - SL);
73         *fg = (SR*fum - SL*fup + SL*SR*(hp*up - hm*um))/(SR - SL);
74     }
75
76     double a = max(fabs(SL), fabs(SR));
77     if (a > epsilon) {
78         double dt = CFL*Delta/a;
79         if (dt < dmax)
80             *dmax = dt;
81     }
82 }
    
```



modélisation numérique — expérimentale

FIGURE 2 – Quart haut droit : un ressaut dans la rivière le Frémur (Bretagne, Côtes du Nord) causé par la montée de marée dans la baie de la Fesnaye, modélisé par Saint-Venant écrit sous forme compacte conservative (haut gauche), puis sous forme discrétisée (modélisation numérique), elle même codée en bas à gauche. Le résultat numérique (simulation numérique) en bas au milieu et en bas à droite la simulation expérimentale (modélisation expérimentale) dans une cuve à vagues de 5 m de long à Sorbonne-U (salle Galilée).

Première partie

Le Fluide : dérivation des équations de Saint-Venant

4 Introduction

Nous allons établir les équations de Saint-Venant et présenter quelques exemples d'applications dans le cas d'un écoulement d'eau sur une surface donnée. La clef principale est que la distribution de pression est reliée principalement aux variations de la surface de l'eau par la relation d'équilibre hydrostatique et que l'écoulement est en couche mince..

5 Saint-Venant : démonstration simple des équations

5.1 Approximation Hydrostatique

Toute la suite de ce cours repose sur la formule d'équilibre de la pression valable dans un fluide au repos traduisant l'équilibre des forces de pression sous gravité :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g.$$

Les équations de Saint-Venant ne seront qu'une perturbation de cet état de base. La convention est que la gravité est de haut en bas, suivant les z décroissants. Les variations seront principalement ensuite en x . Nous généralisons parfois avec la dimension y transverse. On définit $z = f(x, y)$ comme étant le fond, la fonction

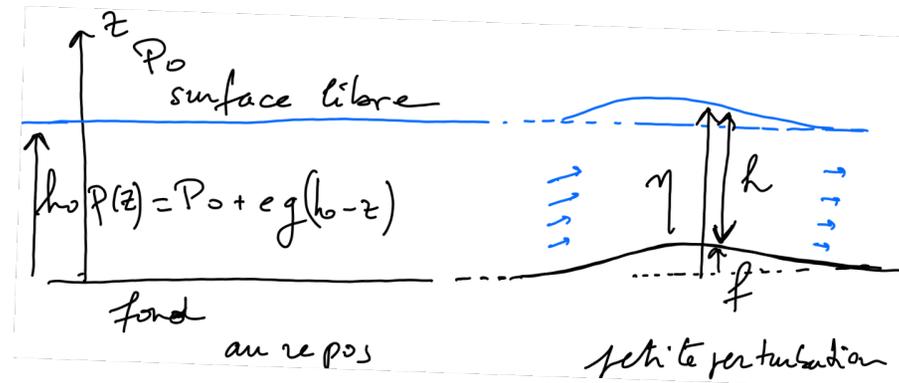


FIGURE 3 – A gauche état de repos, pas de vitesse, le fond est plat, la pression varie avec la hauteur z , la pression est P_0 dans l'air au dessus, la pression varie de manière hydrostatique dans l'eau : $p(z) = P_0 + \rho g(h_0 - z)$ pour $0 < z < h_0$. A droite, on suppose une petite perturbation de vitesse, de forme de fond (f) et/ou de surface libre (η), la hauteur d'eau étant $h = \eta - f$, la pression est **supposée** rester hydrostatique dans l'eau : $p(z) = P_0 + \rho g(\eta - z)$ pour $f < z < f + h = \eta$.

traduisant la forme du fond de la rivière. Le fond varie lentement en x, y dans la description de Saint-Venant. Nous noterons aussi $z = Z_b(x, y)$ la forme du fond, "b" pour *bottom*. Les deux notations sont équivalentes (et seront employées indifféremment). Le fond est fixe dans la théorie de base. Dans les cas d'érosion, il varie très lentement par rapport au temps caractéristique du mouvement de l'eau. On définit $z = \eta(x, y, t)$ comme étant la cote de la surface libre. La hauteur d'eau est la distance du fond à la surface libre : $h(x, y, t) = \eta(x, y, t) - f(x, y)$. Au dessus de la surface libre, l'air assure une pression atmosphérique P_0 que l'on suppose constante et uniforme (on néglige la densité de l'air (1.2 kg m^{-3}) par rapport à celle de l'eau 10^3 kg m^{-3}). On néglige donc complètement les mouvements de l'air supérieur. On a

donc la relation "hydrostatique" dans le fluide :

$$p = P_0 + \rho g(\eta - z)$$

ce que l'on peut appeler "loi du nivellement barométrique". Au fond de l'eau en $z = f$, on a $p = P_0 + \rho gh$, au dessus, on ne se soucie pas de l'air. Dans la suite, on prend la référence de pression à la surface libre, on ne tient compte que de la surpression $\rho g(\eta - z)$ par rapport à P_0 . Pour mémoire tout plongeur sait qu'il faut descendre de 10m sous la surface de l'eau pour que cette surpression soit environ une atmosphère ($10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ hPa}$). Pour comparaison, tout étudiant sait que la pression baisse d'environ 10hPa (en fait 9600 Pa) lorsque l'on monte la tour Zamansky, avec $\rho = 1.2$ on trouve bien la hauteur de l'ordre de 90 m.

Les équations de la mécanique des fluides font intervenir des gradients de pression, on se doute alors que les équations que nous allons établir, qui correspondent à des perturbations de cette couche liquide, feront intervenir des gradients de $\rho g\eta$. Les faibles variations en x, y feront que le gradient de pression qui joue pour faire bouger le fluide ne dépend pas de z et s'écriront :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \text{ et } -\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \text{ et toujours } -\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g.$$

Cette formulation hydrostatique est une sévère limitation, en effet, les vagues, par exemple, ne pourront pas être décrites dans le cadre de Saint-Venant (voir <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEhoule.pdf>). Nous corrigerons en §12 cette approximation hydrostatique.

5.2 Saint-Venant : définition des équations

On nomme équations de Saint-Venant (d'après leur inventeur Adhémar Barré de Saint-Venant 1797-1886 et écrites à partir de 1871 : plus de 150 ans déjà! Voir la vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=rmAFsEp17HQ>) le système suivant (nous démontrons ces équations ensuite au paragraphe suivant), On note u et v les vitesses moyennes dans le plan horizontal x, y , la gravité est suivant z . Il y a en fait plusieurs formes légèrement différentes (suivant que l'on est sous forme conservative ou non, ou que l'on tienne ou non compte de la largeur du canal). On définit $z = f(x, y)$ comme étant le fond de la rivière et $z = \eta(x, y, t)$ comme étant la cote de la surface libre. La hauteur d'eau est $h(x, y, t) = \eta(x, y, t) - f(x, y)$, on a la conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} &= -hg \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + F_x, \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} &= -hg \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} + F_y. \end{aligned} \quad (1)$$

avec τ_x et τ_y qui sont les contraintes de frottement au fond, F_x et F_y sont des forces (volumiques) comme l'accélération de Coriolis ou une force d'entraînement due au vent. Toutes ces forces seront explicitées, discutées, détaillées plus loin paragraphes 7.2.3, 7.3.

On remarque que dans cette partie le fond est fixe $f(x, y)$, c'est une donnée du problème, on cherche à établir comment l'eau s'écoule sur une topographie donnée (le cas d'une topographie érodable est examiné au §VII).

Les conditions aux limites sont spéciales, on va supposer que le bord du domaine (la berge) est un talus très abrupt, et on ne va pas se soucier des vaguelettes qui mouillent la berge. Il y a "glissement au bord" (ce bord étant les berges). Ensuite, la vitesse est imposée à l'entrée (c'est le flux d'entrée), puis on se donne une condition de sortie libre.

5.3 Saint Venant : une approche heuristique simple 1D

En 1D, une des formes de ces équations est, pour la masse et la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} = -hg \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + F_x.$$

Les équations seront démontrées par la suite à partir des équations de Navier Stokes, avec des arguments de type Couche Limite de Prandtl. La démarche sera

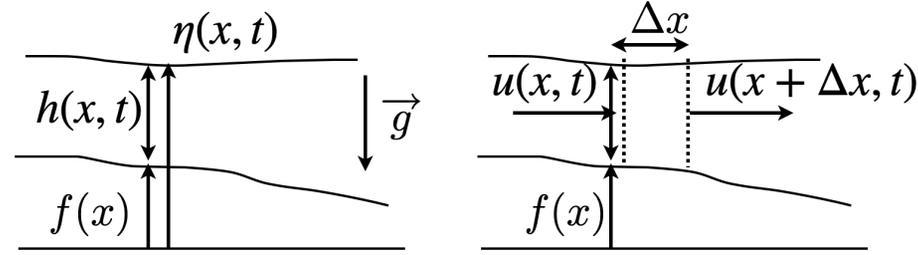


FIGURE 4 – A gauche : notations. A droite : volume de contrôle de longueur Δx si on veut établir des équations 1D, f forme du fond, η position de la surface libre, h hauteur d'eau, $u(x, t)$ vitesse suivant x .

la plus rigoureuse possible en tenant compte d'hypothèses simplificatrices successives (de fait l'hypothèse hydrostatique que nous introduisons maintenant sera une conséquence d'hypothèse plus générales). On peut cependant commencer la démarche en partant d'une vision simple des écoulements sans faire appel à Navier Stokes. La manière simple de présenter les équations est de se donner le dessin de la figure 4. On a une tranche de fluide d'épaisseur Δx , les bornes x et $x + \Delta x$ de cette tranche sont fixes, dans cette tranche, il circule un écoulement de vitesse constante par tranche, $u(x, t)$. Avec cette hypothèse on met en défaut le non glissement à la paroi (effet de la viscosité). L'effet de la viscosité est cependant réintroduit dans l'équation de quantité de mouvement par le frottement à la paroi. On dit que $u(x, t)$ est une vitesse moyenne par tranche.

• Il entre un flux $h(x, t)u(x, t)$ en x et il sort un flux en $x + \Delta x$ qui est $h(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t)$, mais il ne faut pas oublier qu'il y a un flux dû au déplacement de la surface libre vers le haut : $\Delta x \partial \eta / \partial t$, donc, puisque f ne dépend pas du temps, le bilan de masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h \Delta x) = h(x, t)u(x, t) - h(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t).$$

On peut dire aussi que la variation de volume est égale au flux qui rentre moins celui qui sort. Insistons sur le fait que cette écriture, que l'on peut réécrire avec le flux $Q = hu$ est très générale, elle traduit une loi de conservation, elle est le fondement de la méthode des volumes finis qui va nous servir pour la résolution numérique :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h \Delta x) = Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)$$

en faisant apparaître la dérivée $u(x + \Delta x, t)h(x + \Delta x, t) = u(x, t)h(x, t) + \Delta x \frac{\partial uh}{\partial x} + \dots$ on retrouve la relation de flux que l'on a annoncée :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial (hu)}{\partial x}.$$

• Passons à la quantité de mouvement, on a une tranche de fluide d'épaisseur Δx , il y circule un écoulement de vitesse constante en z qui est $u(x, t)$ et la surpression $p(x, z, t) = \rho g(\eta - z)$ qui varie du haut au bas de la tranche. Le bilan de quantité de mouvement est fait dans la tranche. La masse dans la tranche $\rho h \Delta x$, l'accélération de la tranche si elle bouge dans son mouvement est $\frac{du}{dt}$, (la dérivée totale est bien notée $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$). Mais ici on a une tranche d'épaisseur Δx , les bornes x et $x + \Delta x$ de cette tranche sont fixées, la tranche est soumise à des forces de pression que l'on écrit dans le cadre hydrostatique précédent. Les forces de pression poussent vers la droite en x , soit sur toute la hauteur $h = \eta - f$ on a :

$$\int_f^\eta p(x, z, t) dz = \int_f^\eta \rho g(\eta - z) dz = -\rho g \left[\frac{(\eta - z)^2}{2} \right]_f^\eta = 0 - \left(-\rho g \frac{(\eta - f)^2}{2} \right) = \rho g \frac{h^2}{2}$$

et poussent vers la gauche en $x + \Delta x$. Le bilan des forces de pression est donc :

$$\begin{aligned} \int_{f(x)}^{\eta(x,t)} p(x, z, t) dz - \int_{f(x+\Delta x)}^{\eta(x+\Delta x,t)} p(x + \Delta x, z, t) dz &= \rho g \left(\frac{h(x, t)^2}{2} - \frac{h(x + \Delta x, t)^2}{2} \right) \\ &= -\Delta x \rho g \frac{\partial h^2}{\partial x} \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Attention à ce stade à ne pas omettre un terme un peu subtil de poids dû à la pente faible du fond f' , qui projette la pesanteur en une très faible force le long de l'écoulement :

$$-\rho g h(\Delta x) \frac{df}{dx}.$$

La topographie f varie très lentement, ce terme est donc très très petit. Ce terme introduit ainsi, il y a une petite contradiction car les coordonnées sont bien telles que z est suivant la gravité \vec{g} (en fait il faudrait légèrement corriger g), mais ce terme traduit la non connaissance exacte de l'horizontale car la pente est très très faible. Une fois réintroduit nous allons voir que ce terme préserve l'équilibre du lac. Enfin, il ne faut pas oublier la contrainte de frottement visqueux τ_x qui agit sur la surface du fond en $z = f(x)$. Ce frottement est pariétal, il n'est pas en volume, on pourrait considérer un frottement au dessus provenant d'un vent au dessus de la surface libre. Ce frottement pariétal dépend de u , sa résultante sera $-\tau_x \Delta x$, en mettant tous ces termes bout à bout et en factorisant Δx on trouve la résultante globale (pression + pente + frottement) intégrale qui s'exerce sur la tranche :

$$F = \left(-\rho g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) - \rho g h \frac{df}{dx} - \tau_x \right) \Delta x.$$

Pour calculer l'accélération de la tranche il faut faire un bilan de la variation de quantité de mouvement dans la tranche $(\Delta x) \frac{\partial(\rho u h)}{\partial t}$. Il faut tenir compte du flux de quantité de mouvement qui sort à droite $-\rho u(x + \Delta x, t)^2 h(x + \Delta x, t)$ et de celui qui rentre à gauche $+\rho u(x, t)^2 h(x, t)$ (en supposant encore que le profil est plat, sinon, on ne pourrait pas simplement multiplier hu et u). Ce bilan de flux suit la même démarche que pour la masse. On trouve donc un bilan en écrivant le développement de Taylor : $\rho u(x, t)^2 h(x, t) - \rho u(x + \Delta x, t)^2 h(x + \Delta x, t) = -(\Delta x) \left[\frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} + \dots \right]$. Dans le cas de la masse, il n'y a pas de terme source, ici il y en a un c'est F que l'on vient de calculer (pression, pente et frottement), le bilan :

$$(\Delta x) \frac{\partial(\rho u h)}{\partial t} = -(\Delta x) \left[\frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} + \dots \right] + F.$$

L'équation totale s'écrit bien alors

$$\frac{\partial(\rho u h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) - \rho g h \frac{df}{dx} - \tau_x.$$

Compte tenu de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial(\rho u h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 h)}{\partial x} = \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) h + \rho u \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} \right) = h \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \rho u \cdot 0 = \rho h \frac{du}{dt}$$

car $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$ et que ρ est constant, et comme $h + f = \eta$ on a :

$$\rho h \frac{du}{dt} = -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) - \rho g h \frac{df}{dx} - \tau_x, \quad \text{donc} \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_x}{h}.$$

On aurait pu directement écrire cette forme à partir de l'expression de la pression $-\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$, sans passer par la moyenne sur la tranche.

Remarquons que ces équations vérifient "l'équilibre du lac", à savoir, si la surface de l'eau est à hauteur constante : $\eta = f + h$, i.e. $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ alors le fluide est bien au repos $u = 0$ et $\eta = 0$. Il faudra toujours bien faire attention à ce problème d'horizontalité qui est récurrent. Les différents utilisateurs négligent souvent la variation

de g avec l'angle.

Remarquons enfin que c'est quasiment la présentation originale d'Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant lui même en 1871 au paragraphe "théorie et équations générales du mouvement non permanent des eaux courantes". Il termine en écrivant "Je donnerai dans un autre article l'intégration de ces équations pour un cas étendu". Le fichier est ici <https://dropsu.sorbonne-universite.fr/s/RpmpqgDY8477qf6>.

5.4 Lien avec la méthode des Volumes Finis

Dans le paragraphe précédent, en supposant un écoulement en couche mince, avec une vitesse moyenne dans la tranche et une pression hydrostatique, nous avons établi les équations de conservation sur un volume de contrôle très petit sur une tranche fixe. Nous avons établi les équations sous la forme d'un bilan de la masse et d'un bilan de quantité de mouvement. Puis on a fait un développement de Taylor, on ainsi obtenu les équations aux dérivées partielles, c'est la démarche de Saint-Venant. Les équations sont écrites sous la forme de lois de conservation, avec une variation temporelle, un terme de flux et un terme source.

Nous avons établi ces équations de Saint-Venant, dans le paragraphe précédent, pour le bilan de masse par exemple en faisant le bilan de la variation à travers la tranche Δx compte tenu des entrées et sorties aux faces :

$$\text{variation temporelle} = \text{ce qui rentre moins ce qui sort.} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_x^{x+\Delta x} h(x, t) dx \right) = Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)$$

la tranche étant petite $\int_x^{x+\Delta x} h dx = \Delta x h(x) + O(\Delta x^2)$... et nous avons remplacé les accroissements par le développement de Taylor-Mac Laurin en faisant apparaître la dérivée $Q(x + \Delta x, t) = Q(x, t) + \Delta x \frac{\partial Q}{\partial x} + O(\Delta x^2)$... et on avait trouvé la relation de flux $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. Une autre manière de dire la même chose est d'écrire le même bilan, en remarquant qu'en réalité la taille n'a pas besoin d'être petite.

Reprenons exactement cette analyse avec un point de vue différent. Puisque l'on fait un bilan entre les tranches x et $x + \Delta x$, la taille Δx est en fait quelconque :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_x^{x+\Delta x} h(x, t) dx \right) = Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t) \text{ ou encore } \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} h dx = -[Q]_x^{x+\Delta x}$$

Comme le domaine est fixe, on permute $\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} h dx = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} h dx$ et comme $[Q]_x^{x+\Delta x} = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} Q dx$. On met tout dans le membre de gauche et dans l'intégrale,

$$\int_x^{x+\Delta x} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx = 0, \text{ vrai } \forall \Delta x \text{ donc la forme locale associée est bien } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

C'est cette forme intégrée sur un domaine fixe qui est la base même de la **méthode des Volumes Finis** :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_x^{x+\Delta x} h(x, t) dx \right) = Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)$$

en effet cette expression sera réécrite en appelant h_i^n (moyenne spatiale de h dans le segment considéré centré en i au temps d'indice n) et en approximant au premier ordre la dérivée en temps, le nouvel h_i^{n+1} sera lié au précédent h_i^n compte tenu des variations aux faces $i - 1/2$ et $i + 1/2$

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{Q_{i+1/2}^n - Q_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0, \quad (2)$$

On consultera principalement les ouvrages de Eleuterio Toro ou de Randall LeVeque (LeVeque 02 page 65 eq (4.4)) et le fichier http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/code_C_saintvenant.pdf

5.5 En conclusion de cette approche

En supposant un écoulement en couche mince, avec une vitesse moyenne dans la tranche et une pression hydrostatique, nous avons établi les équations de conservation sur un volume de contrôle, en 1D (la généralisation en 2D est facile), c'est la démarche de Saint-Venant. Les équations sont écrites sous la forme de lois de conservation, avec une variation temporelle, un terme de flux et un terme source. Nous les avons établies sur une tranche fixe sous la forme d'un bilan de la masse et d'un bilan de quantité de mouvement :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\right) &= -gh\frac{df}{dx} - \frac{\tau_x}{\rho} + F_x, \\
 h &= \eta - f.
 \end{aligned}
 }
 \quad \text{ou de manière compacte} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S \quad (3)$$

plusieurs autres formes et simplifications de ce système seront examinés dans ce chapitre.

En première lecture on saute la suite (qui correspond à l'établissement de ces équations à partir de Navier Stokes) §7 et on va directement à la section **"Hypothèses pour obtenir Saint-Venant"** à la sous section **"Hypothèses de fermeture, choix d'un profil"** ; on y discute le fait que la vitesse n'est peut être pas constante dans l'épaisseur mais que l'on peut considérer effectivement la vitesse moyenne, quitte à rajouter un coefficient correctif tenant compte de la forme du profil de vitesse. De même on y estime le frottement (qui lui aussi est fortement dépendant de la forme exacte du profil de vitesse).

Sans trop divulguer la suite (§7.2.7), on pose $\tau_x = \frac{g}{C_c^2}u^2$ avec un coefficient de frottement de "Chézy" coefficient empirique C_c , nous verrons que les équations de Saint-Venant admettent plusieurs dégénérescences suivant les cas : bosse f courte ou longue et petite perturbation, frottement $\rho\frac{g}{C_c^2}u^2$ faible (§9) ou fort... toute cette zoologie sera examinée après dans les cas "longue échelle", que nous l'appellerons aussi "Onde d'inondation" ou "flood wave" (§8.5) dans les cas d'échelles intermédiaires nous l'appellerons aussi "Onde de crue diffusante" (§8.6), etc etc. Tout ceci sera vu dans la suite.

6 Saint-Venant à partir de Navier Stokes

À sauter en première lecture et poursuivre en §7, car nous réétablissons les équations de Saint - Venant à partir de Navier Stokes.

6.1 Navier Stokes

La démonstration heuristique, mais historique de 1871, précédente nous a fait voir que les variations de pression étaient gouvernées par des perturbations de la relation hydrostatique. Ce caractère hydrostatique était une hypothèse, nous allons voir que c'est une conséquence de l'écoulement en couche mince. Nous conservons le fait que les variations de topographie sont lentes et faibles, la forme du fond étant $z = f(x, y)$, que nous noterons $x_2 = f(x_1, x_3)$.

En effet, on pourrait écrire le système en 3D avec U_i les trois coordonnées (U_1, U_2, U_3) . Par soucis de simplification, on se placera seulement en 2D x et z (ou $x_1 = x$ et $x_2 = z$) les vitesses seront U_1 et U_2 . Nous avons donc relaxé l'hypothèse de vitesse constante (ou "bouchon") dans l'eau.

On se donne une couche de fluide comprise entre un fond f et une interface libre eau/ air η , position de la surface libre. Nous négligerons toujours l'influence de l'air au dessus de cette surface libre.

- Conservation de la masse, on part de l'hypothèse d'incompressibilité

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0$$

au fond, en bas, on a l'adhérence $U_1 = U_2 = 0$, en haut à l'interface, définie de manière implicite par la fonction $F(x, z) = 0$, toujours nulle pour les points de l'interface avec

$$F(x, z) = (\eta(x, t) - z).$$

Cette interface est conservée dans le mouvement du fluide donc

$$\frac{dF}{dt} = 0 \text{ soit } \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + U_1 \frac{\partial F}{\partial x} + U_2 \frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + U_2(x, \eta, t)(-1) \right) = 0$$

ce que l'on écrit sous la forme suivante qui traduit la valeur de la vitesse transverse à l'interface en fonction du déplacement de l'interface (relation cinématique) :

$$U_2(x, \eta, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Attention, dans un premier temps, nous allons faire l'analyse en laminaire simple, on pourrait directement la faire en turbulent, voire pour un fluide non newtonien. D'où cette notation générique τ_{ij} , mais pour commencer, l'écoulement est laminaire, U_1 et U_2 sont les "vraies" vitesses, et la contrainte visqueuse est la contrainte visqueuse Newtonienne :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Il nous faut maintenant simplifier ces équations pour tenir compte de diverses hypothèses physiques.

6.2 Analyse Phénoménologique, ordres de grandeur

6.2.1 Equations

On effectue ensuite une analyse phénoménologique des équations. C'est à dire que l'on veut simplifier au maximum les équations en gardant le plus possible de termes compte tenu du fait que certains termes sont relativement plus petits que d'autres. En fait nous allons sans le dire faire une analyse de couche limite comme pour la couche limite de Prandtl.

Quand on regarde un fleuve, il est clair que la vitesse transverse U_2 (vers le haut ou le bas) est faible par rapport à la vitesse longitudinale U_1 . Il est aussi clair que les variations longitudinales sont sur des échelles plus longues que la hauteur d'eau dont la valeur caractéristique est disons h_0 . Si U_0 est l'ordre de grandeur de la vitesse et ε le rapport entre la profondeur et la longueur de variation longitudinale, alors un bon choix pour $U_1 = U_0 \bar{U}_1$, $U_2 = \varepsilon U_0 \bar{U}_2$, $z = \bar{z} h_0$ et $x = \bar{x} h_0 / \varepsilon$. Ce choix est excellent pour que l'équation d'incompressibilité reste entière :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0 \text{ devient } \frac{U_0}{h_0/\varepsilon} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\varepsilon U_0}{h_0} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ puis } \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}} = 0.$$

On dit aussi que le choix de ces échelles est guidé par "moindre dégénérescence" : on garde le maximum de termes dans l'équation. Dans la dérivée totale, on mesure le temps $t = \tau \bar{t}$, et on note que $(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} + U_2 \frac{\partial}{\partial z})$ est donc

$$(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} + U_2 \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{U_0}{h_0/\varepsilon}) ((\frac{h_0}{U_0 \tau \varepsilon}) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

tous les termes restent aussi si on mesure le temps avec la longueur longitudinale $h_0/(\varepsilon U_0)$. Remarquons au passage que l'on peut définir un Strouhal $S_t = (\frac{h_0}{U_0 \tau \varepsilon})$. Si on mesure le temps avec h_0/U_0 alors $S_t = 1/\varepsilon$, mais si on mesure le temps avec la longueur longitudinale, $S_t = 1$ et on a plus de termes (moindre dégénérescence), la dérivée totale est entière :

$$(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} + U_2 \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\varepsilon U_0}{h_0}) (\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

Dans l'équation de conservation de quantité de mouvement longitudinale, dans le cas Newtonien laminaire :

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2},$$

il est clair que l'on peut négliger le terme $\mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}$ par rapport à $\mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}$ (le premier est d'ordre ε^2 par rapport au second). Il ne reste que :

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} = \frac{\mu U_0}{h_0^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2} + O(\varepsilon^2).$$

Pour la pression, la pression de référence est la pression de l'air passif à l'extérieur P_0 :

$$p = P_0 + (\delta P) \bar{p},$$

on obtient alors pour la quantité de mouvement longitudinale (après avoir regroupé les termes de l'équation de quantité de mouvement et divisé par $(\frac{\varepsilon U_0^2}{h_0})$) :

$$(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}}) = -\frac{(\delta P)}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{(\mu U_0/h_0)}{\rho U_0^2 \varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2} + \dots$$

Cette équation est donc l'équation longitudinale pour U_1 avec les termes principaux.

De même substituons les mêmes échelles dans l'équation suivant U_2 , le terme de dérivée longitudinale de contrainte est négligé :

$$\left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}}\right) = -\frac{(\delta P)}{\rho U_0^2 \varepsilon^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{gh_0}{\rho U_0^2 \varepsilon^2} + \frac{((\mu U_0/h_0))}{\rho U_0^2 \varepsilon^3} \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial \bar{z}^2} + \dots$$

il paraît naturel de choisir "comme d'habitude" $(\delta P) = \rho U_0^2$. En fait, et c'est une remarque importante, on peut aussi prendre $(\delta P) = \rho gh_0$. D'ailleurs c'est le bon choix final car la pression sera bien hydrostatique. Remarquons tout de suite que par la définition de Froude : $\rho gh_0 = \rho U_0^2 / F^2$, Le nombre de Froude $F = \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}}$, est, nous le verrons, d'ordre 1 en pratique (avec ce nouveau choix $(\delta P) = \rho gh_0$, il y aura un Froude dans l'équation longitudinale). Gardons $(\delta P) = \rho U_0^2$ et on réécrit l'équation en multipliant par ε^2 :

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{F^2} + (\varepsilon^{-1}) \frac{\nu}{U_0 h} \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial \bar{z}^2} + \dots$$

Le terme convectif est alors négligeable, tant que $\varepsilon^2 \ll 1$. Dans le cas laminaire, le terme visqueux est aussi négligeable si $\frac{\nu}{U_0 h}$ est assez petit et (ε^{-1}) pas trop grand. Il n'est pas très petit si la viscosité est forte (on fera attention dans le cas turbulent il peut y avoir une contribution à ce terme dans la pression, de même dans les cas non newtoniens, ce terme peut revenir dans les équations). En pratique, si le Reynolds $Re = U_0 h / \nu$ est assez grand, il ne reste que

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{F^2},$$

il n'y a pas de terme de pression hors le terme hydrostatique (c'est une conséquence de l'hypothèse de couche mine et non plus une hypothèse).

Les équations s'écrivent maintenant puisque l'ordre de grandeur de $\frac{\mu}{\rho U_0 h \varepsilon}$ est aussi $1/(\varepsilon Re)$ qui peut être quelconque :

$$\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon Re} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2}, \text{ et } 0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{F^2},$$

arrivés à ce point, nous avons les ordres de grandeurs principaux. Remarquons que l'analyse que nous avons faite est exactement l'analyse qui même à la couche limite de Prandtl, ces équations sont quasi celles de Prandtl. Effectivement si $F \rightarrow \infty$ on retrouve exactement l'analyse de couche limite que l'on fait en Aérodynamique. C'est aussi pour cette analogie avec Prandtl que l'on a choisi ici $(\delta P) = \rho U_0^2$.

Notons enfin qu'avec $\eta = h_0 \bar{\eta}$ al condition cinématique reliant la vitesse transverse à l'interface à la position de l'interface $z = \eta(x, t)$

$$U_2(x, \eta, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ devient } \bar{U}_2(\bar{x}, \bar{\eta}, \bar{t}) = \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1(\bar{x}, \bar{\eta}, \bar{t}) \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}.$$

6.2.2 Pression et l'effet subtil de la pente, transformation de Prandtl

• Pression

Un mot sur le gradient de pression, on a écrit les échelles et les équations :

$$p = P_0 + (\delta P) \bar{p}, \text{ avec } (\delta P) = \rho U_0^2 \text{ et ainsi } 0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{F^2}$$

donc $\bar{p} = -\frac{\bar{z}}{F^2} + cst$ en $z = \eta$ en haut de la couche de fluide $p = P_0$, la pression atmosphérique constante car on néglige toujours l'air au dessus de la couche d'eau. comme $\bar{\eta} = \bar{f} + \bar{h}$, car on mesure tout avec h_0 la pression est :

$$\bar{p} = \frac{\bar{\eta} - \bar{z}}{F^2} \text{ en substituant } \eta, \text{ on a } \bar{p} = \frac{\bar{h} - (\bar{z} - \bar{f})}{F^2}.$$

Bien entendu, si on avait choisi $(\delta P) = \rho g h_0$ la pression serait

$$\bar{p} = \bar{\eta} - \bar{z} \text{ en substituant } \eta, \text{ on aurait } \bar{p} = \bar{h} - (\bar{z} - \bar{f}).$$

Dans les deux cas on retrouve que la pression avec dimensions est hydrostatique :

$$p = \rho g(h - (z - f)).$$

Ayant la pression complètement, l'opposé du gradient de pression qui apparaît dans l'équation longitudinale est donc

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{-1}{F^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{F^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}.$$

Nous arrivons ici à un point subtil des équations, il est avantageux de réécrire les équations en changeant le repérage de z , et de repérer les positions verticales par leur position relative par rapport à la forme du fond. C'est ce que l'on appelle la transformation de Prandtl, $\tilde{z} = \bar{z} - \bar{f}$. C'est Prandtl qui a introduit cette transformation pour justement faire disparaître la forme de l'aile et l'aplanir en une plaque plane. La pression :

$$\bar{p} = \frac{\bar{h} - (\bar{z} - \bar{f})}{F^2} \text{ devient par la transformation de Prandtl } \bar{p} = \frac{\bar{h} - (\tilde{z})}{F^2},$$

donc si nous posons $\tilde{z} = \bar{z} - \bar{f}$, cette hauteur relative permet d'écrire qu'en $\tilde{z} = 0$ on est sur la paroi ($\bar{z} = \bar{f}$), et en $\tilde{z} = h$ on est à la surface libre ($\bar{z} = \bar{\eta}$). Comme $\frac{\partial(\bar{z})}{\partial \bar{x}} = 0$ on a donc $\frac{\partial(\tilde{z})}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial(\bar{f})}{\partial \bar{x}}$, la pression s'est transformée en

$$\bar{p} = \frac{\bar{h} - (\tilde{z})}{F^2} \text{ et donc l'opposé du gradient } -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{-1}{F^2} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial(\tilde{z})}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{-1}{F^2} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{f})}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{-1}{F^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{F^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}.$$

Le gradient de pression fait apparaître la hauteur d'eau et la variation de forme du fond.

• Transformation de Prandtl

La transformation de Prandtl vise à écrire les équations sous la même forme mais en changeant la position du fond. On vient de voir que l'on garde \bar{x} mais que l'on change $\tilde{z} = \bar{z} - \bar{f}$, par la dérivation en chaîne :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}},$$

ainsi

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ devient } \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \tilde{z}} = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\bar{U}_2 - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \bar{U}_1) = 0 \text{ devient } \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{z}} = 0,$$

en définissant une vitesse transformée $\tilde{U}_2 = \bar{U}_2 - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \bar{U}_1$ associée à la transformation de Prandtl, $\tilde{z} = \bar{z} - \bar{f}$. On constate alors que

$$\bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}} = \bar{U}_1 \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \tilde{z}} \right) + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \tilde{z}} = \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + (\bar{U}_2 - \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}) \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \tilde{z}} = \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \tilde{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \tilde{z}}.$$

Enfin pour la condition cinématique, la simple substitution $\eta = \bar{f} + \bar{h}$

$$\bar{U}_2(\bar{x}, \bar{\eta}, \bar{t}) = \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1(\bar{x}, \bar{\eta}, \bar{t}) \frac{\partial \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \text{ soit } \bar{U}_2(\bar{x}, \bar{h} + \bar{f}, \bar{t}) = \frac{\partial \bar{h}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1(\bar{x}, \bar{h} + \bar{f}, \bar{t}) \frac{\partial \bar{h}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_1(\bar{x}, \bar{h} + \bar{f}, \bar{t}) \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}}.$$

donc l'équation de cinématique de l'interface s'écrit comme suit, on y reconnaît la transformation de Prandtl de \bar{U}_2 :

$$\bar{U}_2 - \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}.$$

En conclusion, la transformation de Prandtl :

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z} - \bar{f}, \text{ et } \bar{U}_2 \rightarrow \bar{U}_2 - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \bar{U}_1$$

rendent invariants l'incompressibilité et le terme non linéaire (abusivement on garde des barres après transformation), et rend le sol plat :

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}} \rightarrow \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}} \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}} \rightarrow \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}}.$$

On a donc enlevé les tildes et on garde les barres, mais on a fait la transformation de Prandtl et on obtient

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - \frac{1}{F^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\varepsilon Re} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2} \text{ et } 0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{F^2}$$

la seule différence est que maintenant le sol est en $\bar{z} = 0$ (où il y a adhérence) et la surface libre en $\bar{z} = \bar{h}$ (on a changé les tildes en barres) où $\bar{U}_2 = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}$. Il y a enfin un terme supplémentaire source $-\frac{1}{F^2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}$ dans la quantité de mouvement longitudinale qui traduit bien les variations de pente locale.

C'est cette écriture qui va être la plus pratique pour écrire Saint-Venant.

Cette présentation avec la transformation de Prandtl est originale dans sa présentation des équations de Saint-Venant (à notre connaissance elles ne sont pas présentées ainsi dans la littérature, sauf dans [13]).

6.2.3 Forme conservative

Le terme de dérivée totale $(\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial z})$ peut être écrit en additionnant $(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z})U_1$ qui est nul par incompressibilité :

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1^2}{\partial x} + \frac{\partial U_1 U_2}{\partial z} \right),$$

on appelle cette écriture "forme conservative" puisque l'on reconnaît une variation temporelle et une "divergence".

6.2.4 Equations en couche mince finales, avec dimensions

Les équations en couche mince sont en fait les équations de Prandtl de type "couche limite", le caractère hydrostatique découle de l'hypothèse de couche mince, pour ces équations on a fait la transformation de Prandtl

$$z \rightarrow z - f, \text{ et } U_2 \rightarrow U_2 - \frac{\partial f}{\partial x} U_1$$

- conservation de la masse

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0$$

au fond, $U_1 = U_2 = 0$, l'interface, définie de manière implicite par la fonction $F(x, z) = (h(x, t) - z)$. Cette interface (transformée par Prandtl) est conservée dans le mouvement du fluide donc la valeur de la vitesse transverse à l'interface en fonction du déplacement de l'interface :

$$U_2(x, h, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + U_1 \frac{\partial h}{\partial x}.$$

- conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme conservative (compte tenu de l'incompressibilité et toujours de la transformation de Prandtl)

$$\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1^2}{\partial x} + \frac{\partial U_1 U_2}{\partial z} \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \rho g \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z}$$

avec $\tau_{12}(h) = 0$ pas de contrainte en haut. Dans le cas laminaire que nous avons vu $\tau_{12} = \mu \frac{\partial U_1}{\partial z}$.

Remarque :

Ces équations pourraient se résoudre numériquement avec un schéma numérique adapté. Bien entendu, cette résolution dépasse le cadre de ce cours. Elle passe par la méthode dite "multilayer" de Audusse et Sainte Marie [2] codée dans *Basilisk* (cf [13])

La présentation avec la transformation de Prandtl pour établir les équations de Saint-Venant est expliquée dans cet article.

Suite :

Nous allons par la suite intégrer sur l'épaisseur h ces équations, et nous allons voir que l'on obtient les équations de Saint-Venant. Auparavant, nous avons besoin de rappeler la dérivation des intégrales puisque que l'on va intégrer ces équations sur une hauteur (la profondeur) qui varie.

6.3 Rappel sur les dérivées d'intégrales, règle de Leibniz

Etablissons tout de suite la relation de conservation de la masse car elle ne nécessite aucune autre hypothèse. Auparavant, nous rappelons que pour $D = \partial_t$ ou $D = \partial_x$ on a la règle de Leibniz :

$$\boxed{D \int_f^\eta g(x, z, t) dz = \int_f^\eta Dg(x, z, t) dz + gD\eta - gDf.} \quad (4)$$

Pour le montrer, prenons $D = \partial_x$, coupons $\int_f^\eta = \int_0^\eta - \int_0^f$ et soit G une primitive de g , par définition de la primitive ($g(x, z, t) = \partial_z G(x, z, t)$) :

$$\int_0^{\eta(x,t)} g(x, z, t) dz = G(x, \eta(x, t), t).$$

Donc en faisant attention aux bornes qui varient :

$$\partial_x \int_0^\eta g dz = \partial_x (G(x, \eta(x, t), t)) = \partial_x G(x, \eta(x, t), t) + \partial_z G(x, \eta, t) \partial_x \eta = \int_0^\eta \partial_x g(x, z, t) dz + \partial_z G(x, \eta, t) \partial_x \eta.$$

avec $\partial_z G = g$ par définition, donc la relation de Leibniz

$$\partial_x \int_0^\eta g dz = \int_0^\eta \partial_x g(x, z, t) dz + g(x, \eta, t) \partial_x \eta.$$

On fait ensuite pareil pour la borne basse.

6.4 Rappel sur les dérivées d'intégrales, lien avec la formule de la divergence

Pour l'équation de la masse, nous avons besoin de dérivées en x , mais ensuite, pour la quantité de mouvement nous dérivons en temps t :

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} g dx = \int_{x_1}^{x_2} \partial_t g(x, t) dx + g(x_2, t) \partial_t x_2 - g(x_1, t) \partial_t x_1.$$

La variation de la quantité intégrée, est égale à l'intégrale de la variation à laquelle on ajoute le flux qui sort $g(x_2, t) \partial_t x_2$ et le flux qui entre $-g(x_1, t) \partial_t x_1$.

6.5 Forme intégrale de la conservation de la masse

- Avec la transformation de Prandtl

Intégrons l'équation de conservation de la masse du fond 0 à la surface h (en ayant fait la transformation de Prandtl)

$$\int_0^h \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) dz = 0,$$

cela donne la relation suivante où sont apparues les vitesses transversales en bas (nulle) et en haut de la couche liquide :

$$\int_0^h \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right) dz + U_2(x, h, t) - 0 = 0$$

puis en extrayant la dérivée de l'intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1 dz \right) - U_1(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} + U_2(x, h, t) = 0$$

au fond, $U_2(x, f, t) = 0$, la vitesse transverse est nulle, de même pour U_1 , et compte tenu de la vitesse à la surface : $\frac{\partial h}{\partial t} + U_1(x, h, t)\frac{\partial h}{\partial x} = U_2(x, h, t)$, on obtient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1 dz \right) = 0.$$

• Sans faire la transformation de Prandtl

Utilisons les relations de Leibniz, intégrons l'équation de conservation de la masse du fond f à la surface η (sans faire la transformation de Prandtl)

$$\int_f^\eta \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) dz = 0,$$

cela donne la relation suivante où sont apparues les vitesses transversales en bas et en haut de la couche liquide :

$$\int_f^\eta \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right) dz + U_2(x, \eta, t) - U_2(x, f, t) = 0,$$

puis en extrayant la dérivée de l'intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_f^\eta U_1 dz \right) - U_1(x, \eta, t) \frac{\partial \eta}{\partial x} + U_1(x, f, t) \frac{\partial f}{\partial x} + U_2(x, \eta, t) - U_2(x, f, t) = 0$$

au fond, $U_2(x, f, t) = 0$, la vitesse transverse est nulle, de même pour U_1 , et compte tenu de la vitesse à la surface : $\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1(x, \eta, t) \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_2(x, \eta, t)$, on obtient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_f^\eta U_1 dz \right) = 0.$$

Remarque, la formule est miraculeusement vraie en fluide parfait. Dans le cas d'un fluide parfait au fond, $U_2(x, f, t)$, la vitesse transverse n'est pas nulle, mais $U_2(x, f, t) = U_1(x, f, t) \frac{\partial f}{\partial x}$, la vitesse à la surface est toujours la même et le résultat global est toujours valide.

Remarque, la formule est plus simple à démontrer avec la transformation de Prandtl puisque l'on fait disparaître la position du fond.

6.6 Forme intégrale de la conservation de la quantité de mouvement

6.6.1 Equation de de Navier Stokes Réduites (de type couche limite) avant la forme intégrale.

L'analyse précédente nous fait insister sur le fait que les termes "importants" de l'équation de NS sont l'équation hydrostatique

$$p = P_0 + \rho g(\eta - z), \text{ ou avec la transformation de Prandtl } p = P_0 + \rho g(h - z),$$

et les termes suivants, dont certains sont peut être plus grand que d'autres, l'équation de conservation de la masse (incompressibilité)

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement dont les principaux termes sont le long de x , avec seulement le frottement transverse, et remarquant qu'il n'y a pas d'équation de quantité de mouvement suivant z (comme en couche limite).

$$\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \rho g \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} + \dots$$

Ces équations sont ni plus ni moins que les équations de couche limite classique. Ce sont ces équations qui après intégration transverse et hypothèses sur la forme du profil de vitesse vont donner Saint-Venant.

6.6.2 Forme intégrale.

On va maintenant les intégrer transversalement, en se plaçant toujours dans la transformation de Prandtl, donc on intègre de 0 à h , on tient compte de l'incompressibilité et de la forme de la pression pour écrire la conservation de la quantité de mouvement sous forme conservative, ce qui sera plus pratique pour intégrer ;

$$\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1 U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_1 U_2}{\partial z} \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \rho g \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} + \dots$$

On prend maintenant la moyenne sur la hauteur, et on détaille chaque terme du membre de gauche :

- $\frac{\partial U_1}{\partial t}$ devient $\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^h U_1 dz \right) - U_1(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial t}$
- $\frac{\partial U_1^2}{\partial x}$ devient $\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1^2 dz \right) - U_1^2(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} + 0$
- $\frac{\partial U_1 U_2}{\partial z}$ devient $U_1(x, h, t) U_2(x, h, t) - U_1(x, 0, t) U_2(x, 0, t)$

En facteur de $U_1(x, h, t)$, on retrouve la condition de vitesse à la surface : $\frac{\partial h}{\partial t} + U_1(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} = U_2(x, h, t)$. Puis l'expression des conditions d'adhérence au fond permettent d'annihiler $U_1(x, 0, t)$ et $U_2(x, 0, t)$. Il ne reste donc pour le membre de gauche

$$\left(\int_0^h \left(\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1 U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_1 U_2}{\partial z} \right) \right) dz \right) = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^h U_1 dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1^2 dz \right) \right)$$

Le membre de droite devient

$$-\rho g h \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{12}(x, h, t) - \tau_{12}(x, 0, t) + \dots$$

la contrainte en haut de la couche est prise nulle (sauf si on impose un vent), il ne reste que la contrainte au fond $-\tau_{12}(x, 0, t) = -\tau_{12f}$.

L'équation finale de la quantité de mouvement est donc bien :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^h U_1 dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1^2 dz \right) \right) = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_{12f} + \dots$$

Regroupons les équations de cette dernière étape

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1 dz \right) &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^h U_1 dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1^2 dz \right) \right) &= -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} - \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_{12f} \end{aligned}} \quad (5)$$

A partir d'ici, il faut faire des hypothèses pour poursuivre. On parle d'hypothèses de fermeture car il s'agit de trouver des relations en plus qui manquent pour résoudre le système. On veut donc écrire $\left(\int_0^h U_1^2 dz \right)$ et τ_{12f} en fonction de $Q = \int_0^h U_1 dz$ et h . Ce que l'on ne peut pas faire si on n'a pas la solution. Non, on ne tourne pas en rond, on dit simplement que la solution va toujours ressembler à peu près à la même chose.

On va donc faire l'approximation $\left(\int_0^h U_1^2 dz \right) = \frac{\Gamma}{h} \left(\int_0^h U_1 dz \right)^2 = \frac{\Gamma Q^2}{h}$, et poser une vitesse moyenne $u = Q/h$ pour que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^h U_1 dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1^2 dz \right) \right) \text{ s'écrit } \left(\frac{\partial}{\partial t} Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Gamma Q^2}{h} \right) \right) \text{ ou encore } \left(\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma hu^2) \right)$$

Ce terme $\Gamma = (h \int_0^h U_1^2 dz) / Q^2$ est appelé le coefficient de Boussinesq. Le rapport $(h^2 \int_0^h U_1^3 dz) / Q^3$ sera le coefficient de Coriolis... Ce sont des facteurs de forme (c.f. Chanson HOCF p28).

On va ensuite montrer que supposer $\Gamma \simeq 1$ permet bien de retrouver le terme d'accélération du modèle 1D. Mais auparavant nous devons aussi nous concentrer sur le terme de frottement au fond τ_{12f} qui doit lui aussi être écrit en fonction de h et Q .

6.7 Multicouches : "Multilayer Saint-Venant system with mass exchanges" vs "The hydrostatic multilayer solver for free-surface flows"

A lire en $N^{\text{ème}}$ lecture, voir aussi la section §19

Cette sous section explique les équations "multicouches" qui sont utilisées dans *Basifisk*. Il y a en effet deux points de vues quand il y a plusieurs couches, soit elles sont avec ou sans transfert de matière entre elles. Ce que nous allons voir ici en considérant plusieurs couches de déplacement arbitraire.

Les équations de Saint-Venant correspondent à une intégration sur toute l'épaisseur de fluide h des équations de couche mince/ couche limite que nous avons établies précédemment. Au lieu d'intégrer sur toute l'épaisseur nous l'avons fait, on peut envisager d'intégrer sur N sous couches h_k (voir figure 6.7), le jeu d'équations en couche mince :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} U_1 + \frac{\partial}{\partial x} U_1^2 + \frac{\partial}{\partial z} (U_1 U_2) \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} + \dots$$

On découpe donc en N couches la couche d'eau ayant *a priori* son mouvement propre :

$$h = \sum_{k=0}^{N-1} h_k,$$

la position du haut de la couche d'index k est repérée par $z_{k+1/2}$, son bas par $z_{k-1/2}$, on a tout en bas : $z_{-1/2} = z_b$, le fond imperméable ($z_b = f$), pour les couches intermédiaires

$$z_{k+1/2} = z_{k-1/2} + h_k$$

et tout en haut on retrouve la surface libre $z_{N-1/2} = \eta$:

$$\eta = z_b + \sum_{k=0}^{N-1} h_k, \quad \text{pour les couches intermédiaires } z_{k+1/2} = z_b + \sum_{l=0}^k h_l.$$

On pose par définition dans une couche k que la vitesse moyenne est $u_k = \frac{1}{h_k} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} U_1 dz$, on définit, avec la notation "crochet" $[\]$ qui permet d'alléger l'écriture, la différence entre le haut et le bas de la couche, $[q]_k = (q_{k+1/2} - q_{k-1/2})$, pour un champ q quelconque, par exemple $h_k = [z]_k$.

Avec cette notation, il est évident que $\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial z} q dz = q(x, z_{k+1/2}) - q(x, z_{k-1/2}) = [q]_k$.

On va intégrer transversalement sur une couche $\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \cdot dz$ le jeu d'équations, comme par la règle de Leibniz on sait que

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} U_1 dz = \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} U_1 dz + U_1(x, z_{k+1/2}) \frac{\partial}{\partial x} z_{k+1/2} - U_1(x, z_{k-1/2}) \frac{\partial}{\partial x} z_{k-1/2},$$

on peut écrire pour les deux termes de l'incompressibilité :

$$\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} U_1 dz = \frac{\partial}{\partial x} (h_k u_k) - [U_1 \frac{\partial}{\partial x} z]_k, \quad \text{ainsi que } \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial z} U_2 dz = U_2(x, z_{k+1/2}) - U_2(x, z_{k-1/2}) = [U_2]_k.$$

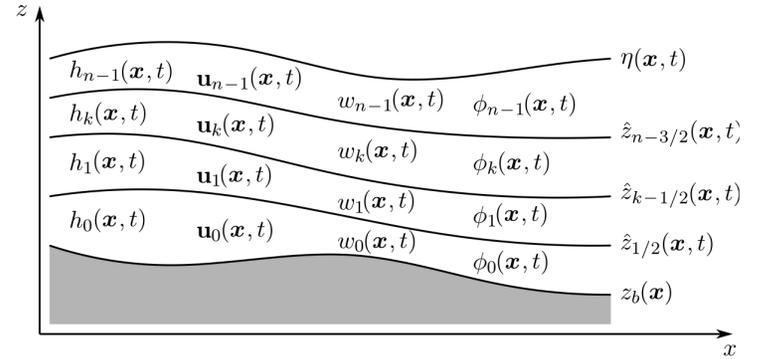


FIGURE 5 – Les N couches définies en le fond z_b et la surface libre η , les z_k sont les positions instantanées de différentes couches. La position du fond est $f = z_b$

L'équation d'incompressibilité, intégrée sur la couche d'index k d'épaisseur h_k , de vitesse moyenne u_k et de vitesse $U_1(x, z_{k\pm 1/2})$, $U_2(x, z_{k\pm 1/2})$ devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_k u_k) + [U_2 - U_1 \frac{\partial}{\partial x} z]_k = 0.$$

De même, les termes d'accélération deviennent :

$$\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial t} U_1 dz = \frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k) - [U_1 \frac{\partial}{\partial t} z]_k, \text{ et aussi } \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} U_1^2 dz = \frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k^2) - [U_1^2 \frac{\partial}{\partial x} z]_k. \text{ ensuite, } \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial z} U_1 U_2 dz = [U_1 U_2]_k.$$

On remarque que l'on prend un facteur de forme égal à un, dans le cas où il y a beaucoup de couches, c'est tout à fait naturel que

$$\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} U_1^2 dz \sim h_k \left(\frac{\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} U_1 dz}{h_k} \right)^2 = h_k u_k^2$$

car U_1 varie alors peu dans la couche (dans le cas d'une couche, $N = 1$, U_1 varie fortement de 0 à la vitesse max, et le facteur de forme sera discuté plus loin, il vaut 6/5 pour un demi Poiseuille). En définissant $p_k = \left(\frac{\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} p dz}{h_k} \right)$, le terme de pression devient $\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} p dz = \frac{\partial}{\partial x}(h_k p_k) - [p \frac{\partial}{\partial x} z]_k$. Dans les articles [2] et [39], on traite le terme de pression sous la forme plus simple

$$\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} p dz = \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \rho g (h + z_b - z) dz = \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \rho g \frac{\partial z_b}{\partial x}) dz = \rho g h_k \frac{\partial h}{\partial x} + \rho g h_k \frac{\partial z_b}{\partial x} = \rho g h_k \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Le terme de "viscosité" devient $\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} dz = [\tau_{12}]_k$. En mettant bout à bout on trouve l'équation de quantité de mouvement avec les notations [],

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k) + \rho \frac{\partial}{\partial x}(h_k u_k^2) = - \frac{\partial}{\partial x}(h_k p_k) + [p \frac{\partial}{\partial x} z]_k + \rho [U_1 (\frac{\partial}{\partial t} z + U_1 \frac{\partial}{\partial x} z - U_2)]_k + [\tau_{12}]_k.$$

Les équations "multicouches" sont donc

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(h_k u_k) + [U_2 - U_1 \frac{\partial}{\partial x} z]_k = 0. \\ \rho \frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k) + \rho \frac{\partial}{\partial x}(h_k u_k^2) = - \frac{\partial}{\partial x}(h_k p_k) + [p \frac{\partial}{\partial x} z]_k + \rho [U_1 (\frac{\partial}{\partial t} z + U_1 \frac{\partial}{\partial x} z - U_2)]_k + [\tau_{12}]_k. \end{cases}$$

Pour l'instant, les couches sont arbitraires et on n'a pas précisé leur mouvement. Par exemple, la distribution relative des couches est figée ou au contraire elle a un mouvement....

• A partir de ce point, soit on considère que la distribution relative des couches est figée. On définit l_α (avec $\alpha = k + 1$, les couches sont numérotées avec un indice différent dans Audusse [2]) la distribution relative telle que la hauteur h_α est une fraction de la hauteur totale h :

$$l_\alpha h = h_\alpha \quad \text{avec} \quad \sum_{\alpha=1}^N l_\alpha = 1, \quad \text{ainsi} \quad h = \sum_{\alpha=1}^N h_\alpha.$$

Dans Audusse [2] on note aussi $G = (\frac{\partial}{\partial t} z + U_1 \frac{\partial}{\partial x} z - U_2)$, cette quantité est non nulle car les couches sont fixées en proportion (les l_α sont fixes) et ne sont pas "entraînées dans le mouvement", il y a donc échanges de masse entre les couches. On fait la somme sur toutes les couches, des équations de masse dans chaque couche,

auquel cas, c'est ce système qu'il faut résoudre (Audusse [2], Da Vita [13]) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial(h_{\alpha}u_{\alpha})}{\partial x} = 0, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial(h_{\alpha}u_{\alpha})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_{\alpha}u_{\alpha}^2 + \frac{g}{2}l_{\alpha}h^2 \right) = -gh_{\alpha} \frac{\partial z_b}{\partial x} + u_{\alpha+1/2}G_{\alpha+1/2} - u_{\alpha-1/2}G_{\alpha-1/2} + (\tau_{\alpha+1/2} - \tau_{\alpha-1/2}) \quad (6b)$$

on a $G_{\alpha+1/2} = \frac{\partial z_{\alpha+1/2}}{\partial t} + u_{\alpha+1/2} \frac{\partial z_{\alpha+1/2}}{\partial x} - U_2(x, z_{\alpha+1/2}, t)$, on interprète $G_{\alpha\pm 1/2}$ comme le transfert de masse de la couche α entre les couches $\alpha + 1$ and $\alpha - 1$. les deux derniers termes de (6b) : $(\tau_{\alpha+1/2} - \tau_{\alpha-1/2})$ représentent les contraintes entre les couches

C'est le Multicouche avec échange de masse "*Multilayer Saint-Venant system with mass exchanges*", <http://basilisk.fr/src/multilayer.h>

• Une autre approche (Popinet [39]) est de considérer que les couches sont entraînées dans le mouvement et donc de considérer un déplacement Lagrangien des couches. Ainsi, les termes $G = (\frac{\partial}{\partial t}z + U_1 \frac{\partial}{\partial x}z - U_2)$ sont nuls puisqu'il s'agit de la condition de mouvement de chaque l'interface z_k entraînée dans l'écoulement, on a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}h_k + \frac{\partial}{\partial x}(h_k u_k) = 0. \\ \rho \frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k) + \rho \frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k^2) = -\frac{\partial}{\partial x}(h_k p_k) + [p \frac{\partial}{\partial x}z]_k + [\tau_{12}]_k. \end{cases}$$

ou avec l'expression plus simple de la pression

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}h_k + \frac{\partial}{\partial x}(h_k u_k) = 0. \\ \rho \frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k) + \rho \frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k^2) = -h_k g \frac{\partial \eta}{\partial x} + [\tau_{12}]_k. \end{cases}$$

C'est le "*The hydrostatic multilayer solver for free-surface flows*", on peut aussi l'appeler le "Multicouche Euler-Lagrange" <http://basilisk.fr/src/layered/hydro.h> Ce dernier est plus adapté si les couches ont une signification physique (par exemple de densité variable).

Revenons aux équations en couche mince elles mêmes et à la modélisation du frottement.

6.8 Solutions invariantes des équations en couche mince

Dans cette sous section nous examinons le cas laminaire et turbulent d'écoulement le long d'un plan incliné pour voir les différences et trouver l'inspiration pour la "fermeture" des équations de Saint-Venant. La suite de la modélisation ou la "fermeture", c'est à dire comment écrire $(\int_0^h U_1^2 dz)$ et τ_{12f} en fonction de $Q = \int_0^h U_1 dz$ et h , dépend du choix de la modélisation laminaire ou turbulente.

6.8.1 Quantité de mouvement cas ruissellement laminaire

Pour fixer les idées et trouver cette fermeture dans un cas simple, commençons par le cas du ruissellement laminaire, l'équation de conservation de la quantité de mouvement en n'oubliant pas la projection du terme de pente

$$\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z} + \rho g \alpha$$

dans ce cas, les contraintes sont d'ordre grandeur :

$$\left(\frac{\rho U_0^2}{h_0/\varepsilon} \right) \left((S_t) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \bar{U}_1 = - \left(\frac{\delta P}{h_0/\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{(\delta T_1)}{h_0} \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{12}}{\partial \bar{z}} + O(\varepsilon) \right) + \rho g \alpha$$

le terme visqueux a été écrit de manière formelle avec τ_{12} (l'autre est négligeable car $O(\varepsilon)$), il est $(\delta T_1) = \mu U_0/h_0$:

$$\frac{(\delta T_1)}{\rho U_0^2} \frac{\partial \bar{\tau}_{12}}{\partial \bar{z}} = \frac{(\mu U_0/h_0)}{\rho U_0^2} \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2}.$$

avec $Re = U_0 h_0/\nu$. En fait, dans ce cas, c'est la pesanteur qui fait s'écouler le fluide, donc U_0 est inconnu, Par moindre dégénérescence, ce terme de frottement visqueux contrecarre la pesanteur projetée qui est le moteur :

$$\frac{1}{Re} \sim \alpha \frac{gh_0}{U_0^2}$$

ce qui donne pour la jauge de la vitesse $U_0 = (gh_0^2 \alpha)/\nu$, si on garde $S_t = 1$, et $L = h_0/\varepsilon$ si on prend $(\delta P) = \rho gh_0$ provenant de la conservation transverse,

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\left(\frac{U_0 \varepsilon h_0}{\nu} \right) \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_1 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}} \right) = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2}.$$

On note que $\left(\frac{U_0 \varepsilon h_0}{\nu} \right) = \varepsilon Re = \varepsilon \alpha \left(\frac{gh_0^3}{\nu} \right) = \varepsilon \alpha Ga$, avec $Ga = (gh_0^3/\nu^2)$: nombre de Galilée.

Bien souvent, l'échelle longitudinale h_0/ε est prise tellement longue qu'elle est plus grande que la longueur caractéristique $L_c = h_0 \left(\frac{gh_0^3 \alpha}{\nu^2} \right)$ donc $\varepsilon \alpha Ga \ll 1$, auquel cas il ne reste que le problème de lubrification :

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \& \quad 0 = 1 - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2}.$$

Si la hauteur d'eau est constante c'est à dire que l'on étudie un écoulement uniforme qui ne varie pas, il ne reste que

$$0 = 1 + \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{z}^2} \text{ avec comme condition au fond } U_1(0) = 0, \text{ et à la surface } \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{z}} = 0.$$

La solution est l'écoulement de Nusselt, c'est un demi Poiseuille :

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{2} \bar{z}(2 - \bar{z}).$$

Le profil a une forme de demi parabole (cas de l'écoulement de Poiseuille, dit aussi ruissellement ou film de Nuβelt, sans Umlaut mais avec un Eszett), La forme de vitesse choisie elle est telle que le flux $\int_0^1 \bar{U}_1 d\bar{z} = \frac{1}{3}$ et on peut calculer le carré inconnu $\int_0^1 \bar{U}_1^2 d\bar{z} = \frac{2}{15}$ ainsi que le frottement au fond $\partial \bar{U}_1 / \partial \bar{z}|_0 = 1$ donc le coefficient de Boussinesq :

$$\Gamma = \frac{h(\int_0^h U_1^2 dz)}{(\int_0^h U_1 dz)^2} = \frac{6}{5}.$$

Plus loin, lorsque nous ferons les "fermetures" au §7.2.1, nous utiliserons le profil $\bar{u}_1 = \frac{3}{2} \bar{z}(2 - \bar{z})$ pour lequel le flux est unité, $\int_0^1 \bar{u}_1 d\bar{z} = 1$. Bien entendu $\frac{(\int_0^1 \bar{u}_1^2 d\bar{z})}{(\int_0^1 \bar{u}_1 d\bar{z})^2} = \frac{(\int_0^1 \bar{u}_1^2 d\bar{z})}{(\int_0^1 \bar{u}_1 d\bar{z})^2} = \frac{6}{5}$, mais le frottement au fond est $\partial \bar{u}_1 / \partial \bar{z}|_0 = 3$.

6.8.2 Quantité de mouvement cas rivière, canal ou fleuve turbulent

Dans cette section, nous nous aventurons dans la nature pour tenter d'estimer la forme du profil de vitesse turbulent dans un canal. Nous allons nous mouiller les bas de pantalon et salir nos beaux souliers vernis de théoriciens parisiens.

Nous allons donc rappeler les équations turbulentes, et nous allons rappeler les résultats de l'écoulement dans les tuyaux. EN effet, c'est à partir de l'étude de ces écoulements que l'on peut trouver un guide pour expliquer l'écoulement dans une rivière. En fait, une rivière est un demi tuyau ! Bien sûr c'est faux car la surface libre bouge, mais cela va être notre hypothèse de départ...

Décomposition de Reynolds et équations en couche limite

En première lecture, nous avons déjà vu le §7.2.6 qui nous donne un rappel sur le frottement dans les tuyaux... En seconde lecture, nous avons vu qu'avec un angle α petit, les équations en couche mince sont en fait les équations de Prandtl de type "couche limite". Nous l'avons établi dans le cas laminaire où U_1 et U_2 sont les "vraies vitesses". Si l'écoulement est turbulent ; U_1 et U_2 sont des vitesses moyennées, u'_1 et u'_2 sont leurs perturbations de moyenne nulle. On note $\langle \rangle$ la moyenne, donc si u_1 est la vitesse, on la décompose en $u_1 = U_1 + u'_1$, la moyenne $\langle u_1 \rangle = U_1$ et la perturbation $\langle u'_1 \rangle = 0$ et on a le terme de tenseur de contraintes de Reynolds en plus de la viscosité (voir <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/C5turb.ENSTA.pdf> pour une introduction à la turbulence). Le tenseur des contraintes totales est la somme de la partie laminaire et de la partie turbulente :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \langle u'_i u'_j \rangle,$$

en faisant l'approximation de couche mince comme en laminaire on n'en garde que le terme dominant :

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \rho \langle u'_1 u'_2 \rangle.$$

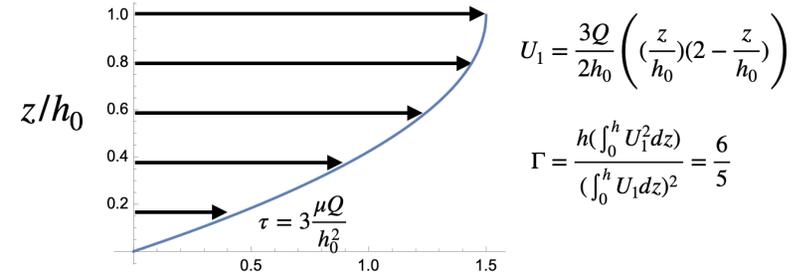


FIGURE 6 – Profil de demi Poiseuille (Nuβelt) valable dans les cas de films minces laminaires, pour un débit Q et une profondeur h_0 , la vitesse est $U_1 = \frac{3Q}{2h_0} \left(\left(\frac{z}{h_0} \right) \left(2 - \frac{z}{h_0} \right) \right)$, le facteur de forme est $6/5$, le frottement au fond est $\tau = 3 \frac{\mu Q}{h_0^2}$.

On peut alors définir un coefficient de "viscosité turbulente", ou "viscosité de Boussinesq" (ne pas confondre avec l'approximation sur la densité avec la température avec $\alpha(T - T_0) \ll 1$ et aux autres travaux de Boussinesq dont le coefficient de Boussinesq $(h \int_0^h U_1^2 dz)/Q^2$ et les équations de Boussinesq 12.4 que nous verrons plus loin...)

$$-\rho \langle u'_i u'_j \rangle = \mu_t \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right), \quad \text{ou} \quad -\rho \langle u'_i u'_j \rangle = \rho \nu_t \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right),$$

cette "viscosité turbulente" $\mu_t = \rho \nu_t$ est fournie par un modèle de turbulence *ad hoc* (nous en parlons un peu plus loin). Le tenseur complet est avec la somme de la viscosité normale plus la viscosité turbulente (on néglige souvent la viscosité μ), en couche mince il ne reste que :

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \rho \langle u'_1 u'_2 \rangle, \quad \text{ou, avec la viscosité turbulente : } \tau_{12} = (\mu + \rho \nu_t) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right).$$

Les équations en couche mince sont alors :

- conservation de la masse

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0$$

au fond, $U_1 = U_2 = 0$, l'interface, définie de manière implicite par la fonction $F(x, z) = (h(x, t) - z)$. Cette interface est conservée dans le mouvement du fluide donc la valeur de la vitesse transverse à l'interface en fonction du déplacement de l'interface (on néglige d'éventuels termes en $\langle u'_1 h' \rangle$) :

$$U_2(x, h, t) = \frac{\partial h}{\partial t} + U_1 \frac{\partial h}{\partial x}.$$

- conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme conservative (compte tenu de l'incompressibilité)

$$\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1^2}{\partial x} + \frac{\partial U_1 U_2}{\partial z} \right) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \rho g \alpha + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial z}$$

avec $\tau_{12}(x, h, t) = 0$ pas de contrainte en haut, et $\tau_{12}(x, 0, t)$ à déterminer...

On a gardé que le terme dominant (somme de la viscosité normale plus la viscosité turbulente, on verra que l'on néglige souvent la viscosité μ dans le cas des fonds qui ne sont pas lisses, mais rugueux) :

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - \rho \langle u'_1 u'_2 \rangle = (\mu + \rho \nu_t) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)$$

Il nous faut maintenant simplifier ces équations pour tenir compte de diverses hypothèses physiques sur la turbulence.

6.8.3 Rappel : cas de l'écoulement établi dans une conduite lisse

Pour continuer, on a besoin de savoir ce qu'il se passe dans une conduite (un tuyau si on veut). Ici on se place en 2D, donc c'est l'écoulement entre deux plans parallèles que l'on étudie. Dans le cas de l'écoulement établi (en 2D plan $U_1 = U$, $x = x_1$, $z = x_2$, $w = u_2$, c'est donc une fente infinie de hauteur $2h$ que l'on considère), ces équations sont écrites avec la condition d'invariance en x , soit : $\frac{\partial}{\partial x} = 0$. Comme la vitesse moyenne est nulle sur les parois, et la vitesse longitudinale étant indépendante de x donc la vitesse transverse est nulle partout. Il ne reste que l'équilibre pesanteur/ frottement dans le régime turbulent (voir par exemple <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/PC5.ENSTA.pdf>).

Dans l'équation transverse, il y a un terme $\langle w'w' \rangle$ que l'on peut négliger mais qui est de toutes façons invariant par translation. Remarquons que par symétrie $dU/dz = 0$ en $z = h$, et il ne reste que l'équilibre pesanteur/ frottement en turbulent :

$$0 = \rho g \alpha + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial}{\partial z} U(z) \right) - \rho \langle u'w' \rangle \right]$$

donc si on intègre du fond à la hauteur h

$$0 = \rho g \alpha h + [\mu (\frac{\partial}{\partial z} U(z)) - \rho \langle u'w' \rangle]_0^h, \quad \text{ou avec le frottement au fond } 0 = \rho g \alpha h - \tau_0, \quad \text{ou simplement } 0 = \rho g \alpha h - \mu (\frac{\partial}{\partial z} U(z))_0$$

car $\langle u'w' \rangle$ est nul en 0, et aussi peut être en h , il ne reste donc que $\mu \frac{\partial}{\partial z} U(z)|_0$, cette quantité est le frottement à la paroi. On pose par convention $\rho u_*^2 = \mu \frac{\partial}{\partial z} U(z)|_0$, ce qui définit la "vitesse de frottement" (c'est l'expression consacrée). On a donc que $\rho u_*^2 = \rho g \alpha h$. Le frottement au fond compense exactement le terme moteur $\rho g \alpha$. La "vitesse de frottement" u_* , qui est aussi la vitesse caractéristique est donc

$$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho} \text{ par définition et par l'équilibre pente/ frottement } u_* = \sqrt{gh\alpha}.$$

L'équilibre pesanteur/ frottement peut se réécrire en utilisant u_*^2 en place de $g\alpha h$, et si on l'intègre de 0 à z : on a $0 = \rho g \alpha (z - h) + \mu \frac{\partial}{\partial z} U(z) - \rho \langle u'w' \rangle$. Par définition de la viscosité turbulente des fluctuations, $\rho \nu_t \frac{\partial}{\partial z} U(z) = -\rho \langle u'w' \rangle$ donc $0 = \rho g \alpha (z - h) + \mu \frac{\partial}{\partial z} U(z) + \rho \nu_t \frac{\partial}{\partial z} U(z)$ on va réécrire cette équation avec u_*

$$0 = (\rho u_*^2/h)(z - h) + (\mu + \rho \nu_t) \frac{\partial}{\partial z} U(z),$$

ou encore

$$u_*^2 (1 - \frac{z}{h}) = \nu \frac{\partial}{\partial z} U(z) - \langle u'w' \rangle \quad \text{ou} \quad u_*^2 (1 - \frac{z}{h}) = (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial z} U(z).$$

En mesurant z avec h et U avec la vitesse moyenne U_0

$$\frac{\nu U_0}{h u_*^2} \frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} - \langle \bar{u}'\bar{w}' \rangle = (1 - \bar{z}), \quad \frac{\nu U_0}{h u_*^2} = \frac{U_0/u_*}{R_*} \quad \text{on pose } R_* = u_* h / \nu$$

comme le Reynolds est grand, il reste

$$- \langle \bar{u}'\bar{w}' \rangle = (1 - \bar{z}).$$

les fluctuations sont nécessairement linéaires en z . Or à la paroi les fluctuations sont nulles, ce qui n'est pas le cas pour cette équation, il faut donc introduire une couche limite pour assurer $-\langle \bar{u}'\bar{w}' \rangle = 0$ en $\bar{z} = 0$... On va trouver l'échelle qui convient dans la suite et surtout on va modéliser μ_t pour l'instant inconnue.

Rappel : viscosité turbulente longueur de mélange pour écoulement 2D sur une paroi lisse

Pour l'instant μ_t est inconnue, il faut lui trouver une expression pour la modéliser. On va donc modéliser $\nu_t = \mu_t/\rho$ de manière *ad hoc*. Ludwig Prandtl a introduit la longueur de mélange pour construire la viscosité turbulente ν_t , par définition, la "viscosité turbulente" de Prandtl dépend du cisaillement (la rotation, ou la vortacité) et d'une longueur qui est la taille des tourbillons les plus grands (arguments heuristiques de Prandtl), au plus simple cette longueur est proportionnelle à la distance à la paroi avec une constante κ (qui a été appelée constante de von Kármán, on prend $\kappa = 0.41 = 1/2.439$) donc on écrit grâce à cette hypothèse :

$$\nu_t = \ell^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z), \quad \text{avec } \ell = \kappa z.$$

Cette expression est la définition par Prandtl de la "viscosité turbulente" avec l'hypothèse de "longueur de mélange".

On a vu plus haut la relation d'équilibre pente frottement intégrée $0 = (u_*^2)(z/h - 1) + (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial z} U(z)$. On y substitue ν_t , elle devient :

$$0 = (u_*^2) (\frac{z}{h} - 1) + (\nu + \kappa^2 z^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z)) \frac{\partial}{\partial z} U(z),$$

on veut garder le maximum de termes dans cette expression. Par moindre dégénérescence on voit que u_*^2 joue un rôle important, on voit qu'il faut prendre $u_*^2 \sim \kappa^2 z^2 (\frac{\partial}{\partial z} U(z))^2$ donc l'échelle de vitesse est u_* , ensuite $u_*^2 \sim \nu \frac{\partial}{\partial z} U(z)$, donc l'échelle en z est ν/u_* . On voit que si on utilise ν/u_* comme unité de longueur, et u_* comme

échelle de vitesse, on a le PMD et on choisit historiquement d'écrire $y^+ = zu_*/\nu$ sans dimension et aussi $u^+ = u/u_*$ sans dimension, donc $\frac{\partial}{\partial z}U(z) = (u_*^2/\nu)\frac{\partial}{\partial y^+}u^+$ et ainsi comme $\nu_t = \nu(\kappa^2 y^{+2} \frac{\partial}{\partial y^+} u^+)$ en simplifiant par u_*^2 , on voit que l'on a obtenu les bonnes échelles pour notre équation :

$$0 = \left(\frac{\nu}{hu_*}y^+ - 1\right) + \left(1 + \kappa^2 y^{+2} \frac{\partial}{\partial y^+} u^+\right) \frac{\partial}{\partial y^+} u^+.$$

On peut la résoudre, en supposant toujours que $hu_*/\nu \gg 1$, on voit que si $y^+ \ll 1$ alors il ne reste que $0 = -1 + (1) \frac{\partial}{\partial y^+} u^+$, la vitesse est linéaire

$$\text{sous couche linéaire } u^+ = y^+ \text{ pour en pratique } y^+ < 5$$

et ensuite pour toujours $hu_*/\nu \gg 1$, et pour $y^+ \gg 1$ il reste maintenant $0 = -1 + (\kappa^2 y^{+2} \frac{\partial}{\partial y^+} u^+) \frac{\partial}{\partial y^+} u^+$ donc

$$\text{pour en pratique } y^+ > 10, \quad \frac{\partial}{\partial y^+} u^+ = \frac{1}{\kappa y^+}, \text{ l'intégration donne un logarithme}$$

C'est la "loi log" de la turbulence, cette loi est bien connue depuis les travaux de Von Kármán et Prandtl. En fait, on remarque que l'équation $1 = (1 + \kappa^2 y^{+2} \frac{\partial}{\partial y^+} u^+) \frac{\partial}{\partial y^+} u^+$ s'intègre exactement en

$$u_+ = \frac{\frac{1}{y_+} - \frac{\sqrt{4y_+^2 \kappa^2 + 1}}{y_+} + 2\kappa \sinh^{-1}(2y_+ \kappa)}{2\kappa^2}, \text{ ou aussi } \frac{1 - \sqrt{4y_+^2 \kappa^2 + 1}}{2y_+ \kappa^2} + \frac{\log\left(\sqrt{4y_+^2 \kappa^2 + 1} + 2y_+ \kappa\right)}{\kappa}$$

on retrouve le comportement linéaire et logarithmique, voir le tracé figure 7. On a bien $u^+ = y^+$ pour y^+ petit on a bien la loi linéaire et pour y^+ grand on retrouve une loi $\log u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + \frac{\text{Log}(\kappa) - 1 + \text{Log}(4)}{\kappa} = 2.439 \text{Log}(y_+) - 1.23$ (car $1/\kappa = 1/0.41 = 2.439$). Retenons que la vitesse est

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B, \text{ avec une constante } B.$$

Expérimentalement, il a été observé depuis 100 ans que $B \simeq 5.5$, et la valeur 2.4 varie des fois en 2.5, le 5.6 est des fois 5.75 (suivant les différents livres) donc :

$$u^+ = 2.4 \ln(y^+) + 5.5 \text{ ou en décimal, } u^+ \simeq 5.6 \log_{10}(y^+) + 5.5$$

A partir d'ici, pour les rivières, on néglige dans cette expression μ [Attention en aérodynamique, on ne néglige pas cette contribution qui joue un rôle car elle redonnera la "sous couche" laminaire sous la "couche logarithmique"]. On néglige μ car la sous couche visqueuse en ν/u_* va être négligeable par rapport à la taille des grains de sable ou des cailloux au fond de la rivière.

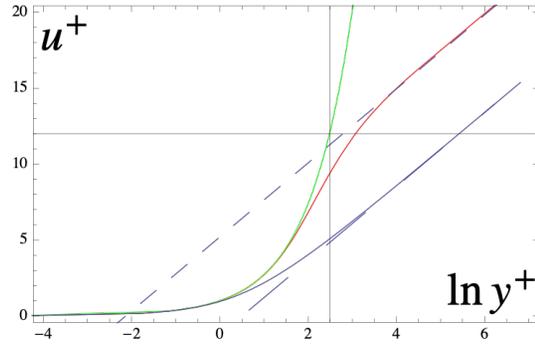
Rappel, Loi déficitaire dans les tuyaux lisses

Nous venons de regarder les équations turbulentes en 2D dans le cadre de la décomposition de Reynolds et de la fermeture de la longueur de mélange de Prandtl. Les mêmes arguments valent pour le 2D et l'axi. A des différences près que nous allons voir. Pour les tuyaux lisses, (en première lecture, nous avons déjà vu le §7.2.6) on revient aux équations de Navier Stokes en axisymétrique (il y a des r en plus par rapport au cas de la fente 2D considérée auparavant) ; l'équilibre entre la pression et le frottement dans les équations de Navier Stokes turbulentes donne

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r}, \text{ intégré sur la section cela donne } 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} \pi R^2 + 2\pi R(0 - \tau(0)), \text{ soit } \tau(0) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{D}{4} \text{ car } D = 2R.$$

Historiquement Darcy et d'autres ont posé $\lambda = (-D \frac{\partial p}{\partial x}) / (\rho \frac{u^2}{2})$ (avec le diamètre D et la vitesse moyenne u , ce choix est historique), en allemand, c'est le *Rohrreibungszahl*. Remarquons que ce coefficient est 4 fois le coefficient de frottement, rappelons aussi que $\frac{\tau(0)}{\rho u^2/2}$ est le coefficient de Fanning ou aussi coefficient de frottement,

$$\lambda = \frac{(-D \frac{\partial p}{\partial x})}{(\rho \frac{u^2}{2})} = 8 \frac{\tau(0)}{\rho u^2} = 8 \frac{u_*^2}{u^2}, \text{ donc par définition de ce lambda } \tau(0) = \lambda \frac{\rho u^2}{8}, \text{ donc } \rho u_*^2 = \lambda \frac{\rho u^2}{8},$$



- (1) $\phi = \eta$ laminair;
- (2) transition from laminair to turbulent; after Reichardt [56]
- (3) eqn. (20.14), turbulent, all Reynolds numbers;
- (4) eqn. (20.11), turbulent, $R < 10^4$;
- (5) $\phi = 11.5 \eta'^{1/4}$

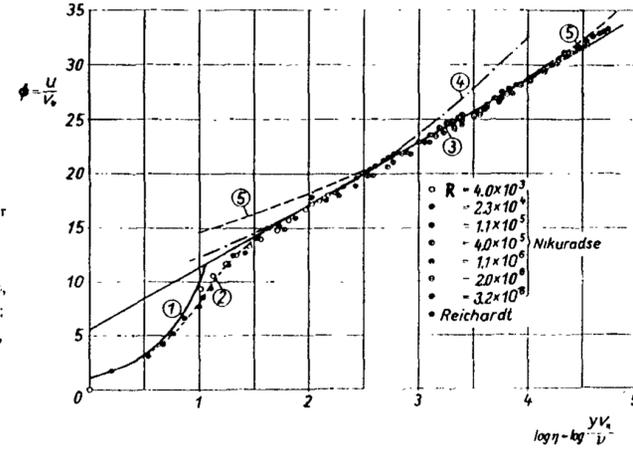


Fig. 20.4. The universal velocity-distribution law for smooth pipes

FIGURE 7 – Profil de vitesse adimensionné u^* en fonction de $\nu y/u_*$ en semi Log dans le cas de la fermeture de longueur de mélange de Van Driest $\lambda = \kappa y(1 - e^{-\frac{\nu y}{u_*}/26})$ utilisée en aérodynamique et correspondant aux expériences en rouge et dans le cas longueur de Prandtl en bleu. La courbe linéaire est en vert. Les pointillés sont les lois Log approchées. A droite extrait de Schlichting, expériences montrant la loi $\log(u^+ = 2.5 \ln(y^+) + 5.5)$ ou en décimal, $u^+ \simeq 5.75 \log_{10}(y^+) + 5.5$, ici principalement de Nikuradse.

Dans le cas des tuyaux de rayon R (ou des couches limites turbulentes), une dernière observation expérimentale indique que près du centre ($r \sim 0$) la vitesse a la forme déficitaire $U_1(r) = U_1(r=0) - u_* F((R-r)/R)$ plus loin du centre en venant près de la paroi $z = (R-r)$, on doit retrouver le profil log, donc $-F((R-r)/R) \sim \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{R}$, donc près de la paroi, la vitesse déficitaire se comporte comme

$$U_1(r) = U_1(r=0) - \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{R}{z}\right)$$

on en prend le flux sur la section, $r = R - z$ donc comme $\int_0^R 2\pi(R-z) \ln(R/z) = 3/2$, et avec u la valeur moyenne de la vitesse, (Ryhming p264). On a donc $u = U_1(r=0) - \frac{3u_*}{2\kappa}$ en utilisant en première approximation la forme logarithmique $U_1(r=0) = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{Ru_*}{\nu}\right) + B\right)$, donc on a une relation entre la vitesse moyenne et la vitesse de frottement $u \sim u_* \ln\left(\frac{Ru_*}{\nu}\right)$. Au final on suppose en fait que le profil log est valide partout en première approximation et donc

$$U_1(r) = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{Ru_*}{\nu}\right) + B\right) - \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{R}{z}\right) = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{zu_*}{\nu}\right) + B\right) \text{ ainsi la valeur moyenne est } u = u_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{Ru_*}{\nu}\right) + B - \frac{3}{2\kappa}\right).$$

On a dit que l'on pose historiquement $\lambda = 8(u_*/u)^2$, donc $\frac{Ru_*}{\nu} = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}}\right) \frac{uD}{\nu}$, on a donc la "loi de friction universelle des tuyaux de Prandtl", c'est une meilleure approximation sous forme implicite pour les tuyaux lisses (elle est toujours utilisée de nos jours) :

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \left(\frac{1}{\kappa} \ln\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}}\right) \frac{uD}{\nu}\right) + B - \frac{3}{2\kappa}\right) \text{ réécrit en } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10}\left(\frac{uD}{\nu} \sqrt{\lambda}\right) - 0.8,$$

voir Schlichting p 611, les constantes $\ln 10$, $1/\kappa$ et B sont ajustées expérimentalement pour trouver cette expression ($\ln x = 2.3 \log_{10} x$). Ce fit est correct jusqu'à $Re = 3.2 \cdot 10^6$ vérifié par les données expérimentales de Nikuradse 1932. En fait, la loi de Blasius (on en parlera plus loin, ou on l'a vu en première lecture avec Chézy) $\lambda = 0.316(uD/\nu)^{1/4}$ et la "loi de friction universelle des tuyaux de Prandtl" (relation implicite précédente) sont confondues jusqu'à $Re = 10^5$, avec toujours une

meilleure validation expérimentale pour Prandtl.

Récemment, des expériences très fines de McKeon, B.J., Zagarola, M.V. & Smits, A.J. 2005 "A new friction factor relationship for fully developed pipe flow" J. Fluid Mech. 538, 429-443 (cf aussi B. Dubrulle "Log at first sight" J. Fluid Mech. (2024), vol. 1000), avec rappelons

$$\lambda = \frac{(-D \frac{\partial p}{\partial x})}{(\rho \frac{u^2}{2})} = 8 \frac{\tau(0)}{\rho u^2} = 8 \left(\frac{u_*}{u} \right)^2$$

ont permis de trouver une meilleure relation pour les grands Reynolds

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.93 \log_{10} \left(\frac{uD}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 0.537,$$

ou avec la fonction de Lambert

$$\lambda = \frac{1}{(0.8382W(0.6287Re))^2} = \frac{1.42337}{W(0.6287Re)^2}$$

Rappel : profil logarithmique (lisse ou rugueux)

Nous venons de voir que la vitesse est dans une large zone de la forme (assez loin du fond ou d'une paroi)

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B, \text{ avec une constante } B \text{ qui dépend du modèle exact de longueur de mélange}$$

toute théorie de couche limite turbulente doit retrouver cette expression qui est bien connue depuis que Prandtl et Von Kármán se sont livrés dans les années 1920 à une compétition amicale mais rude sur ce problème. Ces résultats sont dans le livre de Schlichting. Rappelons que pour un écoulement turbulent dans un tuyau (et de nombreuses expériences depuis 100 ans l'ont montré) on estime que l'on a en bonne approximation (avec 2.4 ou 2.5 pour $1/\kappa$)

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{zu_*}{\nu}\right) + B$$

avec par définition u_* la vitesse de frottement, c'est à dire que par définition $\tau_0 = \rho u_*^2$. On a on estime donc que pour une rivière à fond lisse ou pour une couche limite de vent, on est comme dans un tuyau et donc que la loi logarithmique est valable (c'est une approximation usuelle). Pour un fond rugueux, on s'attend à la même forme, mais avec une autre échelle que ν/u_* pour dimensionner la profondeur, soit z_0 et alors $U = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$ (attention, on peut aussi écrire $U = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right)$ suivant la position de $z = 0$ et suivants les auteurs..., mais z_0 est petit). Or, dans un tuyau rugueux de rugosité k_s (taille des rugosités ou mini bosses plus ou moins régulièrement réparties sur la paroi) Nikuradse a décomposé la vitesse du tuyau lisse en faisant apparaître k_s artificiellement (dans le cas lisse il n'y a pas de k_s !) :

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) + 5.5 = 2.5 \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + 5.5 + 2.5 \ln\left(\frac{k_s u_*}{\nu}\right)$$

et défini ainsi une fonction de rugosité B , cette fonction est exactement $5.5 + 2.5 \ln(k_s u_* / \nu)$ dans le cas lisse ($k_s \rightarrow 0$), et sinon elle a été mesurée expérimentalement et tabulée (voir figure 9). Cette fonction B , est donc telle que pour un écoulement rugueux quelconque

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + B$$

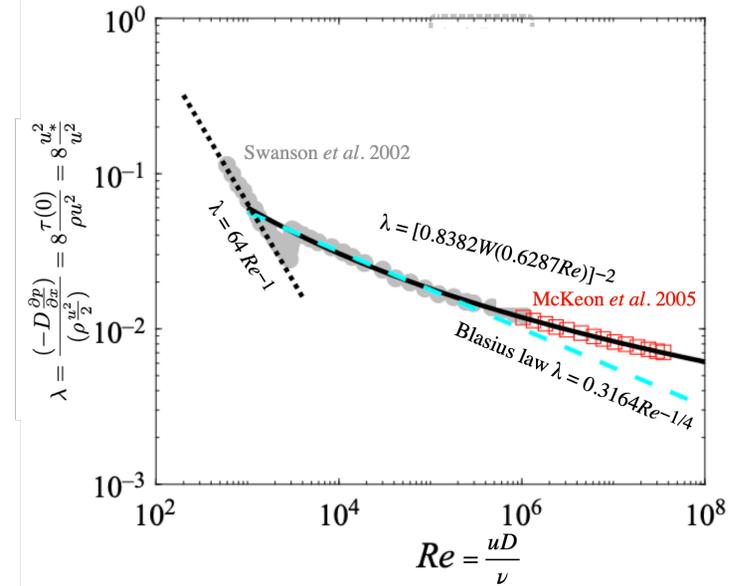


FIGURE 8 – loi de friction universelle dans un tuyau lisse, "loi de friction universelle des tuyaux de Prandtl" $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.93 \log_{10} \left(Re \sqrt{\lambda} \right) - 0.537$ et de Blasius $\lambda = 0.316(Re)^{1/4}$. modifié de Dubrulle 2024

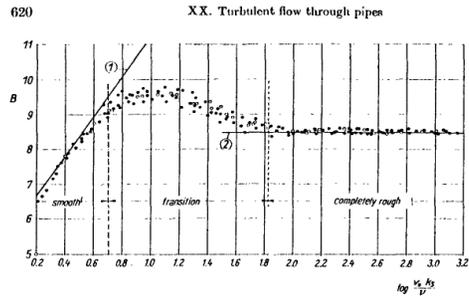


Fig. 20.21. Roughness function B in terms of $u_* k_s/\nu$, for Nikuradse's sand roughness. Curve (1): hydraulically smooth, eqn. (20.33); curve (2): $B = 8.5$; completely rough

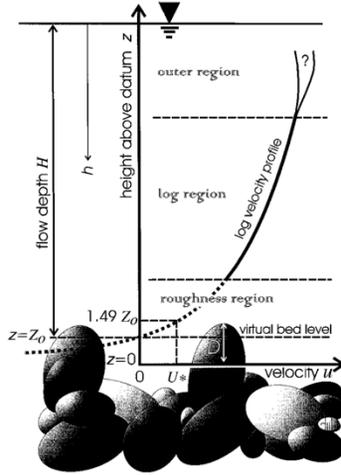


FIG. 1. Illustration of Velocity Profile Extrapolated into Bed and Showing Nomenclature (not to Scale)

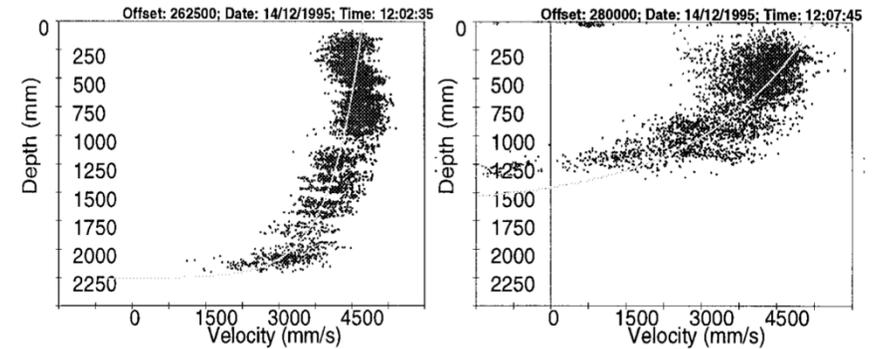


FIGURE 9 – Gauche :Diagramme de la fonction Roughness B de Nikuradse (Schlichting), on voit bien le comportement lisse $B = 5.5 + 2.5 \ln(k_s u_* / \nu)$ et rugueux $B = 8.5$ Centre : profil de vitesse en log et définition du z_0 , droite deux exemples de profils théoriques en log fittant des données de terrain (Graeme Smart "turbulent velocity profiles and boundary shear in gravel bed rivers" Journal of Hydraulic Engineering / February 1999

avec en construisant un Reynolds sur les rugosités Re_p

$$U = 2.5 \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + B \quad \text{avec cas lisse } Re_p < 5, \quad B = 5.5 + 2.5 \ln(k_s u_* / \nu) \quad \text{avec cas rugueux } Re_p > 70, \quad B = 8.5$$

pour les cas très rugueux, B est constante=8.5, et comme $e^{8.5/2.5} \simeq 30$ d'où en pratique $U = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 \sim d/30$.

Cas des rivières, fleuves et canaux

Dans le cas des écoulements turbulents en rivière, en canaux, ou en fleuves, on s'attend à retrouver un profil établi de forme logarithmique qui est caractéristique d'un écoulement turbulent [attention, les profils turbulents ont été observés et mesurés dans les tuyaux, dans les fleuves c'est moins clair, cette hypothèse de forme logarithmique est une hypothèse usuelle, il est vraisemblable qu'elle est fautive, le coefficient $1/\kappa$ est ajusté.... des fois on prend une loi de puissance plutôt qu'un log] :

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$z = 0$ est le fond où sont présentes des granulosités de taille z_0 , u_* est appelée la vitesse de frottement, elle est telle que le frottement au fond $\tau_0 = \rho u_*^2$.

Construction d'une viscosité turbulente avec longueur de mélange pour une rivière

Schlichting a introduit la longueur de mélange pour construire la viscosité turbulente, par définition, la viscosité dépend du cisaillement (la rotation, ou la vortacité) et d'une longueur qui est la taille des tourbillons les plus grands (arguments heuristiques de Prandtl) :

$$\nu_t = \ell^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z)$$

or nous avons vu que l'on néglige μ pour obtenir $0 = (\rho u_*^2/h)(z-h) + \rho \nu_t \frac{\partial}{\partial z} U(z)$ et on veut obtenir comme solution un profil logarithmique dont la dérivée est $\partial U(z)/\partial z = u_*/(\kappa(z))$, ces deux expressions nous donnent la longueur de mélange *ad hoc* (puisque la couche sous couche a été enlevée)

$$\ell = \kappa(z\sqrt{1-z/h}).$$

Le frottement au fond est bien :

$$\tau_0 = (\rho \ell^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z)) \frac{\partial}{\partial z} U(z)|_{z=0} \text{ soit } \tau_0 = \rho u_*^2.$$

La contrainte en $z=0$ est ρu_*^2 bien que l'on ait négligé le $\mu \partial U/\partial z|_0$.

En résumé dans le cas d'un écoulement turbulent établi dans un fleuve, on a donc l'équilibre pesanteur/ frottement dans le régime turbulent :

$$0 = \rho g \alpha + \frac{\partial}{\partial z} [\rho \nu_t (\frac{\partial}{\partial z} U(z))],$$

la loi de viscosité turbulente $\mu_t/\rho = \nu_t = \ell^2 \frac{\partial}{\partial z} U(z)$ est une fonction donnée de z et $(\frac{\partial}{\partial z} U(z))$ pour que l'on puisse résoudre le profil numériquement (par exemple $\ell = (\kappa(z\sqrt{1-z/h}))$, qui redonne la forme logarithmique $U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln(\frac{z}{z_0})$).

Le débit est $Q = u_* h_0 (\ln(h_0/z_0) - 1) + z_0/h_0$ or $h_0 \gg z_0$ donc (Keulegan) :

$$Q = u_* h_0 (\ln(h_0/z_0)), \text{ et le frottement } \tau_0 = \rho u_*^2 = \frac{\rho(Q/h_0)^2}{(\ln(h_0/z_0))^2}.$$

Le frottement au fond compense exactement le terme moteur $\rho g \alpha$. La vitesse de frottement, qui est aussi la vitesse caractéristique est

$$u_* = \sqrt{gh\alpha}.$$

Dans le cas turbulent, la vitesse caractéristique n'est plus proportionnelle à α comme en laminaire, mais à $\sqrt{\alpha}$.

Nous retrouverons cette dépendance dans la loi empirique de Chézy (§7.2.3) et dans les discussions de §7.2.6.

Ces considérations sur la turbulence étant faites, nous avons tous les éléments pour comprendre les fermetures de Saint-Venant que nous présenterons en §7.2.6.

7 Hypothèses pour obtenir Saint-Venant

Reprendre ici en première lecture.

7.1 Hypothèse de Fermeture, choix d'un profil

A partir de ce point, soit on a tout lu et on a montré que les équations de Navier Stokes en couche mince, avec la transformation de Prandtl et intégrées sur l'épaisseur d'eau $h(x, t)$ sont avec $U_1(x, z, t)$ vitesse longitudinale dans la couche d'épaisseur $h(x, t)$ coulant sur un fond $f(x)$, avec $\tau_{12f}(x)$ la valeur au fond du frottement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1 dz \right) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^h U_1 dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1^2 dz \right) \right) = -\rho g h \frac{df}{dx} - \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_{12f} \\ Q = \int_0^h U_1 dz. \end{cases} \quad (7)$$

Soit on a sauté cette partie et on a avec $u(x, t)$ la vitesse moyenne dans la couche d'épaisseur $h(x, t)$ posée sur un fond $f(x)$, la surface libre est en $\eta(x, t)$ et avec $\tau_x(x)$ la valeur au fond du frottement :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (hu) + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2) \right) = -\rho g h \frac{df}{dx} - \rho g h \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_x \\ h = \eta - f. \\ Q = hu. \end{cases} \quad (8)$$

Pour l'équation de la masse, pas de surprise, on voit qu'il s'agit bien de la même équation. En effet si on définit la vitesse moyenne $u = \frac{\int_0^h U_1 dz}{h}$ et $h = \eta - f$. et que le fond est fixe $\partial_t f = 0$, alors l'équation de la masse

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h U_1 dz \right) = 0 \text{ intégrée sur l'épaisseur est bien l'équation : } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0.$$

Pour la quantité de mouvement, le frottement au fond introduit avec les tranches et celui introduit avec Navier Stokes en couche mince est certainement le même $\tau_{12f} = \tau_x$. on le notera τ_0 , frottement au fond, par la suite (ou τ_w avec "w" pour *wall*). Mais pour la quantité de mouvement, on a un problème car le carré de la vitesse intervient : $(\int_0^h U_1^2 dz)$, et bien entendu

$$\left(\int_0^h U_1^2 dz \right) \neq \left(\frac{1}{h} \left(\int_0^h U_1 dz \right)^2 \right).$$

Il faut écrire cette intégrale en fonction de u la vitesse moyenne dans la tranche et h la hauteur d'eau. Ce que l'on ne peut pas faire si on n'a pas la solution, à moins d'inventer une forme à la solution $U_1(x, z)$. Cette solution aura une forme qui ressemble à la réalité. Cette idée est liée aussi aux solutions "semblables" qui sont des solutions simples des équations aux dérivées partielles et dans lesquelles les deux variables x et z sont assemblées en une seule. On dira donc que la vitesse suit l'*Ansatz* :

$$U_1(x, z) = u(x, t) \bar{u}(z/h)$$

où on a décomposé la dépendance en x et t dans $u(x, t)$ la dépendance transverse est comprise dans \bar{u} , en fait \bar{u} est une fonction de $\bar{z} = z/h$, qui varie de 0 à 1 quand \bar{z} varie de 0 à 1. On normalise $\int_0^1 \bar{u} d\bar{z} = 1$, le u est tel qu'il est la moyenne de la vitesse : $(\int_0^h U_1 dz) = hu$.

7.2 Coefficient de frottement et coefficient de forme de Boussinesq

7.2.1 Cas Laminaire

• Si le profil a une forme de parabole (cas de l'écoulement de Poiseuille, dit aussi ruissellement ou film de Nuβelt), la vitesse a toujours a peu près la forme de la parabole (on a mis le 3 pour assurer un flux unitaire i.e. $\int_0^1 \bar{u} d\bar{z} = 1$, cf les calculs du §6.8.1) :

$$\bar{u} = \frac{3}{2}\bar{z}(2 - \bar{z})$$

où \bar{z} est z/h . La forme de vitesse choisie elle est telle que le flux $\int_0^1 \bar{u} d\bar{z} = 1$ et on peut calculer le carré inconnu $\int_0^1 \bar{u}^2 d\bar{z} = \frac{6}{5}$ ainsi que le frottement au fond $\partial\bar{u}/\partial\bar{z}|_0 = 3$ donc la fermeture laminaire de nos quantités à modéliser est :

$$\left(\int_0^h U_1^2 dz\right) = \frac{6}{5}u^2h, \quad \tau_0 = \mu\partial u/\partial z|_0 = 3\mu\frac{u}{h}$$

En repassant en h et u , dans ce cas laminaire le système de Saint Venant s'écrit (α faible) :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6}{5}hu^2\right) = g\alpha h - gh\frac{\partial\eta}{\partial x} - 3\nu\frac{u}{h} \text{ avec toujours } \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \text{ et } h = \eta - f.$$

• Lorsque l'écoulement est bien établi, on retrouve que l'équilibre est

$$0 = \rho g\alpha h - \tau_0 \tag{9}$$

cet équilibre moteur/pente frein/contrainte est valable que l'écoulement soit laminaire ou turbulent ou même non newtonien...

7.2.2 Cas Turbulent

Lorsque l'écoulement est turbulent, on définit un coefficient de frottement c_f (appelé des fois Fanning) tel que par définition du coefficient de frottement $\tau_0 = c_f\frac{\rho u^2}{2}$ (nous reviendrons plus loin sur cette notation dans les paragraphes suivants car nous verrons qu'historiquement d'autres choix ont été faits, l'essentiel est de remarquer que ρu^2 a la dimension d'une contrainte, nous avons déjà discuté aussi ce problème en §6.8.2). Donc la vitesse d'équilibre d'un écoulement uniforme et stationnaire est telle que (avec toujours α faible) l'équation Eq. 9 est :

$$0 = \rho g\alpha h - \tau_0 \text{ on a une vitesse d'équilibre stationnaire associée } u = \sqrt{\frac{g}{c_f/2}}\sqrt{\alpha h}$$

• Si par hasard le profil est très plat, ce qui est le cas en turbulent, alors $(\int_0^h U_1^2 dz) \simeq u^2h$. et en utilisant le coefficient de frottement précédent, on a pour les équations turbulentes :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2) = g\alpha h - gh\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{1}{2}c_f u^2, \text{ avec toujours } \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \text{ et } h = \eta - f.$$

En s'inspirant des écoulements dans les tuyaux (voir Schlichting chapitre XX, et voir plus loin), on peut l'estimer en se fondant sur les mesures dans les tuyaux de Nikuradse, les variations de ce coefficient avec la taille des rugosité et le Reynolds sont indiqués au §6.8.3.

En réalité, la science de l'hydrologie est plus ancienne que celle de l'aérodynamique (du début du XXème), d'autres simplifications historiques ont été proposées. Le plus ancien est celui de Chézy 1778 que nous allons voir (puis Manning et les autres) dans les paragraphes suivants (§7.2.3).

7.2.3 Coefficient de Chézy

• L'écoulement dans la rivière est toujours supposé turbulent. Nous reformulons dans cette section la section précédente d'équilibre pente/ friction Eq. 9 avec l'optique historique et usuelle. C'est la démarche de tous les ouvrages "d'hydraulique". On se place dans le cas d'une rivière qui est de largeur finie, soit A la surface de la rivière, et soit P le périmètre mouillé. On définit son rayon hydraulique $R_h = A/P$ et son diamètre hydraulique $D_H = 4A/P$ (pour un tuyau de section circulaire $A = \pi R^2$ et $P = 2\pi R$, le diamètre hydraulique est le diamètre du tuyau, tandis que que le rayon hydraulique $R_h = R/2$, pour une gouttière, Aire $A = \pi R^2/2$, périmètre $P = \pi R$, $D_H = 2R$). Par exemple, pour une rivière de section trapézoïdale (figure 7.2.3), on a, si W est la largeur du fond, β l'angle de la berge ($\tan \beta$ est le "fruit") et h la profondeur :

$$\text{périmètre } P = W + 2h/\sin \beta \quad \text{Aire } A = h(W + d/\tan \beta), \quad \text{diamètre hydraulique } D_H = 4A/P.$$

On voit que pour une rivière large $W \rightarrow \infty$ le rapport tend vers la profondeur $A/P \sim h$.

Lorsque l'écoulement est bien établi, pour une rivière quelconque avec une pente α faible, on a un équilibre entre le terme moteur lié à la pente de la rivière qui va agir sur la surface mouillée, et le terme de friction au sol qui agit sur tout le périmètre mouillé (en supposant qu'il est constant, ce qui est une approximation d'autant plus forte aux berges) :

$$0 = \rho g \alpha A - \tau_0 P$$

On retrouve en 2D pour une largeur infinie l'équation 9 (pour une rivière large $A/P \sim h$). En utilisant le coefficient de frottement turbulent c_f défini au paragraphe précédent ($\tau_0 = c_f \frac{\rho u^2}{2}$) on voit que la vitesse est en $\sqrt{\alpha}$:

$$u = \sqrt{\frac{g}{c_f/2}} \sqrt{\frac{A}{P}} \alpha,$$

c'est à dire que u est reliée à la pente α par la relation de proportionnalité $u \propto \sqrt{\alpha}$, on pose le coefficient C_C tel que

$$u = C_C \sqrt{\frac{A}{P}} \alpha.$$

Par définition, le coefficient de proportionnalité entre la vitesse moyenne et $\sqrt{\frac{A}{P}} \alpha$ est noté

$C_C = \sqrt{\frac{g}{c_f/2}}$, il est appelé le coefficient de Chézy, il n'est pas sans dimension, il est en $m^{1/2}/s$. Cela provient d'un choix historique et expérimental de Antoine Chézy (1718-1798), il mesurait la hauteur d'eau, la vitesse et la pente. Il a remarqué que la vitesse est en racine de A/P et de la pente α .

Historiquement en 1776, pour le canal du Courpalet, Chézy trouva $C_c = 31m^{1/2}/s$ et 44 pour la Seine. Les valeurs vont de 30 pour un canal petit et rugueux à 90 $m^{1/2}/s$ pour un canal large et lisse. Dans le cas de la cuve FC80 utilisée en TP, le manuel de la cuve donne une valeur du Chézy de $51m^{1/2}s^{-1}$, des mesures effectuées donnent $60m^{1/2}s^{-1}$.

Malheureusement ce coefficient historique dimensionné continue à être utilisé de nos jours.

$$\text{Plutôt que } \tau_0 = c_f \frac{\rho u^2}{2} \text{ on écrit pour le frottement : } \tau_0 = \rho \frac{g}{C_c^2} u^2 = \rho \frac{g}{C_c^2 h^2} Q^2$$

Quoiqu'il arrive, le coefficient, quel qu'il soit dépend des caractéristiques du fond.

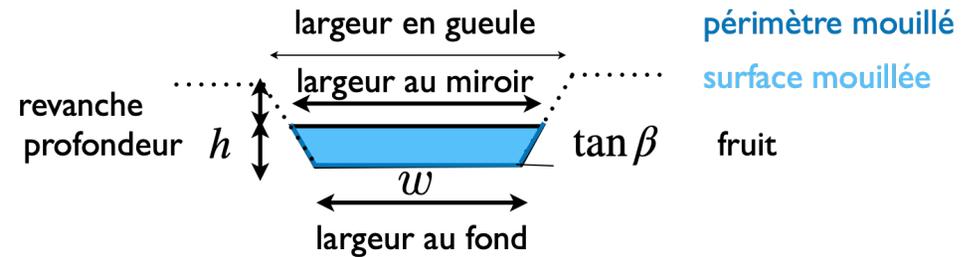


FIGURE 10 – Périmètre mouillé et surface d'une rivière : pour une rivière large $\frac{A}{P} \sim h$. Attention, la définition de rayon hydraulique n'est pas fixée, certains auteurs définissent $R_H = A/P$, donc pour une gouttière $A = \pi R^2/2$ $P = \pi R$, $R_H = R/2$), et pour une rivière large c'est $\frac{A}{P} \sim h$ (et non le double comme le donnerait la première définition).

7.2.4 Autre coefficient de frottement : Bazin,

Les travaux de Chézy ont été testés au fil des ans. Une tradition française lie ces travaux à l'École des Ponts et Chaussées qui forma des ingénieurs hydrologues, parmi eux, Henry Darcy (1803-1858), il propose la loi en u^2 pour le frottement avec un coefficient sans dimension. Henry Bazin (1829-1917) élève de Darcy fit de très nombreuses mesures dans un canal long et bien contrôlé, mais il préféra amender la formule de Chézy en ($A/P \sim h$ pour un fleuve large) et α angle du lit :

$$u = C \sqrt{\frac{A}{P}} \alpha = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{A/P}}} \sqrt{\frac{A}{P}} \alpha, \text{ avec } \gamma=0.06 \text{ parois très lisses, } 0.16 \text{ pour un pavage, } 0.85 \text{ pour de la terre régulière, } 1.30 \text{ terre irrégulière, } 1.75 \text{ prairies, galets.}$$

7.2.5 Autre coefficient de frottement : Strickler, Gauckler et Manning...

Robert Manning (1816-1897), irlandais, autodidacte en mécanique des fluides est associé à une formule plus précise que celle de Chézy, mais il semble que c'est le français Philippe Gauckler (1826-1905) qui l'a établie grâce aux expériences de Henry Bazin. Le Suisse Albert Strickler (1887-1963) a aussi popularisée la formule suivante (différente de Chézy dans son coefficient avec dimension) avec de nombreuses expérimentations il a montré une dépendance supplémentaire en h :

$$u \propto (A/P)^{2/3} \sqrt{\alpha}.$$

Strickler, Gauckler et Manning sont donc associés à cette formule pour l'avoir développée et popularisée. On définit expérimentalement n_{GM} le coefficient de Gauckler Manning ($sm^{-1/3}$) tel que le C_C correspond à un coefficient de Chézy qui varie avec la profondeur

$$C_C = \frac{1}{n_{GM}} (A/P)^{1/6} \text{ pour un fleuve large on a } C_C^{-2} = n_{GM}^2 (h)^{-1/3} \text{ et le frottement est } \tau_0 = \rho g \frac{n_{GM}^2}{h^{7/3}} Q^2$$

On définit aussi le coefficient de Strickler qui est l'inverse du Manning. Dans la suite, on va souvent négliger cette variation assez lente en $1/6$ et garder une valeur constante pour C_C . On remarque que pour un grand W (une rivière large est telle que $A/P \sim h$) on a $C_C = \frac{1}{n_{GM}} (h)^{1/6}$, Dans le cas Gauckler-Manning-Strickler, frottement τ s'écrit donc (à grande largeur) $\tau_0 = \rho g n_{GM}^2 Q^2 / h^{7/3}$ à l'équilibre $\tau_0 = \rho g h S_0$ avec S_0 la pente du lit, donc $\rho g n_{GM}^2 u^2 / h^{1/3} = \rho g h S_0$ donc on trouve la vitesse de frottement de Manning

$$u = \frac{\sqrt{S_0}}{n_{GM}} h^{2/3}$$

Expérimentalement, en fonction du diamètre des rugosités au fond, on trouve dans la littérature la loi complètement empirique

$$\frac{1}{n_{GM}} = \frac{26}{d^{1/6}}$$

valeurs en $sm^{-1/3}$ de n_{GM} : béton lisse 0.01 bois 0.014 sable assez fin 0.02 sable grossier, gravier 0.03, Galets 0.05, herbe végétation 0.2 (voir tableau http://www.fs1.orst.edu/geowater/FX3/help/8_Hydraulic_Reference/Mannings_n_Tables.htm)

Remarquons que cette expression donne un coefficient de frottement $c_f/2 = \frac{g}{C_C^2} = g n_{GM}^2 h^{-1/3}$ que l'on écrit

$$\frac{c_f}{2} = \frac{g n_{GM}^2}{h^{1/3}}$$

on peut donc interpréter $(g n_{GM}^2)^3$ comme une rugosité équivalente du fond. avec le résultat empirique $n_{GM} = d^{1/6}/26$ cela donne

$$\frac{c_f}{2} = 0.0145 \left(\frac{d}{h} \right)^{1/3}$$

Quelques valeurs typiques

Débit de la Seine dans le XIIIème environ 300m³/s, profondeur environ 3m. En cas de crue, janvier 2011, il passe à 985m³/s

fleuve	longueur en km	débit m ³ /s	matériau	valeur Manning
Seine	400	780	verre plastique	0.01
Danube	2860	6550	béton lisse	0.012
Mékong	4200	15 000	béton rugueux	0.014
Amazone	6570	175 000	gravier	0.029
Nil	670	2830	pâturages	0.035
Colorado	2330	640		

Fleuves du monde et quelques valeurs de Manning (sm^{-1/3})

<http://wwwrcamnl.wr.usgs.gov/sws/fieldmethods/Indirects/nvalues/index.htm>

Frottement dans la cuve FC-80

Dans ce paragraphe nous mettons un exemple d'utilisation du Canal Hydraulique à Pente Variable de 5m "FC80" (TecQuipment) dans la salle Galilée de Sorbonne-U du Campus Pierre & Marie Curie. Les données et les procédures sont celles du stage de Mathis Sebin et Redouan El Aaddaoui en 2024.

Ils ont construit des plaques de fond de cuve de différentes rugosité en collant des billes de verre sur des plaques de 8cm de large et 2 m de long (voir les valeurs sur le tableau de la figure 7.2.5, qui ont été placées dans des débit variables donnant des profondeurs associées. L'ordre de grandeur des variations est de 0,250 L/s (10cm de hauteur) à 1,500 L/s (30 cm).

Le frottement τ s'écrit (à grande largeur) par définition de Gauckler-Manning-Strickler : $\tau_0 = \rho g n_{GM}^2 Q^2 / h^{7/3}$ à l'équilibre $\tau_0 = \rho g h S_0$ avec S_0 la pente du lit, donc $\rho g n_{GM}^2 u^2 / h^{1/3} = \rho g h S_0$ donc on trouve la vitesse de frottement de Manning

$$u = \frac{\sqrt{S_0}}{n_{GM}} h^{2/3}, \text{ en fonction du diamètre des rugosités au fond } \frac{1}{n_{GM}} = \frac{26}{d^{1/6}}.$$

Ils ont vérifié que le débit dans la cuve en fonction de la hauteur suivait la relation de Gauckler-Manning-Strickler avec un certain n pour chaque fond rugueux. Ils ont vérifié (voir figure) que la valeur issue de la mesure (h, Q) de n était proche de la valeur $26/d^{1/6}$. L'erreur pouvant être due au frottement supplémentaire sur les parois.

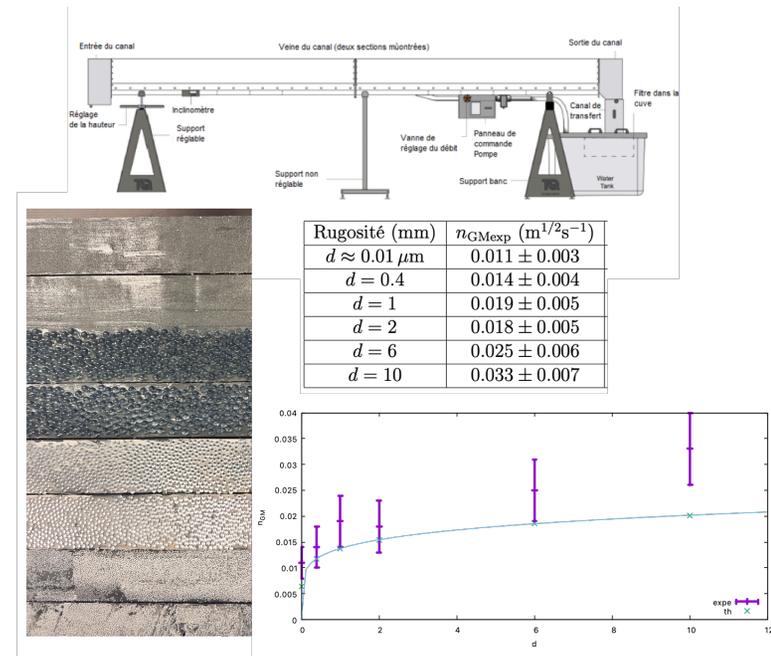


FIGURE 11 –

7.2.6 Autres coefficient de frottement (inspirés du tuyau) : Blasius, Prandtl, Fanning et Darcy-Weisbach

• frottement en ρu^2

Antoine Chézy, élève des Ponts et Chaussées, fut le directeur de cette école, et se rajouta une particule "de Chézy", Prony le remplaça, et après Darcy, Bazin... Pendant que la science de l'hydrologie se transmettait d'ingénieur des Ponts en ingénieurs des Ponts, la mécanique des fluides d'inspiration plus mathématique se développait dans les autres branches. L'impulsion vient de l'Université Allemande fondée sur une interaction forte entre Mathématiques Appliquées et Expériences. Notamment entre les deux guerres mondiales dans, l'université de Göttingen au centre de l'Allemagne a joué un rôle fondamental. Nous faisons ici un rappel sur les tuyaux lisses, voir la référence H. Schlichting "Boundary Layer Theory" Chapitre XX "turbulent flow through pipes" qui synthétise les recherches des années 1920 de Blasius, Prandtl, von Kármán sur la compréhension de la turbulence, leurs idées sont restées justes 100 ans après. Globalement, pour un frottement turbulent, ρu^2 est l'ordre de grandeur du frottement, on introduit comme nous l'avons déjà dit plus haut un coefficient de friction (introduit aussi par Gustave Eiffel 1832-1923 qui utilisait sa tour comme une énorme soufflerie verticale) c_f et parfois appelé f coefficient de Fanning (l'américain John Fanning (1837-1911) $c_f \equiv f$). Le frottement est écrit (en conservant l'anachronisme du 1/2 héritage des Suisses Bernoulli dont Daniel Bernoulli 1700-1782) avec la vitesse moyenne u au carré :

$$\tau = c_f \rho \frac{u^2}{2}.$$

Remarquons que le frottement est opposé au mouvement, on écrira donc de manière vectorielle :

$$c_f \rho \frac{|\vec{u}| \vec{u}}{2}.$$

• Frottement dans les tuyaux : formule de Blasius

Pour les tuyaux, si on revient aux équations de Navier Stokes (nous avons déjà vu ceci au §6.8.3) ; l'équilibre entre la variation de pression et les contraintes visqueuses τ (qui ne dépendent que de r par invariance par translation en x le long du tuyau) dans les équations de Navier Stokes turbulentes donne

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau(r)}{\partial r}, \quad \text{intégré sur la section donne } 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} \pi R^2 + 2\pi R(0 - \tau(0)), \quad \text{car pas de contrainte au centre, et } \tau(0) = \tau_0 = -\frac{D}{4} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{car } D = 2R.$$

Historiquement, on (peut être H. Darcy) a posé : $\lambda = (-D \frac{\partial p}{\partial x}) / (\rho \frac{u^2}{2})$ (avec la vitesse moyenne u et le diamètre D). Il faut dire que lors de la révolution industrielle, à partir de 1840, de nombreux scientifiques se sont posés des questions sur les arrivées d'eau et les écoulements dans les tuyaux (bien sûr, le tout premier d'entre eux attesté date de l'époque romaine, c'est Sextinus Frontin vers 0070, il s'intéressait au diamètre des conduites des aqueducs et aux pertes d'eau par des voleurs). C'est vraisemblablement Henry Bazin (1829-1917) qui est initiateur d'expériences fines, meilleures que celles originelles de Gaspard de Prony (1755-1839), le coefficient s'appelant coefficient de Henry Darcy (1803-1858), dont Bazin était l'élève). La formule a ensuite été modifiée par Julius Weisbach (Allemand 1806-1871) en 1845, en allemand, λ est le *Rohrreibungszahl*. Toujours est il que de nos jours la relation entre ce λ historique et c_f le coefficient de friction utile est telle que $c_f = \lambda/4$, la friction à la paroi est définie par

$$\tau_0 = c_f \rho \frac{u^2}{2} = \frac{1}{8} \lambda \rho u^2.$$

En laminaire on vérifie facilement que $\lambda = 64/Re$ avec $Re = uD/\nu$ (Reynolds sur la vitesse moyenne u et le diamètre D).

Pour les tuyaux lisses, en turbulent, Blasius a montré expérimentalement ($Re = uD/\nu$ et $D = 2R$) une dépendance en $Re^{-1/4}$:

$$\text{Formule de "Blasius turbulente" (à ne pas confondre avec la laminaire) : } \lambda = 0.3164 \left(\frac{uD}{\nu} \right)^{-1/4}$$

voir Schlichting "Boundary Layer Theory" p 596. Le frottement turbulent dans un tuyau suit la loi suivante (ré obtenue par Ivan Nikuradse 1894 -1979 et d'autres, écrite avec D ou $R = D/2$ et comme $0.3164/8 = 0.03955$ et $2^{1/4} = 1.19$) et ($100^{-1/4} = 0.31$) on a les expressions suivantes avec u vitesse moyenne :

$$\tau_0 = 0.03955 \left(\frac{\rho u^2}{\left(\frac{\nu}{uD} \right)^{1/4}} \right) = 0.03325 \left(\frac{uR}{\nu} \right)^{-1/4} \rho u^2 = \rho (u_*)^2 = 0.0665 \left(\frac{uR}{\nu} \right)^{-1/4} \frac{\rho u^2}{2} \quad \text{et aussi } \lambda = \left(100 \frac{uD}{\nu} \right)^{-1/4}$$

en ayant défini $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ la vitesse de friction, on a alors à partir de cette expression la dépendance en rayon en $1/7$ pour a vitesse moyenne u :

$$\frac{u}{u_*} = 6.99 \left(\frac{u_* R}{\nu} \right)^{1/7}.$$

Cette dépendance a été utilisé longtemps comme une première bonne approximation de la vitesse turbulente. Comme déjà dit en §6.8.3, pour faire mieux que Blasius et que Kármán, car avec Prandtl ils étaient en compétition, Prandtl a proposé une autre formule "La loi de friction universelle des tuyaux de Prandtl", c'est une meilleure approximation pour les tuyaux lisses ($Re = uD/\nu$ vitesse moyenne u et le diamètre D) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10} \left(\frac{uD}{\nu} \sqrt{\lambda} \right) - 0.8 \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10} \left(\frac{Re}{2.51} \sqrt{\lambda} \right)$$

voir Schlichting p 611. [Pour l'établir il faut savoir que vers le centre d'un tuyau, le profil de vitesse est de la forme déficitaire $U_1(r) = U_{centre} - u_* F(r/R)$, donc et raccorder les deux]. Nikuradse a montré expérimentalement qu'elle est correcte jusqu'à $Re = 10^6$. En fait, la loi de Blasius et la loi de Prandtl sont confondues jusqu'à $Re = 10^5$, avec toujours une meilleure validation pour Prandtl.

• Frottement dans les tuyaux : formule de Colebrook et diagramme de Moody

La formule de Nikuradse a été généralisée par Colebrook (1917-1997) et White 1937 puis Colebrook 1939 dans le cas d'un tuyau avec des rugosités, k taille de la rugosité, $Re = uD/\nu$ (Reynolds sur la vitesse moyenne u et le diamètre D) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,7D} \right)$$

et la "harpe de Nikuradse" a été incluse dans le diagramme de Moody. Cette abaque introduite en 1944, par Lewis Ferry Moody trace en fonction du Reynolds sur le diamètre D le coefficient λ pour différentes rugosités k/D

Par la conversion subtile le "diamètre hydraulique" D est le diamètre du tuyau, mais le rayon hydraulique R_h n'est pas le rayon mais $R_h = D/4$, pour les écoulements en canaux on utilise donc

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{14.8R_h} \right)$$

si on pose $b = \frac{k}{14.8(D/4)}$, $a = \frac{2.51}{Re}$ on peut résoudre

$$\lambda = \frac{1}{\left(\frac{2W \left(\frac{\ln 10}{2a} 10^{\frac{b}{2a}} \right)}{\ln 10} - \frac{b}{a} \right)^2}$$

où la fonction de Lambert $W(x)$ est utilisée (cette formulation explicite ne date que depuis 2011),

$$W(x)e^{W(x)} = x \text{ approximativement } W(x) = \ln x - \ln \ln x + \left(\frac{\ln \ln x}{\ln x} \right) + \dots$$

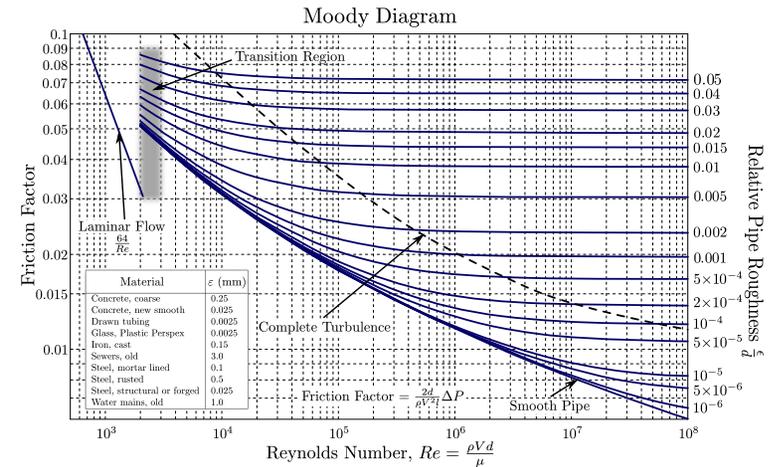


FIGURE 12 – Diagramme de Moody pour les tuyaux, Darcy-Weisbach Friction Factor λ (noté f_D) fonction du Reynolds sur le diamètre (noté $d = D$) à différentes rugosités (roughness k/D notée ϵ/d). Source https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Moody

Dans le cadre des rivières, le coefficient c_f est parfois appelé f_F coefficient de Fanning, on définit aussi $f_{DW} = 4f_F$ coefficient de Darcy-Weisbach (c'est le λ). Lorsque le fond est rugueux, la partie en Re est négligeable, il ne reste que le morceau avec k_h taille de la rugosité importante. Comme $g/C_c^2 = \lambda/8$ par définition, de ces coefficients, on peut employer la formule suivante pour le Chézy :

$$\tau_0 = \frac{1}{2}c_f\rho u^2 = \frac{\lambda}{8}\rho u^2 = \frac{\rho g}{C_c^2}u^2 \text{ avec } C_c = \sqrt{8g(2.03 \log(14.8R_h/k_h))}$$

avec k_h taille de la rugosité, R_h . on trouve dans la littérature des fois avec 12.7 voire 12.2 au lieu du 14.8 (comme plus haut dans Colebrook). c'est une formule comme trouvée par Nikuradse, Colebrook mais trouvée aussi par Keulegan en 1938.

La page wikipedia https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Darcy_friction_factor_formulae&oldid=994167833 est très complète, elle indique d'autres formules empirique de friction dans les tubes. Elle indique que Brkić, D. (2012). "Lambert W Function in Hydraulic Problems Mathematica Balkanica. 26 (3-4) : 285-292. <http://www.math.bas.bg/infres/MathBalk/MB-26/MB-26-285-292.pdf> a inversé la formule qui sinon étant implicite est peu pratique.

7.2.7 Coefficient de frottements écrits avec "une pente équivalente"

Pour simplifier, on ne parle plus de rayon hydraulique, de diamètre hydraulique de A/P ou autres notations historiques, mais de h la profondeur uniquement (on se place résolument pour des rivières/ fleuves/ canaux larges $A/P \sim h$). Dans ce paragraphe, nous faisons un inventaire des différentes formes Fanning, Darcy, Manning Chézy évoquées plus haut. On a bien compris que les expressions dépendaient de l'histoire et des pays. En résumé on écrira $\tau_0 = \rho g h S_f$ avec S_f la friction sans dimension (équivalente à une pente, *Slope*), c'est une notation classique des hydrologues. On écrit le frottement en fonction de la vitesse moyenne u et du débit $Q = hu$.

- définition d'un coefficient de frottement simple c_f (appelé coefficient de Fanning en hydro)

$$S_f = c_f \frac{u^2}{2gh} \text{ soit } \tau_0 = \rho \frac{c_f}{2} u^2 = \frac{c_f}{2h^2} Q^2$$

- Gauklert Manning Strikler (n varie avec le débit du fleuve en pratique!)

$$S_f = n^2 \frac{u^2}{h^{4/3}} \text{ soit } \tau_0 = \rho g n^2 \frac{u^2}{h^{1/3}} = \rho g n^2 \frac{Q|Q|}{h^{7/3}}$$

- Darcy-Weisbach, f coefficient empirique

$$S_f = f_{DW} \frac{u^2}{8gh} \text{ soit } \tau_0 = \rho \frac{f_{DW}}{8} u^2 = \frac{f_{DW}}{8h^2} Q^2$$

- coefficient de Chézy

$$S_f = \frac{u^2}{C_c^2 h} \text{ soit } \tau_0 = \rho \frac{g}{C_c^2} u^2 = \rho \frac{g}{C_c^2 h^2} Q^2$$

- friction de Kellerhals (r coefficient de rugosité de Kellerhals)

$$S_f = r^2 \frac{u^2}{h^{3/2}} \text{ soit } \tau_0 = \rho \frac{gr^2}{h^{1/2}} u^2 = \rho \frac{gr^2}{h^{5/2}} Q^2$$

- etc.

Notons qu'il est avantageux de remplacer u^2 par $u|u|$ pour avoir toujours le frottement opposé à la vitesse même si elle est négative.

7.2.8 Cas des autres fluides

Nous avons considéré le cas du fluide Newtonien laminaire puis turbulent. Le frottement τ_0 à la paroi est fonction de Q et h . Souvent dans la nature, ce n'est pas uniquement de l'eau qui coule mais un mélange complexe de débris variés. la rhéologie de ces fluides n'est pas encore bien connue ni modélisée.

Si ce ne sont des cailloux, et que l'on néglige l'eau, le frottement à la paroi a alors une composante de friction importante : on mettra donc un frottement de Coulomb pour τ_0 .

S'ils sont de plus en plus mouillés, ces fluides peuvent être des écoulements de boue avec un effet de seuil. Il faut que $\tau > \tau_{seuil}$ pour que le mouvement se produise. La Neige peut être décrite par un frottement à la paroi solide et turbulent... Nous verrons des cas précis à la section VI.

1

7.3 Force de Coriolis

Pour des applications mettant en jeu des centaines de kilomètres, il ne faut plus négliger la force d'inertie d'entraînement de Coriolis qui est telle que $\vec{F} = 2\vec{\Omega} \times \vec{u}$

$$F_x = 2\rho h \omega \sin \lambda v, \quad F_y = -2\rho h \omega \sin \lambda u.$$

Pour les calculs pratiques, les domaines ne sont pas très étendus et le coefficient f_c est constant avec $f_c = 2\omega \sin \lambda$, à la latitude de la France 48° , $f_c = 1.08 \cdot 10^{-4}$, (un jour sidéral est de 23h56mn04s).

7.4 Influence du vent

Enfin, dans le cas de calculs pour des bras de mer, on peut tenir compte aussi de la force du vent. Cette influence a complètement été négligée jusqu'à présent dans l'analyse. Bien entendu, l'interaction air eau est très complexe et n'est pas encore résolue de nos jours. On modélise la force du vent sous la forme simplifiée suivante :

$$F_x = \frac{\rho_{air}}{\rho_{eau}} C_d U \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$F_y = \frac{\rho_{air}}{\rho_{eau}} C_d V \sqrt{U^2 + V^2}$$

où U et V sont les composantes de la vitesse du vent (en toute rigueur la vitesse relative air/eau). Le coefficient α est un coefficient empirique qui dépend de la taille moyenne des vagues ("rugosité de la surface") (formule de l'institut of Oceanographic Sciences, Heaps 65 [?], Hervouet [22]) :

$$\text{pour } w < 5m/s \quad c_d = 0.565 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{pour } 5m/s < w < 19.22m/s \quad c_d = (-0.12 + 0.137w) \cdot 10^{-3}$$

$$\text{pour } 19.22m/s < w \quad c_d = 2.513 \cdot 10^{-3}$$

7.5 Remarque : les équations primitives

On a vu que l'on réduit Navier Stokes à un système hydrostatique qui ressemble beaucoup aux équations de couche limite. Pour les océans, on utilise une forme un peu différente de ces équations (voir Guillén-González & Rodríguez-Gómez). Comme le fond est très profond, et les échelles en x et y , coordonnées géographiques sont énormes, les variations de la surface libre sont négligeables. On suppose que la surface ne bouge pas. La surface plate (et même rigide!) de la mer est en $z = 0$, le fond est en $z = -D(x, y)$ la topographie du fond. La pression est supposée comme toujours hydrostatique $-\partial_z p / \rho - g = 0$, et on définit une "pression" $p_s(x, y)$ à la surface, telle que $p(x, y, z) = p_s(x, y) - \rho g z$. Bien entendu, cette pression traduit normalement la hauteur de vague, mais on la néglige. De même, puisque que l'on suppose négligeables les variations de surface libre (surface rigide de la mer!!), on suppose que $w = 0$ à la surface de l'eau.

On a toujours aussi $u = v = w = 0$ au fond de la mer en $z = -D(x, y)$. L'incompressibilité

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w = 0$$

permet d'écrire la vitesse w transverse à partir de u et v et compte tenu de la vitesse transverse supposée nulle à la surface :

$$w(x, y, z) = \int_z^0 \left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v \right) ds$$

mais cela induit une contrainte sur le champ p_s car on doit aussi avoir l'adhérence au fond, $w(x, y, -D(x, y)) = 0$. On doit aussi avoir $\frac{\partial}{\partial z}u = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z}v = 0$ à la surface $z = 0$ comme conditions qui traduisent qu'il n'y a pas de contraintes imposées à la surface.

Les équations du mouvement sont alors

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u + w \frac{\partial}{\partial z}u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}p_s + \left(\nu_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + fv$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v + w \frac{\partial}{\partial z}v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}p_s + \left(\nu_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v - fu$$

vraisemblablement $\nu_x = \nu_y \neq \nu_z$. On s'autorise des viscosités différentes dans les différentes directions. Ces équations sont légèrement différentes par l'existence de cette surface "rigide", mais de la résolution du système sous la contrainte d'incompressibilité, on obtient p_s donc la perturbation de vague.

7.6 Conclusion de la partie 1

Au terme de cette première partie, on a introduit les équations de Saint-Venant (*Shallow Water* à partir de considération de conservation de la masse et de la quantité de mouvement d'une couche mince d'eau dans laquelle on a considéré que la vitesse ne dépendait pas de la profondeur et que la pression vérifie toujours la relation d'équilibre hydrostatique. On est ensuite partis des équations de Navier Stokes, en supposant la vitesse débitante plus grande que la vitesse transverse, l'épaisseur mince de la couche d'eau et l'action des forces transverses de viscosité. On a établi les équations de type "couche limite de Prandtl". Ces équations moyennées sur l'épaisseur permettent de retrouver les équations de Saint-Venant.

Nous avons enfin présenté des simplifications usuelles de l'expression du frottement pariétal (Chézy...) et des termes sources (Coriolis, vent...).

Si on ne l'a pas fait, on peut maintenant revenir à la section " **Saint Venant à partir de Navier Stokes**" §6.

Dans la suite nous examinons des solutions de ces équations dans des cas pratiques, inondation, crue, tsunamis, marées, rupture de barrage.



FIGURE 14 – Photo PYL. La Yamunâ fait partie des Sept rivières sacrées de l'Inde, sa longueur est 1 370 kilomètres, elle se jette dans le Gange. Environ 57 millions de personnes dépendent des eaux de la Yamunâ. Avec un volume annuel d'environ 10 000 milliards de m³ et l'utilisation de 4 400 milliards de m³ - dont 96 % pour l'irrigation - la rivière participe pour plus de 70 % à l'approvisionnement en eau de Delhi. La Yamunâ est, après le Gange et la Sarasvati aujourd'hui disparue, le cours d'eau le plus sacré en Inde. Elle est considérée comme la fille de Sûrya, le dieu du soleil, et la sœur de Yama, le dieu de la mort et, selon la tradition, ceux qui prennent un bain dans les eaux saintes du fleuve ne craignent pas la mort. (source wiki)



FIGURE 13 – fontaine des Quatre-Fleuves par le Bernin, place Navone à Rome. Photo PYL

Deuxième partie

Le Fluide : Equations de Saint-Venant, grandes classes de simplifications

On a maintenant établi les équations de Saint-Venant, nous rappelons leur différentes formes, puis montrons quelques exemples de dégénérescences caractéristiques de ces équations. C'est à dire quelques exemples de simplifications de certains des termes pour obtenir des équations encore plus simples. Bien entendu, ces simplifications seront liées à des hypothèses comme par exemple la forme du terrain, s'il est par exemple en pente forte ou faible, si le frottement est fort ou faible... On comprend bien aussi que l'on a des formes un peu différentes suivant que l'on considère un canal de largeur constante, ou infinie (c'est pareil!), ou de largeur variable.

On fait donc attention à la définition du flux, des fois, il s'agit du flux par unité de largeur (cas invariant transverse : infini, ou largeur constant), ou il s'agit du vrai flux (Q ou uh ou $uA...$), on fait alors attention à la surface mouillée et à l'aire A , certains modèles sont 1D avec une largeur $w(x)$ donnée qui permet par exemple de tenir compte des bassin de déversement lors d'inondation (N. Goutal et al., "section averaged equations"). Des fois la position de la surface libre η intervient, des fois non.

Chacune de ses formes a une utilité pour résoudre un problème donné. Nous verrons ensuite les applications. On met ici le frottement $g\frac{1}{C_C^2}u^2$ plutôt que $\frac{cf}{2}u^2$

8 Saint-Venant et ses simplifications

8.1 Saint-Venant équations avec dimensions

- Forme conservative, on ne se préoccupe pas de la largeur du canal, Q débit par unité transverse, η surface libre, f forme du fond

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} \right) &= -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - g \frac{Q^2}{h^2 C_C^2} \\ \eta &= f + h.\end{aligned}$$

- Forme conservative, on ne se préoccupe pas de la largeur du canal, Q débit par unité transverse, η surface libre, f forme du fond

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right) &= -ghf' - g \frac{Q^2}{h^2 C_C^2} \\ \eta &= f + h.\end{aligned}$$

- Forme conservative, on ne se préoccupe pas de la largeur du canal, Q est par unité transverse, η surface libre, f forme du fond

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} hu^2 &= -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - g \frac{u^2}{C_C^2} \\ \eta &= f + h\end{aligned}$$

- Forme non conservative issue de la précédente, $Q = hu$, on ne se préoccupe toujours pas de la largeur du canal, f forme du fond (pas de η)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u = -gf' - g \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{u^2}{C_C^2 h}$$

- Forme conservative avec prise en compte d'une section variable Si A est la section mouillée, Q est le flux à travers cette surface

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{A} = -gA \frac{df}{dx} - gA \frac{\partial h}{\partial x} - Ag \frac{Q^2}{C_C^2 A^2 (A/P)}$$

8.2 Saint-Venant, équations adimensionnées : différentes échelles

8.2.1 Saint-Venant, équations adimensionnées

Attention dans cette section, on suppose que le fond est en fait $f = -\tan(\alpha)x + f_b$. Cet angle est petit et il est tel que $\tan(\alpha) \sim (\alpha)$, on confond la tangente et l'angle par la suite. Cela donne une pente vers la droite ($-\alpha < 0$) qui fait couler l'eau, f_b désignerait des dunes sous marines par exemple, ou toutes autres bosses qui perturbent le fond plat incliné d'un angle $-\alpha$.

La forme non conservative avec $f = -\alpha x + f_b$ forme du fond est :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u = +g\alpha - gf'_b - g \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{u^2}{C_C^2 h}. \end{cases} \quad (10)$$

On cherche les échelles pertinentes de manière à avoir des coefficients sans dimension et une dégénérescence significative. Il s'agit bien entendu de la même analyse phénoménologique (voir 6.8.1) qu'auparavant, mais effectuée sur les équations intégrales de Saint-Venant en turbulent.

Une première idée consiste à utiliser la profondeur caractéristique h_0 de l'écoulement pour mesurer $h = h_0 \bar{h}$ et écrire $\bar{x} = x/(h_0/\varepsilon) = \varepsilon x/h_0$. Cet ε est là pour nous rappeler qu'intrinsèquement les équations de Saint-Venant sont valides pour des couches minces (longueur $h_0/\varepsilon \ll h_0$). En fait, il faut utiliser les équations de Navier Stokes si $\bar{x} = x/h_0$.

Le deuxième problème est dans l'estimation de la vitesse, celle ci peut être imposée par un moyen extérieur (déversoir, source...) ou être la réponse à la pente du fleuve α qui génère l'écoulement. Notons U_0 la vitesse, la conservation de la masse est alors adimensionnée par moindre dégénérescence (tous les termes sont de même ordre de grandeur), car on prend pour le temps $\bar{t} = tU_0/(h_0/\varepsilon) : \partial_{\bar{t}} \bar{h} + \partial_{\bar{x}}(\bar{u}\bar{h}) = 0$. Dans la quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u = \varepsilon U_0^2 / (h_0) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} \right) = g(\varepsilon \frac{U_0^2}{gh_0} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} \right))$$

on fait apparaître $\frac{U_0^2}{gh_0}$ devant l'accélération, c'est F^2 le nombre de Froude au carré, les équations sans dimension sont donc :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial \bar{x}} = 0, \ \& \ \varepsilon F^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} \right) = \alpha \left(1 - \left(\frac{U_0}{C_C \sqrt{\alpha h_0}} \right)^2 \left(\frac{\bar{u}^2}{\bar{h}} \right) \right) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{h} + \bar{f}_b).$$

On a fait apparaître le rapport $\left(\frac{U_0}{C_C\sqrt{\alpha h_0}}\right)$, en effet à la pente α qui globalement emporte l'écoulement sur une hauteur h_0 on associe la vitesse de Chézy en observant $g\alpha \sim g\frac{u^2}{C_C^2 h}$, d'où $C_C\sqrt{\alpha h_0}$ (est la vitesse de Chézy), si on mesure avec cette vitesse ($U_0 = C_C\sqrt{\alpha h_0}$) :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \& \quad \varepsilon F^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} \right) = \alpha \left(1 - \frac{\bar{u}^2}{h} \right) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{h} + \bar{f}_b).$$

Comme α est très petit, et ε est aussi très petit, et que F peut parfois être très petit, de même $\frac{U_0}{C_C\sqrt{\alpha h_0}}$ est grand ou petit.... il faut voir au cas par cas.

8.2.2 Saint-Venant, "courte échelle", mais pas trop courte

Si on suppose α est très très très petit, et ε est aussi très petit mais moins ($\alpha \ll \varepsilon \ll 1$), et que la vitesse est telle alors on peut négliger la pente globale α et aussi le frottement : termes $\alpha \left(1 - \left(\frac{U_0}{C_C\sqrt{\alpha h_0}} \right)^2 \frac{\bar{u}^2}{h} \right)$. Ici la vitesse U_0 est mesurée par une autre échelle que Chézy qui n'a pas de sens dans ce cas. On a une courte échelle en temps et une courte échelle d'espace, imposée par exemple par la topographie $\bar{f} = \bar{f}_b$, les équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial \bar{x}} = 0 \\ F^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} \right) = - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{h} + \bar{f}). \end{cases} \quad (11)$$

avec F d'ordre un. Nous parlerons d'écoulement super critique (ou torrentiel) si $F > 1$ ou sub critique (ou fluvial) si $F < 1$. Il s'agit des équations de Saint-Venant sans frottement (cf plus loin). Il s'agit des équations *inviscid Shallow water*.

Remarquons qu'un choix judicieux de l'échelle de vitesse est alors $U_0 = \sqrt{gh_0}$ qui fait disparaître le Froude :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial \bar{x}} = 0 \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} \right) = - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{h} + \bar{f}). \end{cases} \quad (12)$$

8.2.3 Saint-Venant, équations adimensionnées, échelle intermédiaire

Attention dans cette section, on suppose encore que le fond est en fait $f = -\alpha x + f_b$ (une pente inclinée de $-\alpha$ et dessus un détail f_b (dune, ride, bosse, seuil, déversoir, barrage...). On se place dans le cas où on suppose α est très petit, et ε est aussi très petit et égal ($\alpha = \varepsilon \ll 1$), alors on ne peut plus négliger ni la pente ni le frottement. On adimensionne la vitesse u avec la vitesse de Chézy $U_0 = C_C\sqrt{h_0\alpha}$ qui crée l'écoulement, et $\bar{t} = tU_0/(h_0/\varepsilon)$ et $\bar{x} = x/(h_0/\varepsilon) = x/(h_0/\alpha)$. On obtient alors le problème le plus général suivant où le coefficient de la pente motrice α a disparu (car $\alpha = \varepsilon$ et qu'il est donc en facteur de tous les termes) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial \bar{x}} &= 0 \\ F^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} \right) &= 1 - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{h} + \bar{f}_b) - \frac{\bar{u}^2}{\bar{h}} \end{aligned}$$

Si même F est d'ordre 1, soit plus grand soit plus petit que 1 (nous parlerons d'écoulement super critique si $F > 1$ ou sub critique si $F < 1$), tout est d'ordre 1. On a alors le système le plus riche et le plus compliqué à résoudre.

8.2.4 Saint-Venant, équations adimensionnées, échelle intermédiaire, mais vitesse lente (fluvial)

Si maintenant, on considère un écoulement lent, $F \ll 1$, la vitesse s'ajuste toujours au frottement (on mesure la vitesse avec Chézy $U_0 = C_C \sqrt{\alpha h_0}$) et aux variations de surface libre et de fond mais l'inertie est faible : On obtient alors le problème de l'onde de crue diffusante (*diffusive wave*) :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial \bar{x}} = 0$$

$$0 = 1 - \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{h} + \bar{f}_b) - \frac{\bar{u}^2}{\bar{h}}$$

On va voir que l'on peut exprimer \bar{u} avec \bar{h} et \bar{f}_b dans l'équation de quantité de mouvement et tout mettre dans la première équation. Ce cas sera traité avec plus de détails au paragraphe §8.6.

8.2.5 Saint Venant, longue échelle, en fluvial

On continue à considérer un écoulement pour lequel la vitesse s'ajuste toujours au frottement (vitesse de Chézy $U_0 = C_C \sqrt{\alpha h_0}$) et qui est lent, $F \ll 1$, et maintenant on suppose que les variations des détails du fond sont négligeables $\varepsilon \ll \alpha \ll 1$. On est donc à une très longue échelle

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \text{et seulement} \quad 0 = \left(1 - \frac{\bar{u}^2}{\bar{h}}\right)$$

Pour des échelles longues par rapport, on voit que l'écoulement est toujours un équilibre entre le frottement au fond et la pente qui le provoque. Ce cas "longue échelle" sera appelé "Onde d'inondation" ou "onde de crue" "*flood wave*" ou onde cinématique (*kinematic wave*). Ce cas sera traité avec plus de détails au paragraphe §8.5.

8.2.6 Chézy : pas de variation

Il est utile de rappeler que si les variations sont particulièrement lentes : α est petit, et ε est très petit, et $F = O(1)$, il ne reste que la vitesse (on mesure la vitesse avec Chézy $U_0 = C_C \sqrt{\alpha h_0}$!) :

$$\frac{\bar{u}^2}{\bar{h}} = 1.$$

On a débranché tous les termes les uns après les autres pour la simplification ultime..

8.3 Saint-Venant, Linéarisation

Une dernière classe de simplification que nous allons examiner consiste à linéariser les équations. Par exemple, prenons les équations en échelle intermédiaire (encadrées plus haut $\alpha = \varepsilon$) : dans le cas d'une petite bosse de taille $f = O(\varepsilon)$, on pose $f = \varepsilon f_1$ (attention ε de la petite bosse n'est pas ε de l'onde longue).

• Si on part d'un état de repos, il n'y a pas de pente! $\alpha = 0$ on a

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \text{et} \quad F^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) = - \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{h} + \bar{f})$$

on linéarise en introduisant le développement $\bar{u} = 0 + \varepsilon \bar{u}_1$, $\bar{h} = 1 + \varepsilon \bar{h}_1$, on a : $\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}} + O(\varepsilon^2)$ et $(\bar{u}\bar{h}) = \varepsilon \bar{u}_1 + O(\varepsilon^2)$ et $f = \varepsilon f_1$ donc

$$\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{u}_1)}{\partial \bar{x}} = 0, \quad F^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} \right) = 0 - \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{h}_1 + \bar{f}_1) - \dots$$

qui peut se résoudre complètement suivant les données. On aura l'exemple de la marée qui est une application de cette simplification, ou les tsunamis, etc. On verra cela au paragraphe §8.8.

- Si on linéarise autour d'un état qui coule déjà $\alpha = \varepsilon \ll 1$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{h})}{\partial x} = 0, \quad \text{et} \quad F^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = 1 - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h} + \bar{f}_b) - \frac{\bar{u}^2}{\bar{h}}$$

dans le cas d'une petite bosse de taille $f_b = O(\varepsilon)$, on pose $f_b = \varepsilon f_1$. $\bar{u} = 1 + \varepsilon \bar{u}_1$, $\bar{h} = 1 + \varepsilon \bar{h}_1$, $(\bar{u}\bar{h}) = 1 + \varepsilon(\bar{u}_1 + \bar{h}_1) + O(\varepsilon^2)$ donc

$$\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{h}_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}_1)}{\partial x} = 0, \quad F^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_1 \right) = -\bar{u}_1 + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}_1 + \bar{f}_1)$$

Dans le cas stationnaire on utilisera cette simplification pour étudier la déformation de la surface libre au dessus d'un fond qui varie un peu. Par exemple dans le cas super critique (torrentiel) si $F > 1$ la surface libre présente une bosse au dessus de la bosse tandis qu'en sub critique (fluvial) si $F < 1$, la surface libre présente un creux au dessus de la bosse. Nous verrons ceci au §9.

8.4 conclusion sur les stratégies de simplification de Saint-Venant

Nous venons de voir que les équations de Saint-Venant admettaient plusieurs dégénérescences suivant les cas : bosse courte longue et petite perturbation, frottement faible ou fort... Dans la suite immédiate, nous allons examiner le cas "longue échelle", nous l'appellerons aussi "Onde d'inondation" ou "*flood wave*" ou même "onde cinématique". Puis, nous allons examiner le cas où l'échelle est intermédiaire mais F très petit nous l'appellerons aussi "Onde de crue diffusante". Le chapitre suivant sera consacré au cas de bosse courte en frottement faible, etc etc.

Ayons toujours en tête que la simplification asymptotique et la linéarisation font partie des techniques de base pour résoudre les équations de la mécanique des fluides.

Troisième partie

Le Fluide : Equations de Saint-Venant, quelques propriétés

La suite de ce cours consiste à reprendre toutes les simplifications proposées et les étudier plus précisément une à une pour voir comment elles se répondent et quel modèle simplifié sera utilisé pour quel cas simplifié.

8.5 Onde d'inondation ou "onde de crue" (simplification à longue échelle), onde cinématique

8.5.1 Equation en onde longue

Dans cette section, nous allons regarder le cas où le domaine est très grand, et où on est en "longue échelle". Il s'agit du cas où l'on peut négliger les termes non linéaires de convection, on est dans la description "onde longue", on a toujours l'équilibre entre le frottement et une pente très douce $-\alpha$. On suppose que le fond est en fait $f = -\alpha x$ sans perturbation supplémentaire de cette surface plane. Dans la littérature anglaise, on parle de *Flood wave* ou de *kinetic wave* Whitham [49] p 82, ou Fowler [18] p76 ou Chanson [7], voir aussi Daubert [12] On néglige donc à la fois les termes non linéaires de convection, les termes de pression, (on est dans la description onde longue), on a principalement l'équilibre entre le frottement et une pente très douce, et bien sûr, la conservation de la masse :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \& \quad 0 = \alpha - \frac{Q^2}{C_C^2 A^2 (A/P)},$$

où, si on préfère, il n'y a qu'une équation liant les dérivées partielles de A (ou de Q puisque l'un est directement fonction de l'autre) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_C \sqrt{\alpha \frac{A^3}{P}}) = 0.$$

Pour des rivières lors d'inondation P le périmètre varie peu par rapport à A , on a $Q \sim A^{3/2}$.

Pour une largeur constante $A \sim hP$ donc il reste :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_C \sqrt{\alpha h^3}) = 0.$$

On peut développer pour faire apparaître une équation d'advection (équation de transport) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{3}{2} C_C \sqrt{\alpha h}\right) \frac{\partial}{\partial x} h = 0, \text{ ou encore } \frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial}{\partial x} h = 0.$$

On peut aussi écrire l'équation en Q , car $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Pour résoudre cette équation, on remarque que

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial h} \Big|_{x=ct} \frac{\partial h}{\partial t},$$

l'équation de continuité $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ s'écrit alors en la multipliant par $\frac{\partial Q}{\partial h} \Big|_{x=ct}$ (on note par la suite $c(Q) = \frac{\partial Q}{\partial h} \Big|_{x=ct}$) :

$$\frac{\partial Q}{\partial h} \Big|_{x=ct} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial h} \Big|_{x=ct} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \text{ soit } \frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

• Si la célérité c est constante, la distribution au temps $t = 0$ de débit $Q_0(x)$, est transportée à la vitesse c et la solution est $Q = Q_0(x - ct)$. On vérifie que (en posant : $Q'_0 = dQ/d\xi$ et $\xi = x - ct$: $\frac{\partial Q}{\partial t} = -cQ'_0$ que $c \frac{\partial Q}{\partial x} = cQ'_0$, la somme est bien nulle, la solution convient. Le long des droites $x = ct + \xi$ la valeur de la solution est constante, c'est la valeur en $t = 0$ qui est ξ qui vaut ensuite $x - ct$ qui est conservée, c'est ce que l'on voit sur la figure 25.

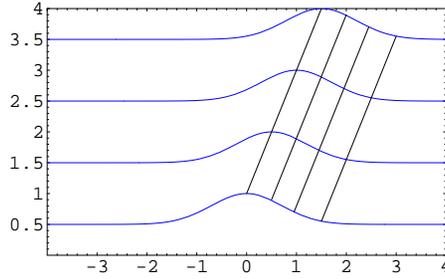


FIGURE 15 – Advection à la vitesse constante c d’une onde d’inondation.

- Examinons maintenant le cas où la célérité c n’est plus constante. Vérifions que le flux Q est constant le long des trajectoires caractéristiques $x(t)$ définies par

$$\frac{dx}{dt} = c(x(t), t), \text{ la solution } y \text{ est } Q(x(t), t)$$

cette vitesse c est une fonction de Q uniquement (car h est fonction de Q). Le long de ces caractéristiques, on a bien $Q(x(t), t)$ constant

$$\frac{d}{dt}Q(x(t), t) = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} c + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

or comme par définition $\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, on a bien $\frac{d}{dt}Q(x(t), t) = 0$.

- Précisément, le long des courbes $\frac{dx}{dt} = c(x(t), t)$, c’est la valeur en 0 qui est prise, donc $\frac{dx}{dt}$ est constant, c’est une droite. Le long des droites $x = ct + \xi$ du plan (x, t) la valeur de la solution est constante, c’est la valeur en $t = 0$, c’est à dire en ξ qui vaut ensuite $x - ct$ qui est conservée.

$$x = \xi + t c(\xi, 0) \text{ et } Q(x, t) = Q(\xi, 0)$$

Donc, si on a une distribution au temps $t = 0$ de débit $Q(x, 0) = Q_0(x)$ initial, chacun de ces points x est en fait un des points initiaux ξ , alors la solution est

$$Q(x, t) = Q_0(x - t c(Q_0(\xi)))$$

(voir par exemple "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics A Practical Introduction" 3rd edition E. Toro page 67 [47]), ou voir Chapitre 2 de Whitham p 19 [49]). On peut vérifier que c’est vrai en posant $Q'_0 = dQ_0/d\xi$ et $\xi(x, t) = x - ct$, c est une fonction de Q donc de ξ , par dérivation on a puisque $Q(x, t)$ est une fonction de ξ :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q'_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = Q'_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

avec : $\frac{\partial}{\partial t}\xi(x, t) = 0 - \frac{\partial(ct)}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}\xi(x, t) = 1 - \frac{\partial c}{\partial x}t$ ce qui donne aussi : $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial c}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}t - c$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - \frac{\partial c}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}t$, on regroupe pour écrire

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{-c}{1 + \frac{\partial c}{\partial \xi}t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{\partial c}{\partial \xi}t}$$

donc en substituant dans l’équation $\partial_t Q + c \partial_x Q$ on voit qu’elle est bien vérifiée :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + c(Q) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) Q'_0 = \frac{(-c + c)}{1 + \frac{\partial c}{\partial \xi}t} Q'_0 = 0,$$

on a donc bien $\partial_t Q + c \partial_x Q = 0$.

Voir la figure 66 dans la section sur le raidissement.

La référence [32] Miller 1983 "Basic Concepts of Kinematic-Wave Models" <https://pubs.usgs.gov/pp/1302/report.pdf> donne des applications pratiques.

La simulation numérique de cette onde de crue (*flood wave*) est présentée dans les codes
<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/floodwaveC.c> en C
<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/floodwave.c> en *Basilisk*,
<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/PYTHON/flood.py> en Python.

On remarque que si $Q \sim A^{3/2}$, alors $c = \frac{3}{2}Q/A$, donc c est supérieur à la vitesse moyenne de l'écoulement Q/A . Le système forme un choc : une crue va avoir tendance à former un mur d'eau.

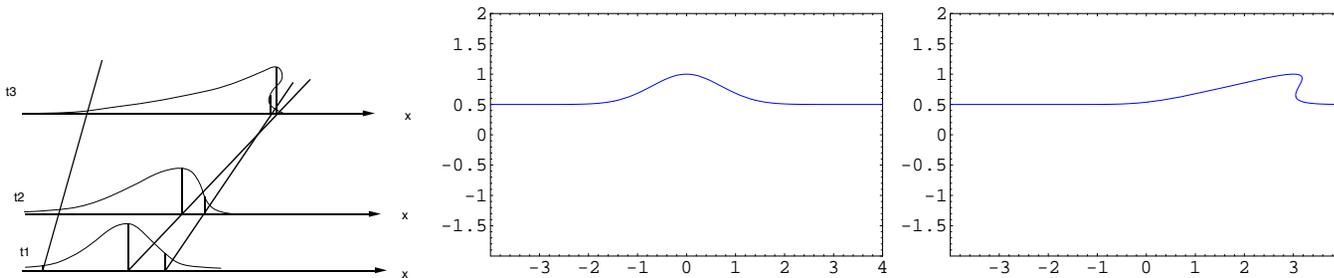


FIGURE 16 – **gauche** De bas en haut les hauteurs pour différents temps, construction de la solution par conservation le long des caractéristiques : on a tracé deux hauteurs (initialement la max et la demi hauteur à droite) qui vont se conserver le long de la courbe caractéristique de pente $1/c$, le sommet va plus vite ($dt/dx = 1/c$) que la demi hauteur. Raidissement du profil : le haut qui va plus vite dépasse le bas. La solution prédit un haut qui continue et surplombe la partie droite. **centre** initial et final du film de **droite** Raidissement et déferlement d'une onde d'inondation, [click to launch the movie, Adobe Reader required]

8.5.2 Choc formé (Relation de Rankine Hugoniot)

Un fois que le choc est formé, montrons que l'on peut trouver sa vitesse (voir Whitham [49] p 81).

Cette sous section est l'occasion d'une réflexion sur les dérivées Eq. 4, ou aussi Eq. 99, rappelons que nous avons établi l'équation de conservation de la masse en partant du bilan sur une tranche fixe x_1 et x_2 (de longueur Δx), en fait Δx , n'a pas besoin d'être petit,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} h dx = Q(x_1, t) - Q(x_2, t)$$

que l'on a écrit avec $Q(x_2, t) - Q(x_1, t) = [Q]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} Q dx$ donc la masse sous forme intégrale (on peut permuter l'intégration et la dérivation car le domaine est fixe :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} Q \right) dx = 0, \text{ vrai pour tous } x_1 \text{ et } x_2 \text{ donc : } \frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} Q = 0.$$

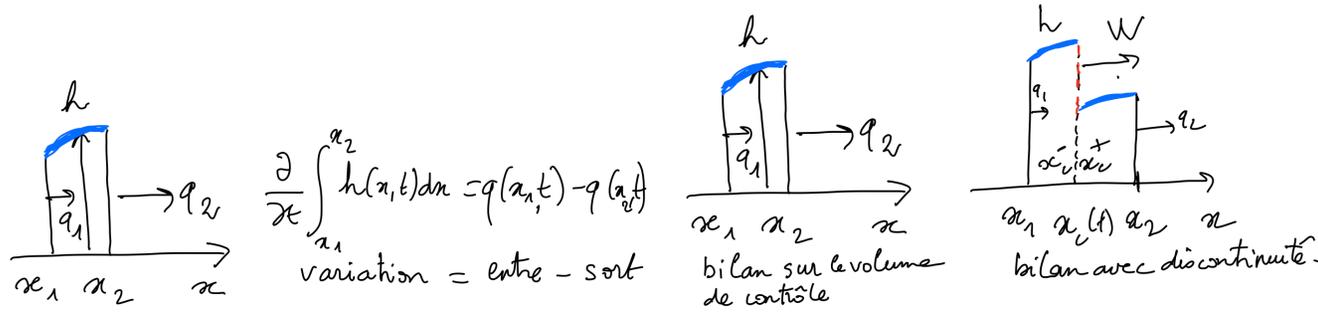


FIGURE 17 – volume de contrôle, cas normal et cas traversé par une discontinuité, q est le Q du texte.

Si la tranche n'est pas fixe, la relation de Leibniz (4) pour h dans une tranche $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrit :

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} h dx = \int_{x_1}^{x_2} \partial_t h(x,t) dx + h(x_2,t) \partial_t x_2 - h(x_1,t) \partial_t x_1.$$

La variation de la quantité intégrée, est égale à l'intégrale de la variation à laquelle on ajoute le flux qui sort $h(x_2,t) \partial_t x_2$ et le flux qui entre $-h(x_1,t) \partial_t x_1$.

On se suppose maintenant que x_1 et x_2 sont fixes, mais qu'une discontinuité traverse le domaine, à l'instant t est en $x_c(t)$ avec $x_1 < x_c < x_2$. On va supposer que la discontinuité se propage à la vitesse $W = \partial_t x_c$ (ne pas confondre avec la largeur W infinie du canal!). Donc, puisque x_1 et x_2 sont fixes, et que x_c bouge, il est associé à ce mouvement un flux sortant pour le domaine (x_1, x_c^-) et un flux rentrant pour le domaine (x_c^+, x_2) :

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} h dx = \partial_t \int_{x_1}^{x_c^-} h dx + \partial_t \int_{x_c^+}^{x_2} h dx$$

pour chacun des deux morceaux le terme de flux apparaît avec $W = \partial_t x_c$:

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_c^-} h dx = \int_{x_1}^{x_c^-} \partial_t h(x,t) dx + h(x_c^-, t) \partial_t x_c \text{ et } \partial_t \int_{x_c^+}^{x_2} h dx = \int_{x_c^+}^{x_2} \partial_t h(x,t) dx - h(x_c^+, t) \partial_t x_c.$$

En additionnant

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} h dx = \int_{x_1}^{x_2} \partial_t h(x,t) dx - W(h(x_c^+, t) - h(x_c^-, t)) \text{ que l'on note } \partial_t \int_{x_1}^{x_2} h dx = \int_{x_1}^{x_2} \partial_t h(x,t) dx - W[[h]], \text{ avec } [[h]] = h(x_c^+, t) - h(x_c^-, t)$$

Examinons maintenant le terme de flux, en faisant additionnant et soustrayant $Q(x_c^+) - Q(x_c^-) = [[Q]]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x_2) - Q(x_1) = Q(x_2) - Q(x_c^+) - Q(x_1) + Q(x_c^-) + Q(x_c^+) - Q(x_c^-) = [Q]_{x_1}^{x_c^-} + [Q]_{x_c^+}^{x_2} + [[Q]]$$

Appliquons à la conservation de la masse intégrée sur la section fixe :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} h dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0 \text{ devient } \int_{x_1}^{x_c^-} \partial_t h dx + [Q]_{x_1}^{x_c^-} + \int_{x_c^+}^{x_2} \partial_t h dx + [Q]_{x_c^+}^{x_2} - W[[h]] + [[Q]] = 0.$$

chacun des deux termes $\int_{x_1}^{x_1^-} \partial_t h dx + [Q]_{x_1}^{x_1^-}$ et $\int_{x_1}^{x_1^+} \partial_t h dx + [Q]_{x_1}^{x_1^+}$ est nul car il traduit la conservation de la masse dans une tranche fixe normale. On en déduit

$$[[-Wh + Q]] = 0 \quad \text{donc la vitesse de la discontinuité est } W = \frac{[[Q]]}{[[h]]}.$$

remarquons que la relation d'Hugoniot $[[-Wh + Q]] = 0$ s'écrit, puisque $Q = uh$, aussi $[[-W + u]h] = 0$.

Nous reverrons plus loin ce type de discontinuité dans le cas du ressaut (avec deux équations cette fois, une pour la masse, que l'on vient de voir à l'instant, et l'autre pour la quantité de mouvement).

Bien entendu, la discontinuité traduit le fait que le détail de la physique n'est pas clair sur une échelle bien plus petite que celle de développement de l'onde de crue. Dans le paragraphe suivant, nous réintroduisons justement $\frac{\partial h}{\partial x}$ qui n'est plus négligeable.

8.6 Onde de crue diffusante, onde longue (mais un peu moins)

8.6.1 Equations cas général, échelle intermédiaire

On continue à explorer les simplifications de Saint-Venant en ondes longues. On regarde ce qui se passe si on ne néglige plus les variations de hauteur, et $f = -\alpha x$ mais on néglige toujours les termes non linéaires, ce qui veut dire que le nombre de Froude est faible (Chanson [7], voir aussi Daubert [12] et Lighthill Whitham [31]). On introduit la largeur moyenne disons W et on a donc :

$$W \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

et pour la quantité de mouvement, le terme de gradient de pression $\rho g \frac{\partial h}{\partial x}$ n'est plus négligeable. Nous sommes donc à une échelle un peu plus courte, mais pas trop, par rapport à la précédente ;

$$0 = gA\alpha - gA \frac{\partial h}{\partial x} - Ag \frac{Q^2}{C_c^2 A^2 (A/P)}.$$

On obtient par élimination une équation de convection diffusion

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + U_0 \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

avec pour vitesse $U_0 = \frac{Q}{W(C_c^2 A^2 (A/P))^{1/2}} \frac{\partial}{\partial h} (AC_c^2 \sqrt{A/P})$ et pour coefficient de diffusion : $D = \frac{A\sqrt{C_c A/P}}{2WQ}$.

On va résoudre cette équation un peu plus loin après avoir vu l'équation de Burgers et l'équation de la chaleur.

Détaillons le calcul en 1D pur, ($h = A/P$) partant de

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \text{et } 0 = gh\alpha - gh \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{Q^2}{C_c^2 h^2}.$$

On pose $\frac{\partial h}{\partial x} = F(Q, h)$, donc $F(Q, h) = \alpha - \frac{Q^2}{C_c^2 h^3}$ d'où l'équation de continuité dérivée en x donne $-\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$. Puis comme

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

on trouve l'équation de l'onde de crue diffusante

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{3Q}{2h} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{h^3 C_c^2}{2Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

remarques

- L'équation est de la forme d'une équation de convection - diffusion avec des coefficients compliqués :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q, h) \frac{\partial Q}{\partial x} = D(Q, h) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

Le choc en onde longue, se fait sur une distance courte qui est donc réintroduite ici par l'intermédiaire du gradient de pression. La diffusion introduite permet de lisser le choc et lui donner une épaisseur. Bien entendu le détail du choc n'est encore pas bien décrit...

- On peut linéariser et on obtient avec $Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \dots$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{3U_0}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{U_0 h_0}{\alpha} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2}$$

qui nous donne clairement une équation de convection diffusion. L'épaisseur du choc λ_c est donc telle que

$$\frac{3U_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} = O\left(\frac{U_0}{\lambda_c}\right) \sim \frac{U_0 h_0}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = O\left(\frac{U_0 h_0}{\alpha \lambda_c^2}\right)$$

donc $\frac{h_0}{\lambda_c} = O(\alpha)$. L'épaisseur est $\lambda_c = \frac{h_0}{\alpha}$. Si on considère une échelle plus grande, alors le terme de dérivée seconde est négligeable....

8.6.2 Equations cas laminaire sur fond plat incliné

Le cas laminaire 1D peut se calculer aussi (avec $K = 3\nu/g$) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \text{ et } 0 = \alpha - \frac{\partial h}{\partial x} - K \frac{Q}{h^3}$$

on pose $\frac{\partial h}{\partial x} = F(Q)$ avec $F(Q) = \alpha - K \frac{Q}{h^3}$, donc $\frac{\partial F}{\partial Q} = -K \frac{1}{h^3} = (F - \alpha)/Q$ avec $\frac{\partial F}{\partial h} = -3(F - \alpha)/h$, on dérive

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \text{ on substitue } F : \frac{\partial F(Q)}{\partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0, \text{ puis comme } \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

on trouve une équation de convection diffusion

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{3Q}{h} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q}{F - \alpha} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}.$$

L'équation est encore de la forme convection - diffusion :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q, h) \frac{\partial Q}{\partial x} = D(Q, h) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

Remarquons qu'avec h , c'est plus direct :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial x} (h^3 (\frac{\partial h}{\partial x} - \alpha)) = 0.$$

Nous résolvons cette équation dans les cas $\alpha \gg 1$ et $\alpha = 0$ dans respectivement :

<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscolsqrt.c>

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous_collapse_noSV.c

Ce sont les résultats de Huppert [25] et [26] que nous allons examiner ici

8.6.3 Tas de Huppert sur pente forte : onde de crue laminaire

Il s'agit d'étudier l'écoulement de film visqueux sur une pente forte Cet exemple est extrait de "Flow and instability of a viscous current along a slope" Nature volume 30 1982 p427

<http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper49.pdf>

Les équations de Saint-Venant pour un écoulement visqueux laminaire

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0, \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((5/4) \frac{Q^2}{h} + \frac{g}{2} (h^2) \right) = -gZ'h - 3\nu \frac{Q}{h^2}$$

pour les pentes fortes telles que $|Z'| \gg \partial_x h$ alors $Q = -gZ'h^3/(3\nu)$ (avec $-Z' = \alpha$ pente constante donnée) et la masse devient

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gZ'}{3\nu} \frac{\partial}{\partial x} h^3 = 0 \text{ de la forme } \frac{\partial h}{\partial t} + kh^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

On peut résoudre par changement d'échelle, l'invariance par dilatation donne $H/T = H^3/X$, la masse conservée donne $HX = 1$, ce qui permet de trouver $H = T^{-1/3}$ et $X = T^{1/3}$ donc une solution de la forme $t^{-1/3} \mathcal{H}(x/t^{1/3})$ soit

$$-\eta \mathcal{H}'(\eta) - \mathcal{H}(\eta) + 3k\mathcal{H}(\eta)^2 \mathcal{H}'(\eta) = 0 \text{ avec } \mathcal{H}(0) = \mathcal{H}_0 \text{ devient } (-\eta \mathcal{H}(\eta) + k\mathcal{H}(\eta)^3) = k\mathcal{H}_0^3. \text{ On a la forme implicite : } \eta = k(\mathcal{H}(\eta))^2 - \frac{\mathcal{H}_0^3}{\mathcal{H}(\eta)}$$

On part d'une masse localisée entre x_0 et x_1 , on va donc prendre $H_0 = 0$ donc $\eta = k\mathcal{H}(\eta)^2$, simplement, on va avoir

$$\mathcal{H}(\eta) = \sqrt{(\eta)/k},$$

la solution est simplement pour $x < x_f$

$$h = t^{-1/3} \sqrt{(xt^{-1/3})/k} = \sqrt{\frac{x}{kt}}$$

On se donne une masse initiale $A = \int_0^{x_1} h(x, 0) dx$ qui se déplace entre $x_f t$, position du front et 0 le front arrière qui ne bouge pas, la masse est donc ultérieurement

$$\int_0^{x_f} \sqrt{\frac{x}{kt}} dx = (2/3) \sqrt{x_f^3/(kt)},$$

cette intégrale est A par conservation de la masse. On en déduit la position du front $x_f = (\frac{9A^2 kt}{4})^{1/3}$

Remarque : on peut aussi le résoudre avec les caractéristiques.

La solution est assez subtile, en temps que caractéristique, la solution est constante le long des caractéristiques

$$\frac{dx}{dt} = c(x, t) \text{ avec } c = kh^2$$

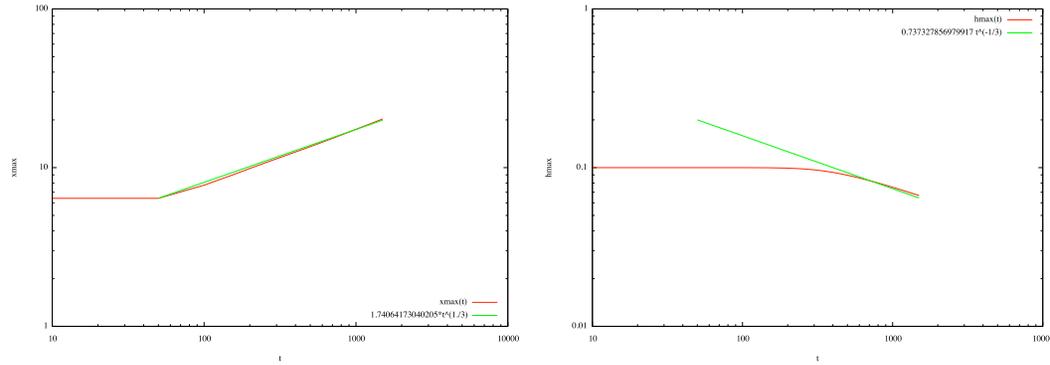
pour une distribution donnée, $h(x, t=0) = h_0(x)$ alors le long des droites $x = ct + \xi$

Le long des droites $x = ct + \xi$ la valeur de la solution est constante, c'est la valeur en ξ qui vaut ensuite $x - ct$ qui est conservée.

$$x = \xi + tc(\xi, 0) \text{ et } h(x, t) = h_0(\xi)$$

Donc, si on a une distribution au temps $t = 0$ de hauteur $h_0(x)$ initiale, chacun de ces points x est en fait un des points initiaux ξ , alors la solution est $h = h_0(x - tc(h_0(\xi)))$ avec $c = kh^2$ donc

$$x = \xi + tkh^2(\xi, 0)$$

FIGURE 18 – x_{max} as function of time, h_{max} fonction de time

donc $h = \sqrt{(x - \xi)/(kt)}$ et pour de grands x , on a

$$h = \sqrt{\frac{x}{(kt)}}$$

comme présenté.

8.6.4 Tas Visqueux s'effondrant sur une surface plane (tas de Huppert), onde de crue diffusante sur une plaque plane

Cet exemple est extrait de Huppert "The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface" J. Fluid Mech. (1982), vol. 121, p p . 43-58

<http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper47.pdf>

Il s'agit d'étudier avec les équations de Saint-Venant la chute d'un tas initialement au repos et rectangulaire sous l'action de la gravité et avec un frottement visqueux de Poiseuille

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((5/4) \frac{Q^2}{h} + \frac{g}{2} (h^2) \right) &= -3\nu \frac{Q}{h^2} \end{aligned}$$

pour les temps longs, on a équilibre entre la pression hydrostatique et la friction $3\nu Q/h^2 = -gh\partial_x h$. On substitue Q dans l'équation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{g}{3\nu} \frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ qui est de la forme } \frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ ou aussi } \frac{\partial h}{\partial t} - (k/4) \frac{\partial^2 h^4}{\partial x^2} = 0$$

Par dilatations des échelles l'invariance par changement d'échelle équivaut à $H/T = H^4/X^2$ pour cette équation, et comme la masse conservée $HX = 1$, cela donne $H = T^{-1/5}$ et $X = T^{1/5}$ donc une solution de la forme autosemblable

$$h = t^{-1/5} \mathcal{H}(xt^{-1/5})$$

on substitue et on a

$$-5k\mathcal{H}(\eta)^3 \mathcal{H}''(\eta) - 15k\mathcal{H}(\eta)^2 \mathcal{H}'(\eta)^2 - \eta \mathcal{H}'(\eta) - \mathcal{H}(\eta) = 0$$

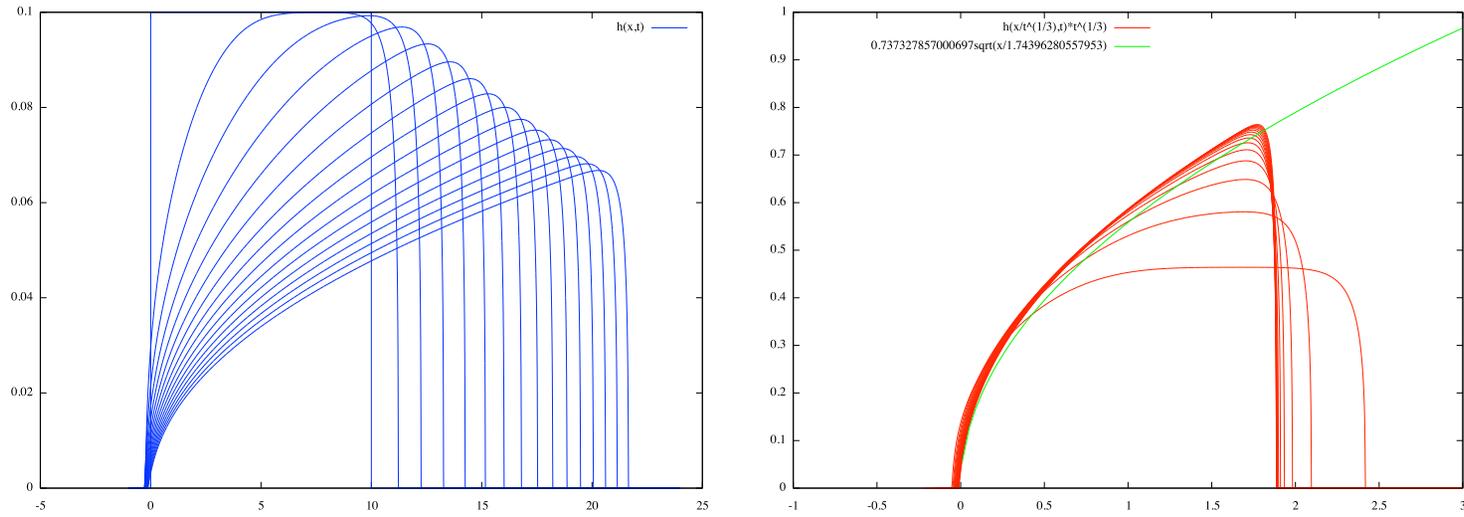


FIGURE 19 – Gauche Plot at $t=100,200,300\dots1500$ of $h(x,t)$ with *Basilisk* Droite Plot at $t=100,200,300\dots1500$ of $t^{1/3}h(x/t^{1/3}, t)$ with *Basilisk*

intégrale première

$$(-5k\mathcal{H}(\eta)^3\mathcal{H}'(\eta))' - (\eta\mathcal{H}(\eta))' = 0, \quad \text{par symétrie } \mathcal{H}'(0) = 0$$

d'où

$$-(5k)(\mathcal{H}(\eta)^2\mathcal{H}'(\eta)) = \eta \text{ or } (5k/3)\mathcal{H}(\eta)^3 = b^2/2 - \eta^2/2$$

le tas arrête quand $\mathcal{H} = 0$ au point $\eta = b$

$$(5k/3)\mathcal{H}(\eta)^3 = b^2/2(1 - (\eta/b)^2)$$

soit

$$\mathcal{H}(\eta) = (3b^2/(10k)(1 - (\eta/b)^2))^{1/3}$$

La surface totale

$$A = \int_{-b}^b \mathcal{H}(\eta) d\eta$$

On a

$$\int_{-b}^b (1 - (\eta/b)^2)^{1/3} d\eta = b \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{3})}{5\Gamma(\frac{5}{6})}$$

d'où la position du front en $t^{1/5}$ et la hauteur qui décroît en $t^{-1/5}$.

La solution finale est de la forme selfsimilar

$$h(x,t) = t^{-1/5}(9/10(C - (xt^{-1/5})/2))^{1/3} \text{ avec } C = \frac{3 \cdot 10^{2/5} (\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{11}{6}))^{6/5}}{\pi^{9/5}}$$

Voir sur le web : http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous_collapse.c

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous_collapse_noSV.c

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous_collapse_ML.c

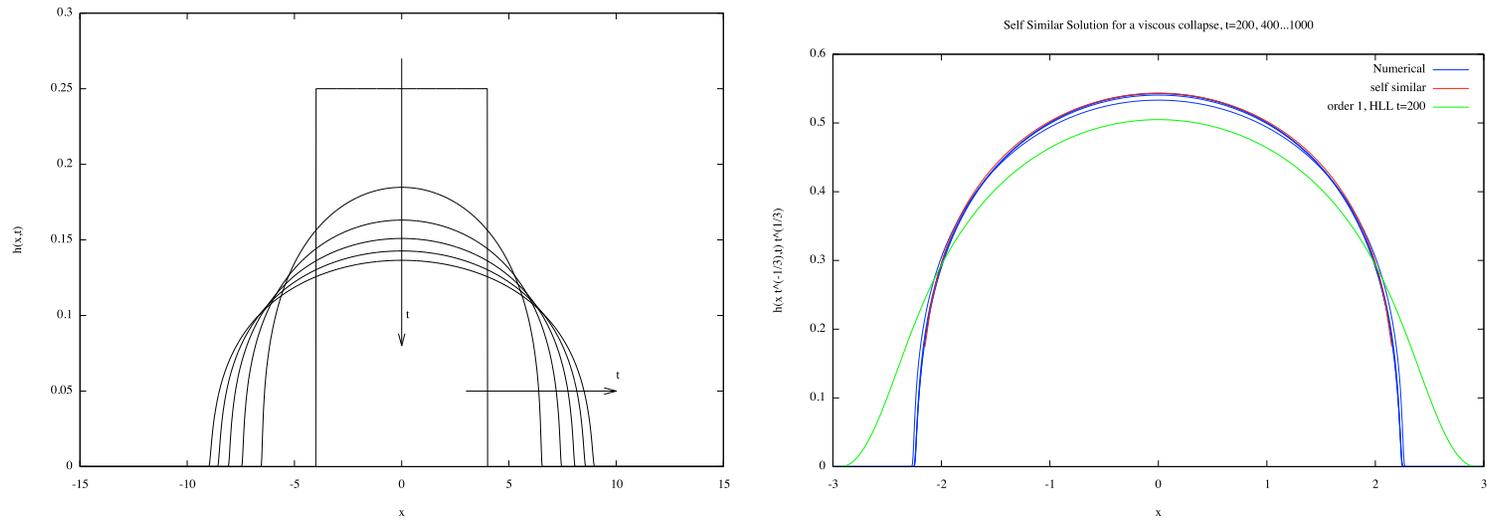


FIGURE 20 – Gauche Plot at $t=100,200,300\dots1000$ of $h(x,t)$ with *Basilisk* Droite Plot at $t=100,200,300\dots1000$ of $t^{1/5}h(x/t^{1/5},t)$ with *Basilisk* with a FV code order 1 HLL and the analytical solution $(3b^2/(10k)(1 - (\eta/b)^2))^{1/3}$.

8.6.5 Équation de Burgers

Nous venons de voir que l'équation de l'onde diffusante (de la forme convection - diffusion) :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q, h) \frac{\partial Q}{\partial x} = D(Q, h) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

on a vu que la convection est non linéaire et qu'il y a de la diffusion. Cette forme se retrouvait en turbulent ou en laminaire.

L'équation suivante

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

est appelée Équation de Burgers, elle ressemble un peu (dépendance différente de c et terme de diffusion D appelé viscosité ν constante), c'est une équation de convection - diffusion.

On va résoudre cette équation $\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ pour laquelle on cherche la solution avec une élévation d'eau entre l'amont et l'aval. On se donne en $h(-\infty) = h_1$ et $h(+\infty) = h_2$, On va voir que l'on forme une onde de plus en plus raide. Pour ce faire, on pose $\zeta = (x - ct)/\nu$ pour faire disparaître la viscosité et se placer dans le repère qui bouge. On cherche une solution $F(\zeta)$ sous la forme d'une onde qui avance à la vitesse c :

$$-cF' + FF' + F'' = 0, \text{ soit } -cF + F^2/2 + F' = cst, \text{ soit } -cF + F^2/2 + F' = -ch_1 + h_1^2/2 = -ch_2 + h_2^2/2, \text{ donc } c = (h_1 + h_2)/2$$

car on a $F(-\infty) = h_1$ et $F(+\infty) = h_2$, d'où une solution qui passe de h_1 à h_2 , à la vitesse $c = (h_1 + h_2)/2$ reste

$$2F' - cF + F^2/2 = -c(h_1 + h_2) + h_1^2/2 + h_2^2/2 = h_1 h_2/2$$

on reconnaît une équation du genre $df(\eta)/d\eta = (1 - f(\eta)^2)$ qui s'écrit par séparation des variables $d\eta = \frac{df}{1-f^2}$ et se résout par décomposition en éléments simple pour donner $2\eta = \ln(\frac{1+f}{1-f})$ et ainsi $f = \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1} = \tanh(\eta)$, dans notre cas, c'est de la forme :

$$4F' = (F - h_1)(F - h_2) \text{ en éléments simples } d\zeta/4 = \frac{dF/(h_2 - h_1)}{(F - h_1)} + \frac{-dF/(h_2 - h_1)}{(F - h_2)}$$

ce qui donne la solution se déplaçant à la vitesse $c = (h_1 + h_2)/2$, passant de h_1 à h_2 sur une épaisseur $\nu/(h_1 - h_2)$:

$$c = \frac{h_2 + h_1}{2}, \quad \eta = \frac{h_2 + h_1}{2} + \frac{h_2 - h_1}{2} \tanh\left(\frac{(h_1 - h_2)(x - ct)}{4\nu}\right)$$

On voit que le terme visqueux introduit une échelle d'épaisseur pour la variation brusque. Si on néglige ce terme (ou si on fait tendre ν vers 0, il y a une discontinuité (un "choc"),

On voit que la vitesse de la discontinuité est comme attendu $\frac{[[Q]]}{[[h]]} = \frac{h_2^2/2 - h_1^2/2}{h_2 - h_1} = \frac{h_2 + h_1}{2}$

8.6.6 Rappel solution semblable de l'équation de la chaleur

La résolution dans le cas d'une relâche d'eau donnée par l'équation de l'onde diffusante (de la forme convection - diffusion) :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q, h) \frac{\partial Q}{\partial x} = D(Q, h) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

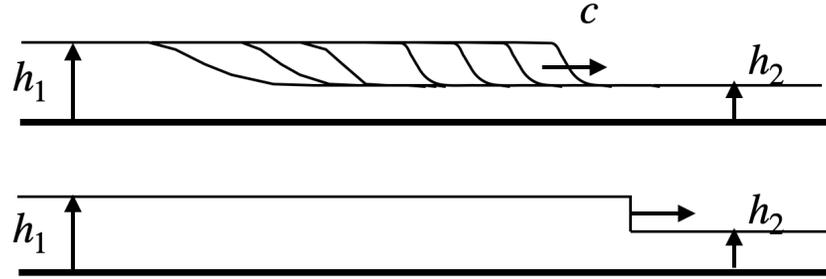


FIGURE 21 – Formation d’une discontinuité dans l’équation de Burgers haut, visqueuse $\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, la solution se déplaçant à la vitesse $c = (h_1 + h_2)/2$, passant de h_1 à h_2 sur une épaisseur $\nu/(h_1 - h_2)$, bas inviscide $\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ le choc se déplace à la vitesse $c = \frac{[[Q]]}{[[h]]} = (h_1 + h_2)/2$, passant de h_1 à h_2 brusquement

nous rappelle, si on suppose la vitesse c constante et le coefficient de diffusion constant l’équation bien connue de l’équation de la chaleur si on se place dans le repère qui bouge à la vitesse constante

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ avec conservation de l'énergie totale } \int \bar{T} d\bar{x} = 1$$

on cherche à rendre ce problème invariant par changement d’échelle

$$x = x^* x', \quad t = t^* t' \quad T = T^* T' \text{ rend invariant } \frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} \quad \int \bar{T}' d\bar{x}' = 1$$

donc pour assurer l’invariance $T^*/t^* = T^*/x^{*2}$ et $T^* x^* = 1$ donc $\forall x^*$, le changement $x = x^* x'$, $t = x^{*2} t'$ $T = x^{*-1} T'$ convient. On écrit la solution sous la forme implicite

$$F(T, x, t) = 0 \text{ donc par invariance } F(x^* x', x^{*2} t', x^{*-1} T') = 0$$

C’est une fonction de trois variables, on peut les multiplier entre elles et conservant toujours trois variables, on cherche à le faire pour éliminer les x^* , on prend la racine de la deuxième variable et avec elle on divise la première et on multiplie la troisième, de fait on fait disparaître x^* dans deux des emplacements :

$$F_1(x^* x' / \sqrt{x^{*2} t'}, x^{*2} t', x^{*-1} T' \sqrt{x^{*2} t'}) = 0, \text{ donc } \forall x^* \quad F_1(x' / \sqrt{t'}, x^{*2} t', T' \sqrt{t'}) = 0.$$

c’est vrai pour tous les x^* donc on n’a pas la deuxième variable, et on définit $\eta = x' / \sqrt{t'}$ la solution est $T' \sqrt{t'} = \theta(\eta)$ et aussi $\eta = x / \sqrt{t}$ et $T \sqrt{t} = \theta(\eta)$. Effectuons les dérivations en remarquant que $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{-\eta}{2t}$ et que $\frac{\partial t^{-1/2}}{\partial t} = \frac{-1}{2t\sqrt{t}}$ donc

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{-1}{2t\sqrt{t}} \theta(\eta) - \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\eta}{t} \text{ et } \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{t\sqrt{t}} \frac{\partial^2 \theta(\eta)}{\partial \eta^2}$$

ce qui nous donne après simplification une équation différentielle ordinaire et non plus une équation aux dérivées partielles :

$$-\theta/2 - \eta\theta'/2 = \theta''$$

première intégration $-(\eta\theta)'/2 = (\theta')'$, comme la température nulle à l’infini et le flux est nul à l’infini on n’a bien pas de constante d’intégration $-(\eta\theta)/2 = (\theta')$, donc $\theta = e^{-\eta^2/4} / (2\sqrt{\pi})$ as $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$,

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\bar{x}^2/(4t)}$$

le profil est toujours Gaussien. La largeur de la gaussienne augmente avec le temps. La hauteur diminue. Au temps $t = 0$, c’est en fait un Dirac (hauteur infinie, largeur nulle).

voir http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/BASIC/heat_imp.c pour un exemple de résolution de l’équation de la chaleur.

8.6.7 Application de la solution de l'équation de la chaleur à l'onde de crue diffusante

Une brusque relâche d'eau en un point précis $x = 0$ donnera donc pour l'équation d'onde de crue diffusante comme déjà dit. Si on en considère que la version linéarisée (cas d'une petite perturbation); alors l'équation se linéarise ($Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \dots$) en une équation d'advection diffusion

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{3U_0}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} \quad \text{elle une solution de la forme } Q_1 = \frac{\delta Q}{A\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - 3U_0 t/2)^2}{4Dt}\right).$$

Voir Chanson [7] p 341 pour d'autres exemples de solution du *diffusive wave problem* et notamment la fameuse équation de Cunge-Muskingum.

FIGURE 22 – Déplacement et diffusion d'une onde de diffusion [click to launch the movie, Adobe Reader required]

8.6.8 Onde d'inondation dans les vraies rivières

Le site vigicrue <https://www.vigicrues.gouv.fr> permet d'accéder en direct au différentes stations de mesures le long des principaux cours d'eau de France. Par exemple, le site vigicrue <https://www.vigicrues.gouv.fr/station/J721401001> permet d'accéder aux 30 derniers jours de données à Pacé (lieu dit Tixuë) de la rivière Flûme (affluent de la Vilaine). La figure suivante nous montre des exemples de crues dans cette rivière en février 2025 (crues assez importantes autour de Rennes).

Activité : estimer la pente du terrain à Pacé et en déduire l'ordre de grandeur du coefficient de Chézy de la Flûme.

8.6.9 Note : équation de Muskingum-Cunge

Il s'agit d'une version 0D de ces équations, le volume total $V = \int h dx$ (ou "storage") sur un tronçon, une portion de canal, s'obtient en intégrant sur la longueur

$$\frac{\partial V}{\partial t} + Q_{out} - Q_{in} = 0$$

puis, on dit de manière empirique que le volume instantané est fonction des débits : $V = k\epsilon Q_{in} - k(1 - \epsilon)Q_{out}$ avec k coefficient de stockage et ϵ coefficient de pondération obtenus par essai erreur et calibration. C'est la méthode de Muskingum. Cunge a réinterprété l'équation discrétisée de Muskingum en écrivant l'équation cinématique discrétisée. L'article original est sur [34], il est en anglais et en français



FIGURE 23 – exemple de trois crues successives de la rivière Flûme à Pacé, haut débit, bas hauteur- données sur 14 jours

8.7 Linéarisation des équations :

les trois prochaines subsections sont à uniformiser...

8.8 Saint-Venant linéarisé : équation d'onde de d'Alembert

Les cas précédents étaient tels que l'inertie était négligeable, et le frottement important. Passons maintenant à des exemples où au contraire l'inertie est importante, et le frottement négligeable. Une inertie importante introduit des termes non linéaires, ce qui complique la résolution, nous allons donc commencer au plus simple en linéarisant les équations.

Nous allons linéariser les équations de Saint-Venant pour obtenir la propagation des ondes.

Dans ce cas le frottement est négligeable, l'inertie redevient importante, pour simplifier on prend un fond plat. La perturbation se déplace sur de très grandes distances, l'équation de Saint-Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{h} = gh\alpha - gh \frac{\partial \eta}{\partial x} - g \frac{Q^2}{h^2 C_C^2}$$

α pente faible du fond, $\eta = f + h$. Avec $f = 0$ et sans frottement, en supposant η petit $\eta = \varepsilon \eta_1$ alors on pose $u = \varepsilon u_1$ (et $Q = \varepsilon u_1 h_0$), les équations deviennent

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad h_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -gh_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial x}$$

devient l'équation des ondes (le d'Alembertien) :

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0$$

avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$. On comprend enfin ce que représente le nombre de Froude, c'est le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse des ondes.

8.9 Tsunamis

8.9.1 Linéarisation de Saint-Venant

Examinons le cas simple d'un fluide au repos sur fond plat avec une hauteur d'eau constante $u = 0$, $h = h_0$. Si on travaille sur l'équation de Saint-Venant sur fond plat sans frottements, on définit les perturbations à l'état de base $Q = 0$ et $h = h_0$ par q et η tels que $Q = 0 + q$ et $h = h_0 + \eta$ alors en posant $c_0^2 = gh_0$ et Saint-Venant Eq. 34 linéarisé :

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + c_0^2 \partial_x \eta = 0 \end{cases} , \quad (13)$$

On veut résoudre ces équations connaissant des conditions initiales, par exemple, on connaît $\eta(x, 0)$ et $q(x, 0)$. On peut aussi remarquer que si on se donne $q(x, 0)$, on se donne aussi $\partial_x q(x, 0)$ sa dérivée, mais c'est aussi se donner $\partial_t \eta = -\partial_x q$. Donc, on peut aussi dire que l'on veut résoudre ces équations connaissant $\eta(x, 0)$ et $\partial_t \eta(x, 0)$. C'est le "problème de Cauchy" : connaissant l'EDP et ses conditions initiales, on veut résoudre pour tout temps. On note $\eta_0(x) = \eta(x, 0)$, $q_0(x) = q(x, 0)$ et $\eta_1(x) = \partial_t \eta(x, 0)$

8.9.2 solution du "problème de Cauchy"

Les équations (13) se mettent sous la forme d'une équation des ondes : $\partial_t^2 \eta - c_0^2 \partial_x^2 \eta = 0$ (ou $\square \eta = 0$). On peut aussi écrire sous forme "caractéristique" cette équation (en manipulant (13)) avec une advection vers la droite et une autre vers la gauche

$$\begin{cases} \partial_t (c_0 \eta + q) + c_0 \partial_x (c_0 \eta + q) = 0 \\ \partial_t (c_0 \eta - q) - c_0 \partial_x (c_0 \eta - q) = 0 \end{cases} , \quad (14)$$

qui donne (les $x \pm c_0 t$ viennent bien de la solution de l'équation d'advection)

$$c_0 \eta(x, t) + q(x, t) = f(x - c_0 t) \text{ et } c_0 \eta(x, t) - q(x, t) = g(x + c_0 t)$$

La solution a la forme bien connue de somme de $f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$ (le facteur $1/2c_0$ vient de la démarche et simplifie les calculs qui suivent)

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2c_0} (f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t))$$

On a donc respectivement $\eta(x, t)$ et aussi par dérivation directe en temps $\partial_t \eta(x, t)$:

$$2c_0 \eta(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \text{ resp. } 2c_0 \partial_t \eta(x, t) = -c_0 f'(x - c_0 t) + c_0 g'(x + c_0 t)$$

donc si on se donne à $t = 0$ la distribution $\eta(x, 0) = \eta_0(x)$ et sa dérivée $\partial_t \eta(x, 0) = \eta_1(x)$, alors

$$2c_0 \eta_0(x) = f(x) + g(x) \text{ et } 2c_0 \eta_1(x) = -c_0 f'(x) + c_0 g'(x)$$

on en déduit que $f(x) - g(x) = -2 \int_0^x \eta_1(\xi) d\xi + K$, constante dont on peut se passer. On en déduit donc les expressions des fonctions f et g en fonction de η_0 et η_1 :

$$f(x) = c_0 \eta_0(x) - \int_0^x \eta_1(\xi) d\xi \text{ et } g(x) = c_0 \eta_0(x) + \int_0^x \eta_1(\xi) d\xi$$

et en déplaçant de $c_0 t$ en moins et en plus (en remarquant que $-\int_0^{x-c_0 t} \eta_1(\xi) d\xi = +\int_{x-c_0 t}^0 \eta_1(\xi) d\xi$) :

$$f(x - c_0 t) = c_0 \eta_0(x - c_0 t) + \int_{x-c_0 t}^0 \eta_1(\xi) d\xi \text{ et } g(x + c_0 t) = c_0 \eta_0(x + c_0 t) + \int_0^{x+c_0 t} \eta_1(\xi) d\xi$$

la somme nous donne la relation (qui est la solution du "problème de Cauchy")

$$\eta(x, t) = \frac{\eta_0(x - c_0t) + \eta_0(x + c_0t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} \eta_1(\xi) d\xi.$$

Ce que nous venons d'écrire est bien la solution pour tout temps de l'équation aux dérivées partielles de départ ($\square\eta = 0$) avec la donnée de la solution $\eta(x, t = 0) = \eta_0(x)$ et de sa dérivée en temps $\partial_t\eta(x, 0) = \eta_1(x)$ au temps initial :

$$\eta(x, t) = \frac{\eta_0(x - c_0t) + \eta_0(x + c_0t)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{x-c_0t}^{x+c_0t} \partial_t\eta(\xi, 0) d\xi.$$

Ce premier résultat important étant établi, repassons aux deux variables η et q , comme par définition $\partial_t\eta = -\partial_xq$ donc $\eta_1(x)$ est disons un $-\partial_xq_0(x)$ donné initialement :

$$\eta(x, t) = \frac{\eta_0(x - c_0t) + \eta_0(x + c_0t)}{2} - \frac{1}{2c_0} [q_0(x + c_0t) - q_0(x - c_0t)].$$

Cette expression nous donne la valeur de $\eta(x, t)$ connaissant les champs initiaux η_0 et q_0 .

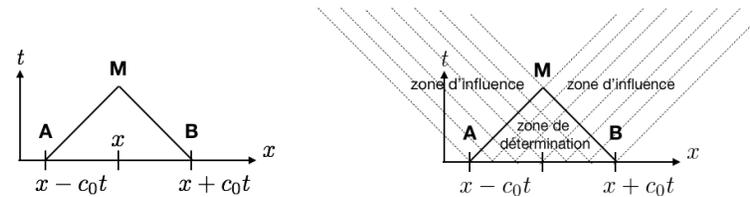


FIGURE 24 – A gauche, la solution au point M en x et $t > 0$ est déterminée par une partie des données, en l'occurrence η_0 en A et en B et $\eta_1 = \partial_t\eta_0$ sur le segment AB . A gauche on voit les zones influencées et déterminées par les données η_0 et η_1 dans le temps futur $t > 0$

8.9.3 Tsunamis

Une source (tremblement de terre, faille, explosion nucléaire) crée au temps $t = 0$ une perturbation de l'eau qui va se propager ensuite. Le premier problème est de déterminer la source : c'est un problème de géophysique, c'est aussi un problème de mécanique car ce sont les équations de la mécanique qui décrivent le mouvement et la déformation des plaques (sur lesquelles sont les continents) et du magma terrestre. Ce domaine est passionnant mais n'est pas l'objet ici. En fait le fond bouge très vite : un faille glisse, ou le fond remonte brusquement... Cela déplace la masse d'eau initialement, cette première étape cruciale est en fait assez compliquée puisqu'elle mêle la description du fond et des premières épaisseurs d'eau qui commencent à se déformer alors que le fond n'a pas fini de se déformer...

Une fois la condition initiale générée, le reste n'est que propagation sur le fond donné. Bien entendu, le bon modèle est Saint-Venant puisqu'il contient (presque) tous les termes. La théorie la plus simple ensuite est de considérer l'onde linéarisée simple, la perturbation se déplace sur de très grandes distances en eau peu profonde (relativement à l'étendue du Tsunami), l'équation de Saint-Venant précédente devient la fameuse équation d'onde (ou équation de d'Alembert 1747) :

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \text{ avec } c_0^2 = gh_0. \text{ Que l'on note parfois à l'aide de l'opérateur appelé d'Alembertien : } \square\eta = 0, \text{ avec } \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0$$

avec $c = \sqrt{gh_0}$.

La solution de cette équation peut s'obtenir de diverses manières, repartons des équations linéarisées autour d'une grande profondeur h_0 , d'un fond plat et du repos (vitesse nulle) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(g\eta)}{\partial t} + c_0 \frac{\partial(c_0 u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(c_0 u)}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial(g\eta)}{\partial x}$$

avec $c_0^2 = gh_0$ on peut écrire en soustrayant et additionnant

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)(c_0 u + g\eta) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)(c_0 u - g\eta) = 0$$

ce qui permet de dire que $c_0 u + g\eta = F(x - c_0 t)$ et $c_0 u - g\eta = -G(x + c_0 t)$ ou, la solution s'écrit sous la forme de deux fonctions $F(x - c_0 t)$ et $G(x + c_0 t)$:

$$u = \frac{1}{c_0}(F(x - c_0 t) - G(x + c_0 t)) \quad \eta = \frac{1}{g}(F(x - c_0 t) + G(x + c_0 t)).$$

Dans la suite nous poserons $F = 2c_0^2/h_0 f$ et $G = 2c_0^2/h_0 g$.

Revenons à l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad c_0^2 = gh_0.$$

En posant $\xi = x - c_0 t$, et $\zeta = x + c_0 t$, on voit que comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = c_0 \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \end{aligned}$$

l'équation devient alors par ce changement de variables $4c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta \partial \xi} = 0$.

Remarque, on peut ainsi écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Les solutions de $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta \partial \xi} = 0$ sont par intégration en ξ : $\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = cst$, cette constante

est constante par rapport à ξ mais elle dépend de ζ , appelons la $g'(\zeta)$, puis $\eta = g(\zeta) + cst$, mais cette constante est une fonction de ξ , appelons la $f(\xi)$. Donc les solutions sont de la forme : $f(\xi) + g(\zeta)$:

$$\eta = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \dots$$

La perturbation de forme f se déplace vers la droite sans changer de forme à la vitesse c_0 (g se déplace vers la gauche).

Application numérique pour une profondeur de l'océan d'environ $h_0 = 5km$, la vitesse est de 800km/h.

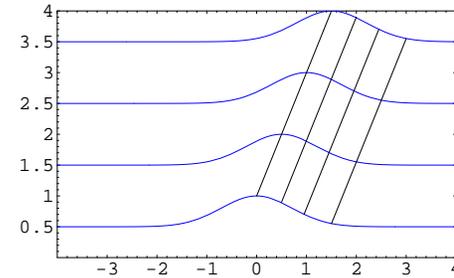


FIGURE 25 – Advection à célérité c_0 d'une perturbation à 4 temps différents . La vague se déplace sans changer de forme, ici la solution $f(x - c_0 t)$ est tracée ainsi que quelques droites "caractéristiques" $t = x/c_0 + cst$.

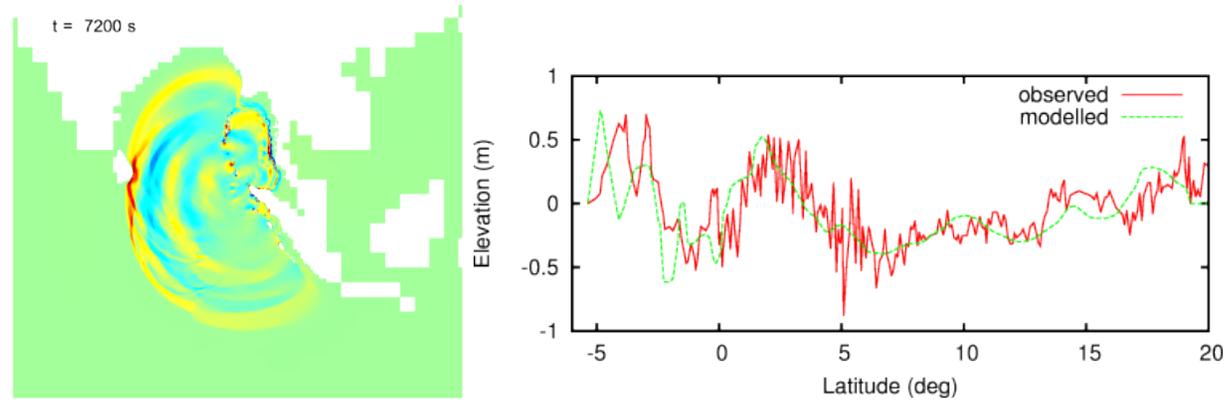


FIGURE 27 – exemple de calcul du Tsunami de décembre 2004. Elévation calculée à 7200s de l'onde rouge : +2 m bleu -2. A droite observation du Tsunami par le satellite Jason-1 comparé et calcul de la simulation. <http://gerris.dalembert.upmc.fr/gerris/examples/examples/tsunami.html>

8.9.4 Premier exemple le Tsunami

Il s'agit de l'onde linéarisée simple, la perturbation se déplace sur de très grandes distances en eau très profonde, le d'Alembertien : $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$ avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

On voit que sur l'image 15. ci contre le tsunami a parcouru 32 degrés en 5 heures. 32 degrés correspondent à $32/90 * \pi/2 * 6378 = 3500\text{km}$ divisé par 5 heures, on trouve l'ordre de grandeur : 720 km/h or $(712/3.6)^2/9.81 = 4000\text{m}$ C'est bien la profondeur de l'océan indien en moyenne.

Remarque, un Mile est une minute d'angle (60 minutes = 1 degrés, le tour de la terre est 360 degrés, et la circonférence de la terre est $2\pi R_{terre}$) : la longueur du Mille marin est $6378000 * 2 * \pi / (360 * 60) = 1852\text{m}$ la distance mesurée au bout de 5 heures est de 32 degrés, donc $32*60=1920$ Miles, soit en 5 heures : $1920/5=384$ noeuds, 1 noeud = 0.5m/s, on retrouve bien les 200m/s.

La longueur de la perturbation de tête est d'environ 250 km (il faut environ 1h/3 pour que la première bosse passe sur une des bouées DART de la 17), 250 km est bien supérieur à 4km la profondeur. la perturbation est à peine de 1 m en hauteur.

Près des côtes, il faut rajouter des termes...

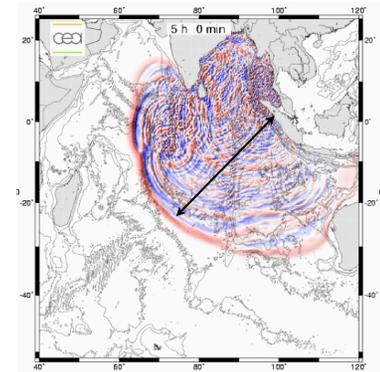


FIGURE 26 – Calcul Saint-Venant (voir chapitre suivant) effectué par le CEA (Hélène Hébert) de simulation du tsunami du 26/12/04 [click to launch the movie, Adobe Reader required]. Droite, sachant que la profondeur moyenne est de 4km, la vitesse moyenne est de 200m/s

8.10 Pour mémoire équation d'onde en axisymétrique

8.10.1 Equation d'onde en axisymétrique

Nous avons écrit souvent l'équation d'onde et ses solution en 1D. En 3D en acoustique, on connaît bien aussi l'équation d'onde. Que se passe-t-il en axisymétrique (en 2D)? Examinons le cas axisymétrique, prenons une source ponctuelle sur un plan d'eau infini, on suppose une dépendance en r et pas en θ , par exemple disons que l'on se donne $h = h_0 + h_1(r)$ au temps $t = 0$ et $u_r = 0$, avec $|h_1(r)/h_0| \ll 1$, comment évolue cette perturbation sur un fond plat? On pose $h = h_0 + \eta(r, t)$ avec $\eta(r, t)$ petit par rapport à h_0 .

L'équation de conservation de quantité de mouvement est identique au 1D et respectivement celle de la masse change un peu car la masse se conserve circulairement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial r}, \text{ respect. } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{h_0 \partial(ru)}{r \partial r},$$

attention aux termes en $1/r$ et r , on a donc

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial}{r \partial r} \left[r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right], \text{ ou l'équation des ondes axisymétriques } \frac{\partial^2}{\partial r^2} \eta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \eta - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \eta = 0.$$

8.10.2 Equation d'onde en 1D 2D et 3D

On a donc respectivement en 1D, 2D et 3D, en posant $x = r$ en 1D et pour une dépendance radiale uniquement en 2D et 3D (pas d'angle) l'équation des ondes (avec ici un champ arbitraire ψ qui peut aussi bien être un potentiel, une élévation de surface ou tout autre champ... :

$$\square \psi = 0, \text{ en 1D : } \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0, \text{ en 2D : } \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0, \text{ en 3D : } \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) = 0.$$

- En 1D, la solution est bien connue, en posant $x = r$, elle est du type $\psi(r, t) = f(r - c_0 t) + g(r + c_0 t)$.
- En 3D, la troisième forme vient du fait que l'on peut aussi bien écrire le Laplacien sous plusieurs formes en sphériques

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi).$$

De fait la solution est bien connue aussi car on voit facilement que la solution est la même qu'en 1D mais pour $(r\psi)$. En fait en 3D, comme il est difficile de partir d'une sphère de perturbation, on enlève g (mais cette solution existe toujours!), donc la solution 3D est $r\psi = f(r - c_0 t)$, ou $\psi(r, t) = \frac{f(r - c_0 t)}{r}$.

- Et en 2D? Bonne question, pour y répondre, nous allons faire des allers retours entre le 1D et le 3D. La question générale est donc : résoudre $\square \psi = 0$ avec les conditions initiales $\psi(r, t = 0) = \psi_0(t)$ et $\frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t = 0) = \psi_1(t)$. On doit trouver les fonctions de Green (ou les solutions élémentaires ou solutions fondamentales),

$$\psi(r, t) = \int G_0(r - r', t) \psi_0(r') dr' + \int G_1(r - r', t) \psi_1(r') dr', \text{ ici l'intégrale est simple, double ou triple.}$$

On a $\square G_0 = 0$ et $\square G_1 = 0$, avec comme conditions initiales $G_0(r, 0) = \delta(r)$, $G_0(r, 0) = 0$ et $G_1(r, 0) = 0$, $G_1(r, 0) = \delta(r)$. En examinant les équations on voit que si on dérive on retrouve un problème identique et donc que $G_0(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} G_1(r, t)$, il suffit de trouver une des fonctions, l'autre s'en déduit alors.

Il faut maintenant le faire en 2D.

8.10.3 Solution de l'équation d'onde en 2D axisymétrique

Construction empirique de la solution retardée en 3D

Nous venons de voir que la solution 3D est de la forme $\psi(r, t) = \frac{f(x - c_0 t)}{r}$. A partir de la solution 3D nous allons construire la solution 2D. Nous suivons la méthode de Whitham ([28] page 221, section 7.4 "Cylindrical Waves" p 219) et celle de Lighthill ([30] page 21, en acoustique, d'où le retour à $p = \rho g \eta$). Nous allons mettre les deux solutions approches Whitham et Lighthill en parallèle.

Pour la solution 3D, posons $u = \frac{\partial \psi}{\partial r}$, où ψ est le potentiel (oui on aurait pu mettre ϕ ça aurait été plus cohérent) donc comme $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}$, on a $p = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t}$. En stationnaire en 3D, la divergence de la vitesse est nulle, donc $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$. S'il y a une source ponctuelle unitaire en $r = 0$, on a une distribution de Dirac $\delta(x, y, z) = \delta(r)$, telle que $\int_0^r 4\pi r^2 \delta = 1$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \delta, \text{ donc } 4\pi r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = 1 \text{ et donc } \psi = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}.$$

Si la source est modulée par une fonction du temps $Q(t)$ assez lente pour que l'on soit en quasi stationnaire, alors $\psi = -\frac{1}{4\pi} \frac{Q(t)}{r}$. Si cette modulation est plus rapide, la vitesse de propagation c_0 va jouer, et on a donc écrire la source de manière "retardée" $t - r/c_0$. Les informations sur les changements de volume $Q(t)$ doivent parcourir une distance r à la vitesse c_0 . En 3D, si on se donne un point source de valeur $Q(t)$, alors la solution en 3D pourrait bien être

$$\psi(r, t) = -\frac{Q(t - r/c_0)}{4\pi r}, \text{ et donc pour la "pression" } p = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \rho \frac{Q'(t - r/c_0)}{4\pi r}.$$

Cette expression est valable en 3D avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et elle satisfait la forme attendue de la solution en $1/r$ fois une fonction de $t - r/c_0$, elle convient donc même si la source varie rapidement en temps.

Construction du 2D par le 3D

Nous venons de faire du 3D en x, y, r , le 2D en x, y n'est jamais que du 3D avec invariance par translation suivant l'axe des z ! Prenons donc pour le 2D en x, y une distribution linéique $q(t)dz$ en rajoutant la dimension supplémentaire transverse au plan z . Pour un petit segment de longueur dz sur cette ligne, puisque $rdr = zdz$, et en ayant posé s la distance du point à la ligne (on changera la notation à la fin, pour désigner ce s comme la distance r habituelle du 2D, mais pour l'instant le rr est un r 3D), on a la contribution élémentaire :

$$\psi = -\frac{Q(t - r/c_0)}{4\pi r} = -\frac{q(t - r/c_0)dz}{4\pi r} \text{ ou } p = \rho \frac{Q'(t - r/c_0)}{4\pi r} = \rho \frac{q'(t - r/c_0)dz}{4\pi r} = \rho \frac{q'(t - r/c_0)dr}{4\pi \sqrt{r^2 - s^2}},$$

car $z = \sqrt{r^2 - s^2}$ et $\frac{dz}{r} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - s^2}}$ voir figure 8.10.3 plus bas. La fonction ψ et la pression à la distance s de la ligne et au temps t sont donc l'intégrale sur toute la ligne, ou deux fois la moitié (de $r = s$ à $r = \infty$) :

$$\psi(s, t) = \frac{-1}{2\pi} \int_s^\infty \frac{q(t - r/c_0)dr}{\sqrt{r^2 - s^2}}, \text{ et } p(s, t) = \frac{\rho}{2\pi} \int_s^\infty \frac{q'(t - r/c_0)dr}{\sqrt{r^2 - s^2}}.$$

La formule est exacte (Lighthill [30] page 21 et aussi [28] page 219-221 sous une forme un peu différente $\psi(s, t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c_0} \frac{q(\zeta)d\zeta}{\sqrt{(t-\zeta)^2 - r^2/c_0^2}}$ par changement de variable). On peut maintenant faire des approximations pour trouver la solution loin de la source près du front d'onde (loin de la source $(c_0 t - r)/r \ll 1$). Si le temps de durée de q est court par rapport à r/c_0 , on peut faire des simplifications :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - s^2}} = \frac{1}{\sqrt{(r+s)(r-s)}} = \frac{1}{\sqrt{(2s+(r-s))(r-s)}} \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{r^2 - s^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{(2s)(r-s)}},$$

près de $r = s$ les contributions sont plus importantes que pour des valeurs de r plus haut (et plus bas). Les valeurs près de $r = s$ sont les plus significatives dans l'équation, donc la réponse en axi est ainsi :

$$\psi(s, t) \simeq \frac{-1}{2\pi\sqrt{s}} \int_s^\infty \frac{q(t-r/c_0)dr}{\sqrt{r-s}} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{s/c_0}} \int_{-\infty}^\tau \frac{q(\zeta)d\zeta}{\sqrt{\tau-\zeta}} \text{ en ayant changé les bornes et avec } \tau = t - s/c_0. \text{ On a aussi } p(s, t) \simeq \frac{\rho}{2\sqrt{\pi}\sqrt{2\pi s}} \int_s^\infty \frac{q'(t-r/c_0)dr}{\sqrt{r-s}}.$$

Formules finales

On peut donc en 2D l'écrire comme Whitham sous une forme plus utilisable en remplaçant le s (distance à la droite) en r (la coordonnée naturelle en 2D) et en posant $\tau = t - r/c_0$ et donc

$$\psi(r, t) = -\sqrt{\frac{c_0}{2r}} F(t - r/c_0), \text{ avec } F(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\tau \frac{q(\zeta)d\zeta}{\sqrt{\tau-\zeta}}$$

ce qui donne l'approximation finale de l'onde axi 2D près du front assez loin. On peut calculer les termes suivant (ce qui est fait par Whitham) du développement.

Si on préfère la formulation de Lighthill, on peut remarquer que l'intégrale est reliée à la "dérivée fractionnaire". On peut étendre la définition de $\frac{d}{dx}$, on peut dire que $\frac{d^{-1}f}{dx^{-1}}$ est $\int^x f(s)ds$. On peut définir l'intégrale q ième (qui se démontre par la formule de Cauchy pour l'intégration successive

$$\frac{d^{-q}}{dx^{-q}} f = \int^x \frac{f(s)(x-s)^{q-1}}{(q-1)!} ds$$

pour une valeur fractionnaire, on utilise cette définition, et on a la dérivée fractionnaire

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} f = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\int^x \frac{ds f(s)}{\sqrt{t-s}} \right).$$

On écrit avec Lighthill (en remettant r au lieu de ss pour la distance à la singularité dans le plan)

$$p(r, t) \simeq \frac{\rho\sqrt{c_0}}{2\sqrt{2\pi r}} \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} q(t - r/c_0), \text{ avec } \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} q(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\int_{-\infty}^t \frac{q'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right).$$

On remarque que la forme varie suivant la dimension sur la figure 8.10.3 issue de Lighthill.

Simulation numérique

voir <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/2Dalembert.c> où l'on calcule le cas d'une source Gaussienne $\gamma(t) = \exp(-t^2)$, on a une très bonne comparaison sur la figure 8.10.3.

$$\eta = -\sqrt{\frac{c_0}{2r}} Q(t - r/c_0), \text{ avec } Q(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\tau \frac{q(\zeta)d\zeta}{\sqrt{\tau-\zeta}}$$

avec

$$q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\gamma'(t)}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{t-T}} dT$$

avec

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{-2T e^{-T^2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-T}} dT$$

On voit sur la figure 8.10.3 que la solution de l'équation d'onde en 2D plan (onde cylindrique) est bien différente par rapport au 1D $\eta = f(t - x/c_0)$ ou en 3D $\eta = \frac{1}{r} f(t - r/c_0)$. Elle s'écrit avec la "dérivée fractionnaire" de la source (Lighthill [30] page 21, Whitham [28] page 219-221).

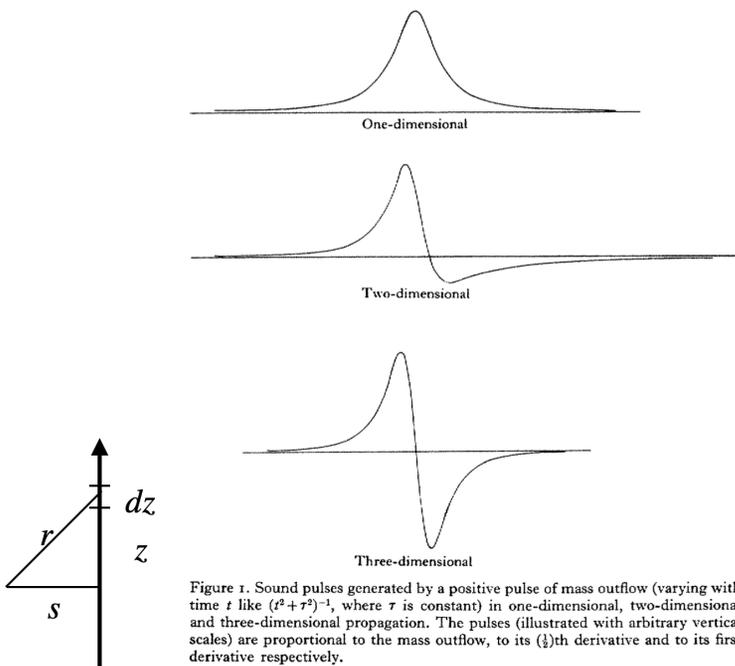


Figure 1. Sound pulses generated by a positive pulse of mass outflow (varying with time t like $(t^2 + \tau^2)^{-1}$, where τ is constant) in one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional propagation. The pulses (illustrated with arbitrary vertical scales) are proportional to the mass outflow, to its $(\frac{1}{2})$ th derivative and to its first derivative respectively.

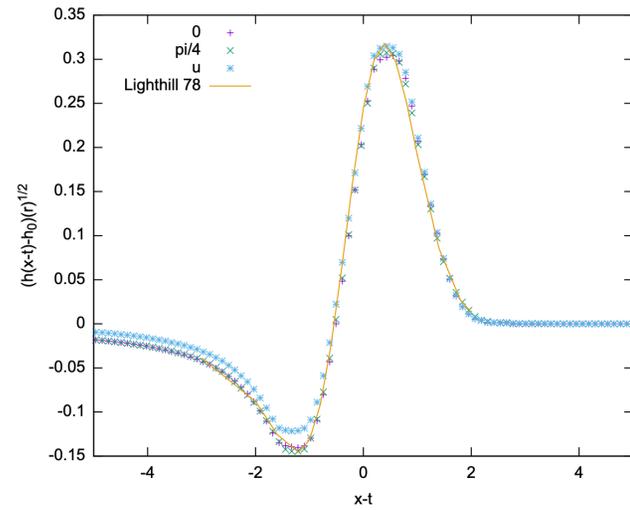


FIGURE 28 – Gauche, solution en 1D, 2D et 3D de l'équation des ondes, tracé qualitatif de Lighthill, Waves in fluids (1978, Cambridge University Press). Droite solution analytique de Lighthill et calcul numérique pour la résolution de l'équation d'onde en axisymétrique

FIGURE 29 – Calcul Saint-Venant effectué par le CEA de simulation du tsunami du 26/12/04 [click to launch the movie, Adobe Reader required].

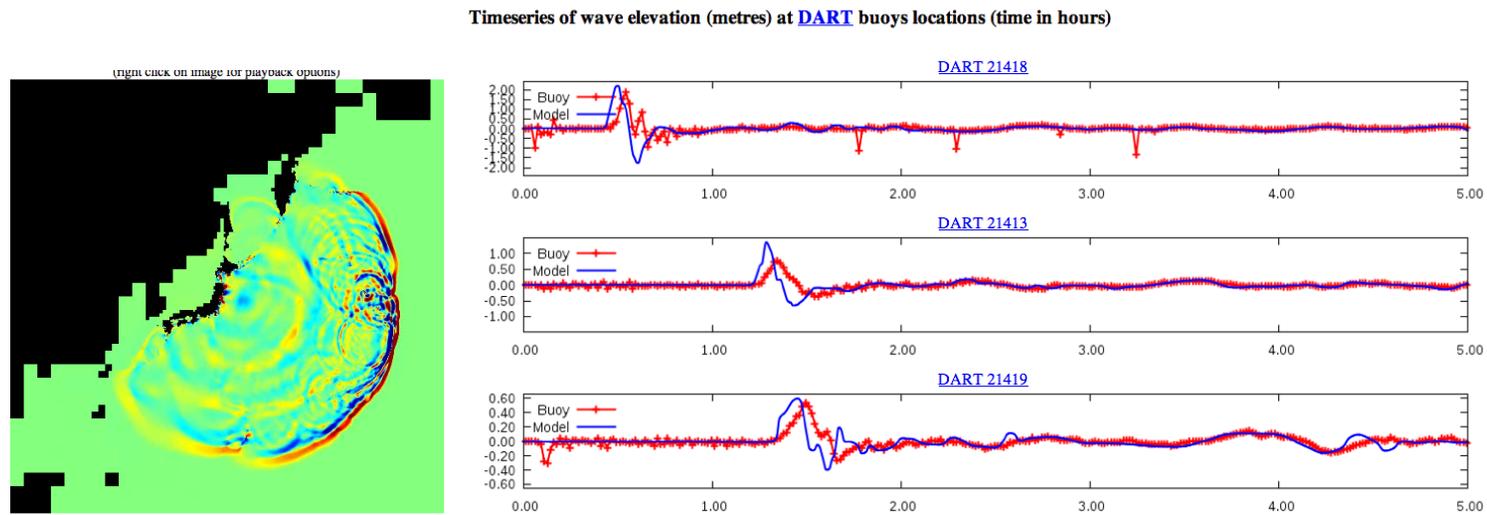


FIGURE 30 – exemple de calcul du Tsunami du 11 mars 2011. Elévation calculée à 7200s de l'onde rouge : 0.5 m bleu -0.5m. A droite observations du Tsunami par les bouées DART dans le pacifique, calcul \mathcal{G} erris. <http://gerris.dalembert.upmc.fr/gatm/index.php?id=usc0001xgp-subfaults>

Le calcul complet des Tsunamis nécessite non seulement des calculs de Saint-Venant non linéaires avec frottement, mais surtout la connaissance fine de la forme des fonds. Ce sont de grands effets de variation de fond qui déforment le signal initial. Les réflexions sur les côtes produisent des signaux qui paraissent dispersifs (la perturbation initiale est suivie de nombreuses vagues qui correspondent aux réflexions, et non pas le signal de l'accident initial ; voir la figure avec la comparaison avec le satellite Jason-1 en 2004).

Plus récemment, on a enrichi (particulièrement dans *Basilisk*) les calculs de tsunamis en rajoutant les termes dispersifs (équations de Boussinesq ou de Serre Green Naghdi). Ce sont les termes que nous verrons pour le Mascaret.

8.11 La Marée



FIGURE 31 – Marée haute et basse à Sauzon, Belle île, Bretagne Sud.

8.11.1 La force de Marée, théorie du "Baccalauréat"

Historique

La montée et descente de la marée est un phénomène bien connu de tout le monde et ce phénomène est particulièrement marqué en Bretagne. La figure 31 le montre bien, à basse mer, le port de Sauzon (à l'est de Belle île en Bretagne Sud) est à sec. En Méditerranée, le phénomène est très faible et sans vraie incidence sur la navigation si on est prudent. Aristote a quand même observé des variations de hauteur, et selon une légende (rapportée uniquement par Simon [45], contredite ailleurs) se serait noyé de dépit en se jetant à l'eau... L'histoire de la civilisation écrite étant plus méditerranéenne que bretonne, il a fallu attendre Pythéas de Marseille (à l'époque colonie grecque) pour attester ce phénomène de la marée lors de son expédition dans les mers du nord de l'Europe vers -325. Cette expédition en fait un des plus anciens explorateurs scientifiques connus, malheureusement ses œuvres ont été perdues, il ne reste plus de son périple que quelques citations. Pline l'ancien (né en 23 il meurt en 79 alors qu'il part observer l'éruption du Vésuve qui détruit Pompéï et Herculanium) est le premier à comprendre à partir de l'observation que la Lune impose sa périodicité et que les grandes marées s'expliquent par l'effet cumulatif du Soleil. Le phénomène a continué intriguer, Galilée par exemple ne croyait pas à l'attraction de la Lune, on consultera le site de l'Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides (IMCCE) pour d'autres références historiques¹. Enfin, Isaac Newton, par sa loi de la Gravitation a proposé la première théorie en 1687 (Isaac Newton, Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle, traduction de la marquise du Châtelet, 1756, réédition Sceaux : Jacques Gabay, 1990, tome I, livre I, proposition 66, p. 179)², on consultera aussi Fichot 1938³.

L'Académie des Sciences de Paris lance un prix sur le sujet dont Daniel Bernoulli, Euler, Mc Laurin (et A. Cavalleri, moins connu que les précédents) sont lauréats en 1740. La première théorie utile et utilisée date cependant de Pierre Simon Laplace (1749- 1827), initiée vers 1774 elle est publiée dans son "Traité de mécanique céleste"

1. <https://promenade.imcce.fr/fr/pages5/525.html>

2. <https://journals.openedition.org/cahierscfv/3009>

3. Exposé Critique de la Théorie des Marées, Fichot, E. Annales du Bureau des Longitudes, Gauthier-Villars, Paris, vol. 0011, pp.C1-C206 1938 https://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1938AnGVP...11C...1F&defaultprint=YES&filetype=.pdf

en 1825. Notons qu'il rend hommage à ∂ 'Alembert, "cet illustre auteur" qui été parvenu "par une analyse aussi sçavante qu'ingénieuse aux véritables équations de ce problème" (Chambat et Gomas 2018). Dans sa théorie, il tient compte de la position respective du Soleil et de la Lune, mais toujours avec la vision de couche d'eau uniforme sur la terre. Pour continuer, il fallait faire des mesures précises, et rajouter des coefficients empiriques liés à la position, c'est ce que fit Antoine-Marie-Rémi Chazallon (1802-1872) qui a inventé le marégraphe. Cet instrument lui permit d'obtenir des séries temporelles sur de longues périodes. En 1839, Chazallon publia le premier annuaire de marée calculé par la méthode de Laplace avec des coefficients empiriques issues de ses mesures.

Le SHOM (Service hydrographique et océanographique de la Marine) continue à publier l'annuaire des marées tous les ans, ce n'est que vers 1992 que la méthode de calcul de Laplace a été abandonnée. Elle a été remplacée au profit d'une "méthode harmonique", voir plus loin à "théorie harmonique" sous l'impulsion des contributions anglaises (de Thomson-Lord-Kelvin entre 1867 et 1883, mais aussi Airy, Georges H. Darwin (fils de Charles) et surtout fixée par Arthur T. Doodson (1890-1968) en 1921).

Notons cependant Henri Poincaré (1854-1912), qui parle de "Marée du Baccalauréat" pour les notions que nous allons voir dans cette section (de fait c'est du niveau L1 L2).

Terme d'accélération de Marée

Pour établir l'origine mécanique de la marée, il faut considérer les forces agissant sur l'eau à la surface de la terre. Les forces présentes sont les forces de gravitation et les forces d'inertie d'entraînement car la terre tourne sur elle même, autour de la Lune et autour du Soleil. C'est là toute la subtilité : il faut considérer les forces d'inertie d'entraînement et en 1800 quand Laplace publie ses travaux, la force de Coriolis n'était pas encore bien établie car elle date de 1835. Pour établir cette théorie, il faut bien voir qu'il y a trois contributions majeures à ces forces de gravitation s'exerçant sur une masse d'eau m : l'attraction de la Terre, l'attraction de la Lune et l'attraction du Soleil. On décompose le problème en d'abord un problème d'attraction de la Lune, puis, de manière similaire d'attraction du Soleil. Commençons par la Lune (pour plus de détails, consulter Simon & Gonella 2007 "La marée océanique côtière" [45], ou Pugh et Woodworth "P.-Sea-Level Science Understanding Tides, Surges, Tsunamis and Mean Sea-Level Changes" CUP 2014.

Si on considère d'abord uniquement le système Terre Lune (la terre de masse M_T a son centre en O et la Lune de masse M_L a son centre en L, les deux centres de masses sont éloignés d'une distance $\|\vec{OL}\|$, la Terre et la Lune sont en interaction gravitationnelle (G , constante de gravitation) : on a pour l'accélération du centre de masse de la Terre

$$M_T \vec{\gamma}_O = -G \frac{M_T M_L}{\|\vec{LO}\|^3} \vec{LO}.$$

La Terre et la Lune tournent autour de leur centre de gravité, cette rotation induit une accélération d'entraînement qui est le terme qui va subtilement créer la marée $\vec{\gamma}_e$ La Terre tourne autour d'elle même à la vitesse angulaire constante ω (et la Lune tourne aussi autour d'elle même de manière à présenter toujours la même face). Pour une masse m à la surface de Terre de rayon R au point M , l'accélération absolue se décompose en accélération relative, d'entraînement et complémentaire :

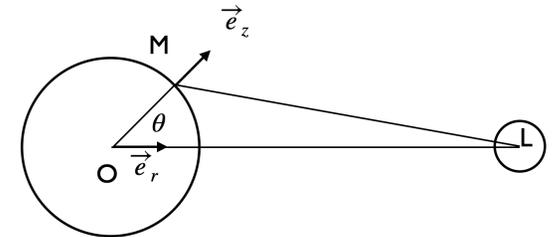
$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c,$$

cette masse est soumise aux forces de Newton de gravitation, forces attractives vers le centre de la Terre $-G \frac{mM_T}{(OM)^3} \vec{OM}$ et de la Lune $-G \frac{mM_L}{(LM)^3} \vec{LM}$, et aux autres forces \vec{F} , le point M repéré par sa position \vec{r} par rapport au centre de T a pour accélération relative :

$$m \vec{\gamma}_r = \vec{F} - G \frac{mM_L}{(LM)^3} \vec{LM} - G \frac{mM_T}{(OM)^3} \vec{OM} - m \vec{\gamma}_e - m \vec{\gamma}_c$$

la dernière est liée à Coriolis (que l'on pourrait enlever si on considérait une vitesse faible), l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ sera l'accélération de O plus l'accélération centripète de rotation uniforme : $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_O + \omega^2 \vec{HM}$ car $d\omega/dt = 0$, et H projection sur l'axe de rotation donc

$$m \vec{\gamma}_r = \vec{F} - m \vec{\gamma}_c + (-G \frac{mM_T}{(OM)^3} \vec{OM} + m\omega^2 \vec{HM}) - G \frac{mM_L}{(LM)^3} \vec{LM} - m \vec{\gamma}_O$$



or on regroupe la force d'attraction et la force d'inertie centrifuge pour former l'accélération de la pesanteur $-G \frac{M_T}{(OM)^3} \overrightarrow{OM} + \omega^2 \overrightarrow{HM} = \vec{g}$, la somme de force de Newton et de la "force centrifuge" due à la rotation de la Terre est le champ de gravitation. L'accélération de O le centre de la Terre est reliée à la force de gravitation entre la Lune et la Terre que nous avons déjà vue : $M_T \vec{\gamma}_O = -G \frac{M_T M_L}{(LO)^3} \overrightarrow{LO}$ l'accélération relative est donc la somme des forces \vec{F} , de la gravité $m \vec{g}$ de Coriolis et du terme de marée (on appelle ainsi par définition la différence entre la force de gravité en O et en M) :

$$m \vec{\gamma}_r = \vec{F} + m \vec{g} - m \vec{\gamma}_c + m \left(G \frac{M_L}{LO^3} \overrightarrow{LO} - G \frac{M_L}{(LM)^3} \overrightarrow{LM} \right), \text{ le terme de Marée } \vec{\gamma}_M = \left(G \frac{M_L}{LO^3} \overrightarrow{LO} - G \frac{M_L}{(LM)^3} \overrightarrow{LM} \right) = GM_L \left(\frac{1}{(LM)^3} \overrightarrow{ML} - \frac{1}{LO^3} \overrightarrow{OL} \right)$$

le terme de Marée, ou "force de Marée" ou aussi "d'accélération de Marée" $m \vec{\gamma}_M$ se décompose en

- la composante $-m \frac{GM_L}{LO^3} \overrightarrow{OL}$ qui est la force d'inertie d'entraînement du référentiel lié à la Terre, elle est la même en tout point M et définit donc un champ de force constant dans la direction $-\overrightarrow{OL}$ (centrifuge pour tous les points M)
- la composante $m \frac{GM_L}{(LM)^3} \overrightarrow{ML}$ qui est la force d'attraction exercée par la Lune (la force est bien dirigée de M vers L) sur tout point M du globe, elle est fonction de la position du point.

Le terme global de force de marée est faible car la distance du centre de la Terre à la Lune et du point M sur la Terre à la Lune est proche. On va donc faire un développement limité car le rayon terrestre est bien plus petit que la distance Terre Lune $\|\overrightarrow{OM}\|/\|\overrightarrow{LO}\| \ll 1$. Comme $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OM}$,

$$\|\overrightarrow{LM}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{LO}\|^2 + \|\overrightarrow{OM}\|^2 + 2\overrightarrow{LO} \cdot \overrightarrow{OM}} = \|\overrightarrow{LO}\| \sqrt{1 + 2 \frac{\overrightarrow{LO} \cdot \overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{LO}\|^2} + \frac{\|\overrightarrow{OM}\|^2}{\|\overrightarrow{LO}\|^2}}$$

comme $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \dots$ on a au premier ordre $\frac{\|\overrightarrow{LO}\|^3}{\|\overrightarrow{LM}\|^3} = \left(1 - 3 \frac{\overrightarrow{LO} \cdot \overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{LO}\|^2}\right) + \dots = \left(1 + 3 \frac{\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{LO}\|^2}\right) + \dots = \left(1 + 3 \cos \theta \frac{R}{\|\overrightarrow{LO}\|}\right) + \dots$, si θ est l'angle entre \overrightarrow{OL} et \overrightarrow{OM} , le terme d'accélération de Marée, en mettant LO^3 en facteur et en décomposant $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OM}$

$$\vec{\gamma}_M = \frac{GM_L}{LO^3} \left(\left(1 - \frac{LO^3}{(LM)^3}\right) \overrightarrow{LO} - \frac{LO^3}{(LM)^3} \overrightarrow{OM} \right) = \frac{GM_L}{LO^3} \left(\left(-3 \cos \theta \frac{R}{LO}\right) \overrightarrow{LO} - \left(1 + 3 \cos \theta \frac{R}{LO}\right) \overrightarrow{OM} \right) + \dots = \frac{GM_L}{LO^3} \left(\left(3 \cos \theta \frac{R}{LO}\right) \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM} \right) + \dots$$

si on appelle $\vec{u}_r = \overrightarrow{OL}/OL$, et on pose $\vec{e}_z = \overrightarrow{OM}/R$, on obtient

$$\vec{\gamma}_M = \frac{GM_L R}{LO^3} \left((3 \cos \theta) \vec{u}_r - \vec{e}_z \right) + \dots$$

Or on peut écrire que la force est dirigée le long du vecteur $\overrightarrow{MP} = (3 \cos \theta \vec{u}_r - \vec{e}_z)R = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}$, avec le point P sur l'axe Terre-Lune. Donc $\overrightarrow{OP}/R = 3 \cos \theta \vec{u}_r$, on en déduit que $\overrightarrow{OP} = 3R \cos \theta \vec{u}_r$, c'est ce que l'on appelle la "règle de Proctor" : le point P est à 3 fois la projection orthogonale du point M sur l'axe Terre Lune (dans [45] il y a une démonstration géométrique que nous retrouvons ici algébriquement).

On projette suivant le vecteur unitaire $\vec{e}_z = \overrightarrow{OM}/R$, comme $\overrightarrow{LO} \cdot \overrightarrow{OM}/\|\overrightarrow{LO}\|^2 = -\cos\theta R/\|\overrightarrow{LO}\|$, on trouve à l'ordre dominant suivant la normale

$$\vec{\gamma}_M \cdot \vec{e}_z = \frac{GM_L}{LO^3}((3\cos^2\theta - 1)R) + \dots$$

et sur la normale à \vec{e}_z notée \vec{e}_x (en prenant le produit vectoriel), on a à l'ordre dominant

$$\vec{\gamma}_M \cdot \vec{e}_x = \frac{GM_L}{LO^3}(3\cos\theta\sin\theta)R + \dots$$

on écrit en faisant apparaître la gravité au sol qui est (en négligeant ω) $g \simeq GM_T/R^2$ et $LO = D$ distance Terre Lune

$$\vec{\gamma}_M = g \frac{M_L R^3}{M_T D^3} ((3\cos^2\theta - 1)\vec{e}_z + (\frac{3}{2}\sin 2\theta)\vec{e}_x)$$

le module de la force est, comme $(3\cos^2\theta - 1)^2 + (\frac{3}{2}\sin 2\theta)^2 = (5 + 3\cos(2\theta))/2 = (6\cos^2(\theta) + 2)/2$, donc :

$$\|\vec{\gamma}_M\| = mg \frac{M_L R^3}{M_T D^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

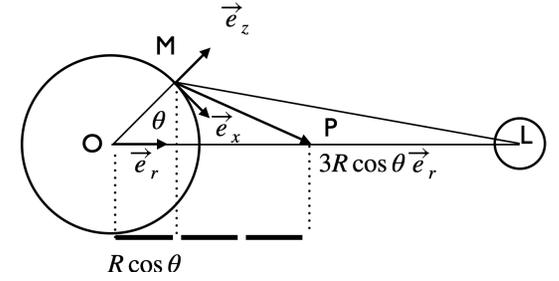


FIGURE 32 – Règle de Proctor

Notons que certains ouvrages préfèrent démontrer les relations à partir du potentiel, par exemple Lamb p 358 [36] ..

Le résultat est que la force crée une sorte de "bourrelet" symétrique (c'est une vue de l'esprit).

Contribution relative du Soleil et de la Lune à l'accélération de Marée

La formule de la force de marée que nous venons d'établir pour la Lune est valable aussi pour le Soleil, donc la force de marée due au soleil avec les variables *ad hoc* liées au Soleil cette fois ($\vec{e}'_z, \vec{e}'_x, \theta'$...) :

$$\vec{\gamma}_S = g \frac{M_S R^3}{M_T (OS)^3} ((3\cos^2\theta' - 1)\vec{e}'_z + (\frac{3}{2}\sin 2\theta')\vec{e}'_x) \tag{15}$$

Les deux effets s'additionnent.

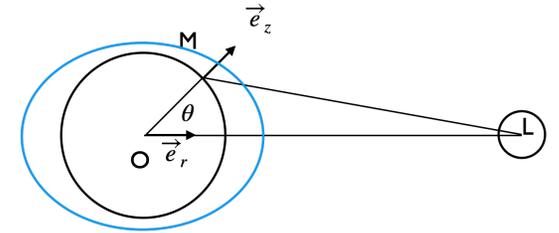
On rappelle quelques valeurs :

$M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $M_L = 7,3477 \cdot 10^{22}$ kg; et $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg

$M_L = 0,0123 M_T$, $M_S = 3.3 \cdot 10^5 M_T$

$R_L = 1737$ km, $R_T = 6,378 \cdot 10^3$ km.

Distance Terre Lune 384 400 km, et distance Terre Soleil 149 597 870 km



On peut estimer les ordres de grandeur des accélérations de marée.

Après calcul, on constate que la force génératrice due à la Lune (de faible masse par rapport au Soleil mais bien plus près) est un peu plus de deux fois supérieure (2,18 exactement, soit 1/0.46) à celle du Soleil. Ces forces restent très faibles vis-à-vis de la pesanteur $g \simeq 10m/s^2$, et sont de l'ordre de $1\mu m/s^2$ Seule la composante horizontale met en mouvement les particules fluides. Une très faible accélération joue donc un rôle majeur dans le phénomène de la marée océanique tel qu'il est observé.

Rotation, période de la Marée

Au final, on a deux contributions, la force de marée du Soleil tourne avec celui ci, mais la force de marée crée une force qui est symétrique donc la rotation crée deux marées solaires par période de 24h, soit une période de 12h.

De même la Lune crée sa force de marée. La Lune fait un tour en un jour lunaire 24h50min28s (retour à la même position), le mois lunaire 29j12h44mn. Il y a donc deux marées lunaires par jour de période de 12h25mn14s (0,517525050 jour = 12 heures 25 minutes 14 secondes), un "marnage" s'effectue en 6h12mn30s.

On appellera onde M2 l'onde Lunaire de période 12h25 et l'onde S2 l'onde solaire de période 12h00 (0.46 d'amplitude relative).

Rappelons que l'on a supposé une Terre sans terres, avec que de l'eau, et on a obtenu ce bourrelet (voir schéma ci dessus).

Cette représentation du bourrelet de marée est bien sûr complètement fausse puisqu'elle suppose une réponse instantanée d'une eau uniformément répartie. Il faut plutôt penser en terme de forçage qui a cette forme de bourrelet et qui va forcer dynamiquement les étendues d'eau entre des terres émergées. Les termes de forçage de la Lune et du Soleil produisent dans les grands bassins océaniques des déplacements d'eau contraints par les continents. Par exemple dans l'Atlantique Nord qui forme un bassin où est retenue l'eau entre, la marée est semi diurne. On observe un point qui est toujours de hauteur constante (point amphydromique) à l'est de Terre Neuve 50N -38W (voir l'image issue de [45]). L'onde de Marée tourne autour de ce point dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et progresse aux abords de l'Europe occidentale du sud vers le nord. Au passage du talus continental en raison de la diminution de célérité l'onde devient perpendiculaire aux isobathes (comme pour la Houle toujours parallèle à la côte). La hauteur passe de 2,4m au talus à 6 m aux abords de Brest et le double vers Saint-Malo.

En effet, dans la Manche, la hauteur d'eau est ralentie car la profondeur est plus faible, la marée met autant de temps à traverser la Manche que l'Atlantique. Les effets de côte sont importants ; c'est que qui a rendu la théorie si dure à construire.

8.11.2 La force de Marée, théorie de Laplace, vives et mortes eaux

Théorie de Laplace

Pour calculer la marée dans la Manche, reprenons la théorie de Laplace (inspirée par Newton et d'Alembert), amendée par Chazallon. Dans sa forme la plus simple, Laplace propose d'écrire la hauteur d'eau avec le développement (15), il tient compte précisément de la position du Soleil et de la Lune dans le ciel (leur angle horaire et leur déclinaison). Il introduit donc dans la formule \mathcal{A} l'angle horaire de l'astre et δ sa déclinaison (qui varient en fonction du temps. la résolution de triangle sphérique donne pour chaque astre Lune Soleil :

$$3 \cos^2 \theta - 1 = \frac{3}{2} \cos \lambda \cos \delta \cos 2\mathcal{A} + \frac{3}{2} \sin 2\lambda \sin 2\delta \cos \mathcal{A} + \frac{1}{2}(1 - 3 \sin^2 \lambda)(1 - 3 \sin^2 \delta).$$

Le premier terme représente une périodicité semi-diurne, le deuxième une périodicité diurne, le troisième une périodicité à longue période. Comme ceci ne représente que le forçage, il faut rajouter des termes empiriques dépendant de la position. Concrètement, changer l'amplitude et rajouter des déphasages.

$$3 \cos^2 \theta - 1 = h_1 \cos \lambda \cos \delta \cos(2\mathcal{A} - \phi_1) + h_2 \sin 2\lambda \sin 2\delta \cos(\mathcal{A} - \phi_2) + h_3(1 - 3 \sin^2 \lambda)(1 - 3 \sin^2 \delta).$$

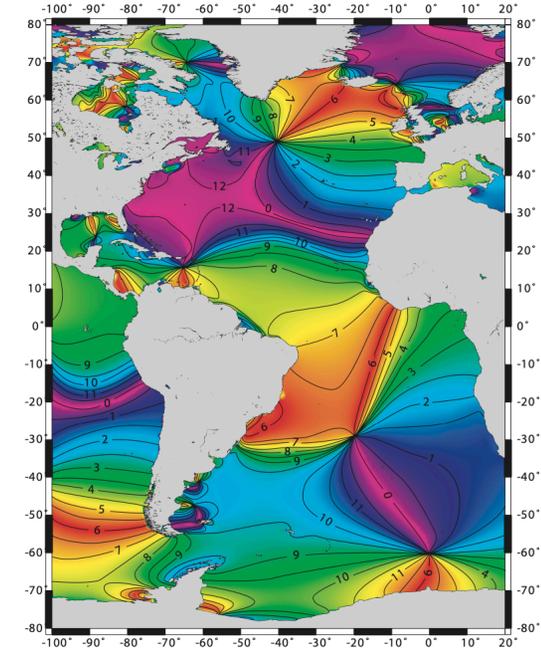


FIGURE 1.3 — Lignes cotidiales de la marée semi-diurne moyenne en Atlantique : lignes de crêtes de l'onde, tournant autour des points amphydromiques, avec phase exprimée en heures par rapport à l'heure de passage de la Lune dans le plan du méridien de Greenwich.

FIGURE 33 – Marées des océans, on est loin de la vision du bourrelet... Image de Simon [45].

cf Bouteloup p 65 pour des valeurs numarirqu

La déclinaison du Soleil (angle entre sa direction et le plan de l'équateur) varie de $\pm 23^{\circ}26'$ (de Juin à Décembre), pendant l'année tropique qui est le temps qu'il faut au Soleil pour faire un tour du point vernal au point vernal (point de déclinaison nulle atteint à l'équinoxe de printemps). L'année tropique vaut 365 jours, 5 heures, 48 minutes et 46 secondes, soit 365.2422 jours. La vitesse angulaire est de $360/365.2422 = 0.985647^{\circ}/jour$ (cette valeur est indiquée dans le tableau 1 de la figure 36 pour h : la longitude moyenne du soleil). Ce n'est pas l'année sidérale qui correspond à l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs de la Terre dans une même direction stellaire (vue du Soleil) 365,2563 jours (soit 365 jours 6 h 9 mn 9.8 s). Enfin, la précession des équinoxes doit être considérée. Le point vernal est le nœud ascendant de l'écliptique moyen sur l'équateur moyen, il tourne d'environ 1 degré 23 minutes par siècle, sa période de rotation est d'environ 26000 ans. La valeur par jour est une rotation de $0.000047069^{\circ}/jour$ (cette valeur est indiquée dans le tableau 1 de la figure 36 pour p_1 : la longitude du périégée du soleil). Enfin, la distance Terre Soleil varie de 3 % (plus près en Janvier qu'en Juillet) ce qui rajoute une modulation supplémentaire.

Pour la Lune, sa déclinaison varie de $\pm 28^{\circ}43'$ (en une lunaison, ou mois lunaire : 29 j 12 h 44 min 2,8 s), tandis que la distance Lune Terre varie de 13 %. La révolution tropique 27.3215821 (ou mois lunaire périodique temps mis par la Lune pour revenir à une même longitude terrestre). Sa durée est de 27 j 7 h 43 mn 4,7, s = 27.3215821 jour. La vitesse angulaire est de $360/27.3216 = 13.17639673^{\circ}/jour$ (cette valeur est indiquée dans le tableau 1 de la figure 36 pour s : la longitude moyenne de la Lune). On ne confond pas le mois lunaire synodique, couramment appelé lunaison, qui correspond à l'intervalle entre deux nouvelles lunes consécutives et vaut environ 29,530 588 85 jours. La Lune fait un tour en un jour lunaire 24h50min28s (retour à la même position), le mois lunaire 29j12h44mn. Il y a donc deux marées lunaires par jour de période de 12h25mn14s (0,517525050 jour = 12 heures 25 minutes 14 secondes), un "marnage" s'effectue en 6h12mn30s. Il faut aussi tenir compte d'un terme de période de 8,84 ans correspondant à la projection en longitude du mouvement du périégée de la Lune, anomalie de la Lune. La vitesse angulaire est de $0.11140408^{\circ}/jour$ (cette valeur est indiquée dans le tableau 1 de la figure 36 pour p : la longitude de l'anomalie de la Lune). Enfin de même, la précession du nœud ascendant tourne en 18.6 années, la vitesse angulaire est de $0.05295392^{\circ}/jour$ (cette valeur est indiquée dans le tableau 1 de la figure 36 pour N' : la longitude du Nœud ascendant de la Lune).

On consultera les ouvrages grand public de O Guérin⁴ qui sont très clairs sur les différents rythmes.

On écrira donc la formule finale de la théorie de Laplace sous la forme quivante, en ne gardant pour simplifier la suite que les deux termes principaux semi diurnes du Soleil et de la Lune

$$h = Z_0 + A_{M2} \cos(\Omega_{Mt} - G_{M2}) + A_{S2} \cos(\Omega_{St} - G_{S2}).$$

Les coefficients ($A_{M2}, G_{M2}, A_{S2}, G_{S2}$) sont déterminés par la position de la Lune et du Soleil et varient suivant leur déclinaison et leur angle horaire ainsi que leur distance. Leur nom semble ici étrange, mais c'est pour être raccord avec la théorie de Doodson que l'on explique ensuite. Leur expression, assez compliquée, a été établie par Laplace comme on vient de le dire, une présentation simple est dans Bouteloup [6], une bien plus complète dans Simon [45]. Ici on a gardé que les deux termes principaux semi diurnes du Soleil et de la Lune.

On a rajouté Z_0 un niveau moyen de chaque port. Le zéro de référence des cartes marines est choisi au niveau des plus basses mers. La hauteur totale n'est jamais nulle par construction des cartes marines. Les cartes sur terre ont comme niveau zéro le niveau moyen des mers.

Comme dit, les coefficients ($A_{M2}, G_{M2}, A_{S2}, G_{S2}$) dépendent position de la déclinaison et l'angle horaire, de la distance. de la Lune et du Soleil de manière astronomiquement rigoureuse. Mais Laplace a autorisé des coefficients empiriques pour moduler ces termes : il fallait mettre des constantes issues de l'observation en chaque port. Comme déjà dit plus haut, cette formulation initiée par Chazallon a été utilisée par le SHOM jusque dans les années 1990.

Vives et mortes eaux (première approche)

La forme proposée simplifiée ci dessus en somme de deux contributions permet d'expliquer les marées de vives et mortes eaux, c'est à dire les "grandes" marées avec une montée descente importante de la mer et les petites marées, où l'excursion de la mer est plus faible. Nous verrons plus loin la formule pratique harmonique complète (17). Pour parler des marées de vives et mortes eaux, simplifions encore l'analyse de Laplace. En toute première approximation, les coefficients

4. O Guérin Comprendre les marées/ tout savoir sur les marées Éd : Ouest-France

$(\Omega_M, \Omega_S, A_{M2}, G_{M2}, A_{S2}, G_{S2})$ seront pris constants cela va nous permettre d'expliquer les marées de vives et mortes eaux :

$$h = Z_0 + A_{M2} \cos(\Omega_M t - G_{M2}) + A_{S2} \cos(\Omega_S t - G_{S2}).$$

Pour le Soleil, le jour solaire vaut 24h donc $\Omega_S = 2(2\pi)/24rad/heure = 0.523599rad/heure$,

Pour la lune le jour lunaire vaut 24h 50mn 28s = 24.8411 heures $\Omega_M = 2(2\pi)/(24.8411) = 0.505868rad/heure$

Prenons le port de Saint-Malo, $Z_0 = 6.71m$ $A_{M2} = 3.68m$, $A_{S2} = 1.432m$ et G_{S2}, G_{M2} sont obtenus expérimentalement (en fait ici on met les deux premiers termes de Doodson, voir plus loin) :

$$h = 6.71 + 1.432 \cos(4.50295 - 0.523599heure) + 3.68 \cos(5643.47 - 0.505868heure)$$

où *heure* représente le nombre d'heures depuis le 01/05/2016 00 :00, en heure TU+1.

On va manipuler cette somme de cosinus pour faire apparaître une modulation de l'amplitude de la marée lunaire, un "battement" lié à la faible variation $(\Omega_S - \Omega_M)/\Omega_M$. Pour simplifier les calculs on pose $h = Z_0 + A_{M2}(\cos(t') + a \cos(t' + R(t')))$ avec :

$$a = A_{S2}/A_{M2}, t' = \Omega_M t - G_{M2} \text{ et } \Omega_S t - G_{S2} = (\Omega_M t - G_{M2}) + ((\Omega_S - \Omega_M)t + (G_{M2} - G_{S2})) = t' + R(t').$$

Pour Saint Malo, $a \simeq 3.68/1.432 = 2.57$ et $(\Omega_S - \Omega_M) = 0.0177 \ll \Omega_M$

(MoisLunaire = 29 j 12h 44 min 2.8016 soit $= (29 + (12 * 3600 + 44*60 + 2.8016)/86400)$;)

$(\Omega_S - \Omega_M) = 2\pi/24/MoisLunaire = 0.0177heure^{-1}$. les deux ondes tournent à peu près à la même vitesse, R est le lent déphasage ($R' \ll 1$ négligeable) qui va moduler la somme des deux ondes. La dérivée $h' = A_{M2}(-\sin(t') - a(1 + R') \sin(t' + R(t')))$ est nulle aux marées hautes et basses,

$$\sin(t') + a(\cos(t') \sin(R) + \sin(t') \cos(R) + O(R')) = 0, \text{ donc } \tan(t')(1 + a \cos(R)) \simeq -a \sin(R),$$

en substituant $\pi + \arctan(\frac{a \sin R}{1 + a \cos R})$ à t' dans h on trouve

$$(1 + a^2 + 2a \cos(R))/((1 + a \cos(R))/\sqrt{(1 + (a^2 \sin(R)^2)/(1 + a \cos(R))^2)}) = \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos R}.$$

Cette relation de la hauteur au maximum qui est $\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos R}$ montre que l'amplitude est maximale pour $\cos R = 1$ ($R = 0$ ou $R = \pi$), les deux sont en phase : c'est la marée de "vive eaux" (*spring tide*) les contributions de la Lune et du Soleil s'additionnent. Cela se produit lorsque la Terre la Lune et le Soleil sont alignés, ou quand la Lune, la Terre et le Soleil sont alignés, le bourrelet de marée étant symétrique. Pour $\cos R = -1$ la marée est minimale ("mortes eaux", *neap tide*).

Vers la méthode des harmoniques

On a écrit la hauteur d'eau $h = Z_0 + A_{M2} \cos(\Omega_M t - G_{M2}) + A_{S2} \cos(\Omega_S t - G_{S2})$, et on a dit que les coefficients $(A_{M2}, G_{M2}, A_{S2}, G_{S2}, Z_0)$ sont fonction de la position de la Lune et du Soleil. On peut en faire un développement limité en somme de composantes sinusoïdales. Cela a été proposé en 1867 par Lord Kelvin (Thomson), avec l'idée que chacun des coefficients de cette somme dépendait du port (par déduction d'analyse de séries d'observations sur des temps longs). En 1883 et dans *Oceanic tides and lunar disturbances of gravity* en 1907, George Darwin (fils de Charles Darwin, théoricien de l'évolution) re-rend les coefficients légèrement variables.

La figure 34 de Simon [45] montre clairement la mesure expérimentale pour le port du Havre par un marégraphe (comme celui de la photo gauche de 35) de la hauteur d'eau. Le signal a été décomposé en harmoniques. On voit bien les fréquences associées aux fréquences de la Lune et du Soleil. On constate aussi qu'il y a de nombreuses autres ondes qui se mélangent. Nous allons voir maintenant la théorie de Doodson telle qu'appliquée par le SHOM à partir des années 1990.

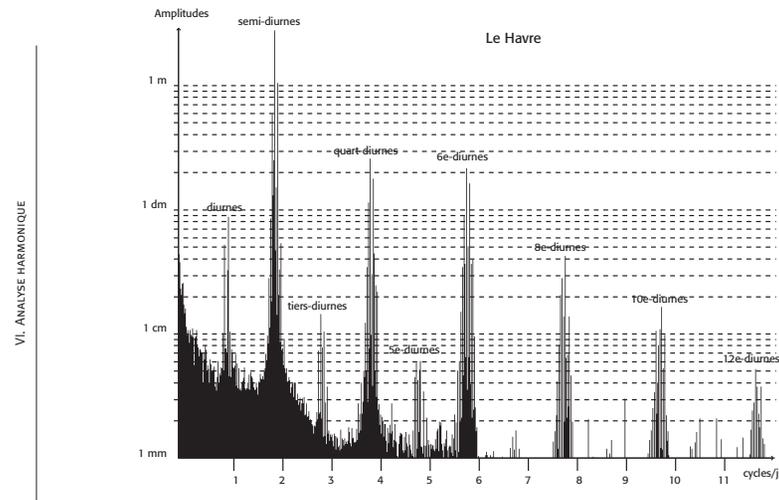


FIGURE 6.3 — Spectre dit de « basse résolution » obtenu par TFR (Le Havre, France). L'axe des abscisses représente la vitesse angulaire exprimée en cycles par jour ($1 \text{ cpj} = 360^\circ / 24 \text{ h}$). La caractéristique fondamentale de ce spectre est sa structure en groupements de fréquences bien séparés les uns des autres, constituant les espèces de la marée. Ce spectre s'étale sur une douzaine d'espèces. On peut noter que la bande de fréquences relatives à chaque espèce est relativement étroite.

138

FIGURE 34 – Exemple de spectre de la Marée issu de Simon (Simon & Gonella 2007 "La marée océanique côtière" [45], reproduction de la page 138). Mesure expérimentale pour le port du Havre. On voit bien les fréquences associées aux fréquences de la Lune et du Soleil



FIGURE 35 – Gauche Marégraphe de Saint Malo (côté Tour Solidor), Photo PYL Centre : Le prédicteur de marée du S.H.O.M. à Brest, construit par Kelvin-Bottomley en 1924 sous le nom de TP n°6. <https://hal.science/hal-04317855/document>. Droite Tide Predictor n°3 du SHOM (1900) dans les réserves du musée des Arts & Métiers, Photo PYL

8.11.3 La Marée, théorie harmonique de Doodson

Texte de "la table des marées des grands ports du Monde" [42]

Nous allons maintenant présenter la méthode (théorie harmonique de Doodson) utilisée depuis les années 90 par le SHOM pour prévoir les marées. Cette subsection est plus que largement inspirée, voire plagiée, du texte de "la table des marées des grands ports du Monde" [42] puis d'une page ouèbe du SHOM <http://refmar.shom.fr/documents/10227/789220/formulation.pdf> disparue depuis...

Curieusement, ce livre a été publié en 1984 avant que la méthode harmonique ne soit utilisée pour l'annuaire des marées du SHOM. Cet ouvrage donnait des programmes pour les calculatrices de l'époque dont l'inégalee HP41 <https://fr.wikipedia.org/wiki/HP-41>. Un changement de politique du SHOM, qui s'était rendu compte peut être trop tard de la mine d'or qu'il avait donnée, fit que ce livre fut retiré de la réédition. Il fut fait savoir qu'il ne fallait pas l'utiliser car trop imprécis, et qu'il fallait mieux utiliser d'autres produits payants du SHOM. Dans ce livre il est écrit que la formule pratique actuelle a été introduite par Arthur T. Doodson (1890-1968) en 1921 [14], il est écrit dans ce document que "la hauteur de marée à un instant donné est la composition d'un nombre illimité d'oscillations élémentaires strictement périodiques"

$$h = Z_0 + \sum_i \sum_j A_{ij} \cos(V_{ij} - G_{ij}) \quad (16)$$

où Z_0 est le niveau moyen autour duquel oscille le niveau de l'eau. Il permet de rapporter la hauteur d'eau au zéro de référence des cartes qui est généralement le niveau des plus basses mers.

- A_{ij} et G_{ij} sont respectivement l'amplitude et la situation d'une onde élémentaire qui ne dépendent que du port considéré.
- V_{ij} est l'argument astronomique lié au temps t .

L'indice i caractérise la nature de l'onde, l'indice j se rapporte à sa période. Ainsi :

- $j = 0$ pour les ondes annuelles.
- $j = 1$ pour les ondes "diurnes" qui ont une période voisine de la journée.
- $j = 2$ pour les ondes "semi-diurnes" qui ont une période voisine de la demi-journée, etc.

Cette formule 16 est appelée "formule harmonique de la marée".

Bien entendu on tronque la série à un nombre fini de modes, ceux qui ont une amplitude suffisante pour avoir une influence notable sur la hauteur d'eau. Si on garde une dizaine d'ondes, on peut espérer une précision de quelques centimètres, en fait "d'autres ondes sont prises en compte dans le calcul, mais elles se déduisent automatiquement des précédentes".

De toutes façons il est illusoire d'espérer trop de précision, la météorologie joue : le passage d'une dépression peut modifier la hauteur, en effet une variation de 10 hPa de la pression barométrique induit une variation de hauteur d'eau de 10 cm (rappelons que si 10 mètres (soit 1000cm) correspondent à 1000 hPa).

Les 10 ondes principales considérées :

- onde annuelle : S_a
- ondes diurnes : luni-solaire K_1
- lunaires O_1 et Q_1 ondes semi-diurnes : lunaires M_2 et N_2
- solaire S_2
- ondes quart-diurnes : MN_4 , M_4 et MS_4

"D'autres ondes sont prises en compte dans le calcul, mais elles se déduisent automatiquement des précédentes. "

La méthode de [42] permet de "calculer la marée à travers le monde avec une précision suffisante pour la navigation quel que soit le type de la marée : semi-diurne, diurne, mixte ou de petits fonds".

"A chaque onde correspond une identification, une vitesse angulaire (en degrés par heure), une amplitude (en mm) et une situation (en degrés). L'argument astronomique V_{ij} s'exprime par la formule où :

$$V_{ij} = 15 j t + n_1 s + n_2 h + n_3 p + n_4 N' + n_5 p_1 + n_6 D$$

t est le temps solaire moyen local exprimé en heures décimales n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 sont des coefficients constants entiers

h : la longitude moyenne du soleil

s : la longitude moyenne de la lune

p : la longitude du périégée de la lune

N : la longitude du nœud ascendant de la lune et $N' = -N$

p_1 : la longitude du périégée du soleil

$D = 90^\circ$

$n_6 = 0$ ou 1 ou -1 pour que le terme correspondant du potentiel soit de la forme $G \cos V_{ij}$, avec G positif.

Ces paramètres exprimés en degrés sont, en première approximation, des fonctions linéaires du nombre T de jours écoulés depuis l'instant origine des temps qui peut être choisi de façon arbitraire Si l'on choisit pour cet instant le 1er janvier 1980 à 00 h 00 (UT), ce nombre T s'exprime par la formule :

$$T(J, M, A, heure_{hiv}) = \lfloor (30.6001(1 + M + 12[\frac{1}{1+M} + .7])) \rfloor + \lfloor (365.25(A - [\frac{1}{1+M} + .7])) \rfloor + J + \frac{heure_{hiv}}{24} - 723258$$

avec la fonction partie entière $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Elle n'est valable que pour les dates comprises entre le 1er mars 1900 ($J = 1, M = 3, A = 1900$) et le 28 février 2100 ($J = 28, M = 2, A = 2100$).

s la longitude moyenne de la Lune a une vitesse angulaire de $13.17639673^\circ/jour$

h la longitude moyenne du soleil a une vitesse angulaire de $0.985647^\circ/jour$

p anomalie de la Lune a une vitesse angulaire de $0.11140408^\circ/jour$

N' : la longitude du Nœud ascendant a une vitesse angulaire de $0.05295392^\circ/jour$

p_1 la longitude du périégée du soleil tourne (précession des équinoxe) de $0.000047069^\circ/jour$

Valeurs numériques en degrés le 1er janvier 1980 à 00 h 00 (UT) (voir aussi tables de la figure 36)

$$s(t) = (78.16 + 13.17639673t), \quad h(t) = (279.82 + 0.98564734t), \quad p(t) = (349.50 + .11140408t), \quad N'(t) := (208.1 + 0.05295392t), \quad p_1(t) = (282.6 + 0.000047069t)$$

la justification de leur valeur numérique a été évoquée plus haut.

L'application numérique de la méthode exposée ci-dessus s'effectue en utilisant les tableaux I et II fournis ci-après et, pour un port donné, les valeurs des constantes Z_0 , A_{ij} et G_{ij} .

TABLEAU I

Valeurs des paramètres astronomiques rapportés à l'instant origine :

1^{er} janvier 1980 à 00 h 00 (UT)

$$\begin{aligned}
 s &= 78,16^\circ + 13,17639673 T \\
 h &= 279,82^\circ + 0,98564734 T \\
 p &= 349,50^\circ + 0,11140408 T \\
 N' &= 208,10^\circ + 0,05295392 T \\
 P_1 &= 282,6^\circ + 0,000047069 T
 \end{aligned}$$

	Baptême de l'onde	Amplitude	Situation	J	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
Onde annuelle	S ₁	A_{S1}	G_{S1}	0	0	1	0	0	0	0
Ondes diurnes	K1	A_{K1}	G_{K1}	1	0	1	0	0	0	1
	O1	A_{O1}	G_{O1}	1	-2	1	0	0	0	-1
	Q1	A_{Q1}	G_{Q1}	1	-3	1	1	0	0	-1
	P1	$-\frac{1}{3}A_{K1}$	G_{K1}	1	0	-1	0	0	0	1
	o1 (correction nodale de O1)	$\frac{1}{5,3}A_{O1}$	G_{O1}	1	-2	1	0	-1	0	-1
	k1 (correction nodale de K1)	$\frac{1}{7,4}A_{K1}$	G_{K1}	1	0	1	0	1	0	1
Ondes semi-diurnes	M2	A_{M2}	G_{M2}	2	-2	2	0	0	0	0
	N2	A_{N2}	G_{N2}	2	-3	2	1	0	0	0
	S2	A_{S2}	G_{S2}	2	0	0	0	0	0	0
	2 N2	$\frac{1}{7,6}A_{N2}$	G_{N2}	2	-4	2	2	0	0	0
	μ2	$\frac{1}{6,3}A_{N2}$	G_{N2}	2	-4	4	0	0	0	0
	ν2	$\frac{1}{5,3}A_{N2}$	G_{N2}	2	-3	4	-1	0	0	0
	L2	$-\frac{1}{35}A_{M2}$	G_{M2}	2	-1	2	-1	0	0	0
	K2	$\frac{1}{3,7}A_{S2}$	G_{S2}	2	0	2	0	0	0	0
	T2	$\frac{1}{17}A_{S2}$	$G_{S2} - 283'$	2	0	-1	0	0	0	0
	m2 (correction nodale de M2)	$-\frac{1}{27}A_{M2}$	G_{M2}	2	-2	2	0	-1	0	0
k2 (correction nodale de K2)	$\frac{1}{12}A_{S2}$	G_{S2}	2	0	2	0	1	0	0	
Ondes quart-diurnes	MN4	A_{MN4}	G_{MN4}	4	-5	4	1	0	0	0
	M4	A_{M4}	G_{M4}	4	-4	4	0	0	0	0
	MS4	A_{MS4}	G_{MS4}	4	-2	2	0	0	0	0

FIGURE 36 – "TABLEAU 1" Valeur des longitude moyenne, des noeuds, des longitudes des périgées de la Lune et du Soleil, valeur des coefficients harmoniques, données de "la table des marées des grands ports du Monde" [42].

Calcul de la marée par la méthode de Doodson

Par exemple pour Saint-Malo, à partir du 01/08/2024 00 :00 (TU+1) heure d'hiver on trouve en appliquant la méthode que la hauteur est

$$\begin{aligned}
 & 6.71 + 3.68 * \cos(6926.042537616778 - 0.5058680493365497 * \text{heure}) + 1.432 * \cos(4.502949470145371 - 0.5235987755982989 * \text{heure}) + \\
 & 0.206 * \cos(6923.023118010827 - 1.0294668249348486 * \text{heure}) + 0.27299999999999996 * \cos(13850.70626512448 - 1.0117360986730994 * \text{heure}) + \\
 & 0.101 * \cos(17558.780439489972 - 1.0022349679026261 * \text{heure}) + 0.08423529411764706 * \cos(284.5777022867289 - 0.522881992625527 * \text{heure}) \\
 & - 0.10514285714285714 * \cos(3217.5843908158454 - 0.5153691801070229 * \text{heure}) - 0.13629629629629628 * \cos(6944.724570436238 - 0.5058295401592231 * \text{heure}) \\
 & + 0.13584905660377358 * \cos(10139.682484323117 - 0.4976384538452738 * \text{heure}) + 0.72 * \cos(10634.186525152347 - 0.4963669185660764 * \text{heure}) + \\
 & 0.11428571428571428 * \cos(13848.140631124048 - 0.48813732307480046 * \text{heure}) + 0.09473684210526315 * \cos(14342.64467195328 - 0.4868657877956031 * \text{heure}) - \\
 & 0.030000000000000002 * \cos(285.64235313044543 - 0.2610826048263776 * \text{heure}) + 0.088 * \cos(7215.175549251211 - 0.2433518785646284 * \text{heure}) + \\
 & 0.01660377358490566 * \cos(7233.857582070673 - 0.24331336938730183 * \text{heure}) + 0.023999999999999997 * \cos(10923.214817031661 - 0.23385074779415507 * \text{heure}) + \\
 & 0.054 * \cos(281.10449707526016 + 0.0007167829727718336 * \text{heure}) + 0.09 * \cos(284.3857160690095 + 0.2625161707719213 * \text{heure}) + \\
 & 0.01216216216216216 * \cos(303.06774888847036 + 0.2625546799492478 * \text{heure}) + 0.38702702702702696 * \cos(565.5251197293096 + 0.5250323415438426 * \text{heure}) + \\
 & 0.11933333333333333 * \cos(584.2071525487705 + 0.5250708507211692 * \text{heure})
 \end{aligned}$$

Comparer à <https://maree.info/52?d=20240415>.

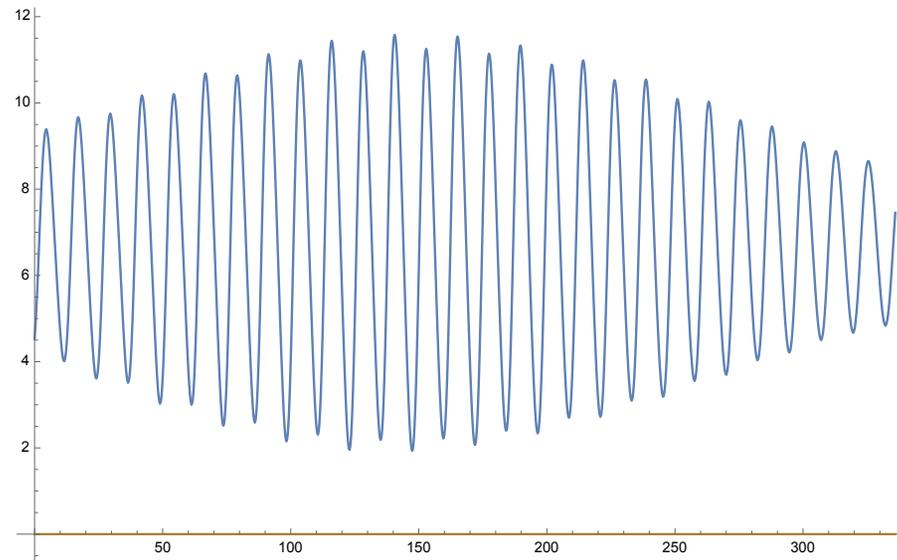


FIGURE 37 – Marée à Saint-Malo du 1 Août au 14/08/2024, calcul par la méthode harmonique (données issues de "la table des marées des grands ports du Monde" [42]).

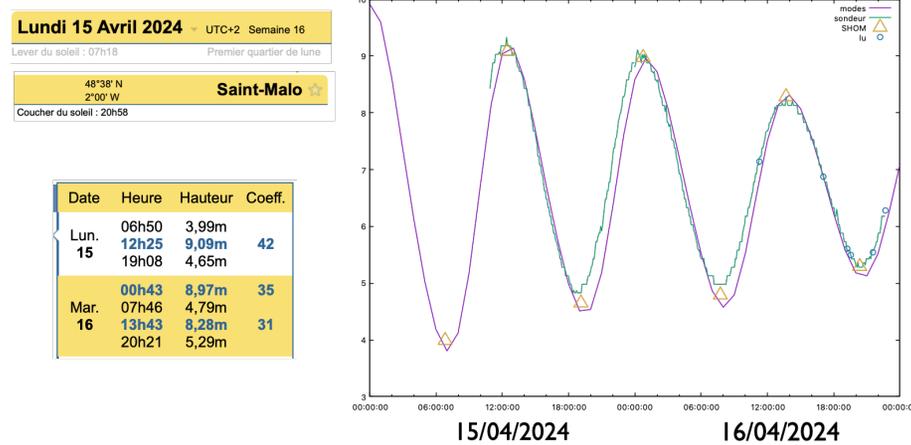


FIGURE 38 – Marée à Saint-Malo les 15 et 16 mars 2024, en vert mesures au sondeur toutes les 5 minutes, triangles rouges : prédiction du SHOM pour les hautes et basses mers dans l’annuaire des marées 2024, ronds bleu : indication visuelle fournie par l’affichage du port des Bas Sablons (hauteur du seuil + 2m), en violet, calcul par la méthode harmonique (données issues de ”la table des marées des grands ports du Monde” [42]).

Vives eaux, Mortes Eaux : Coefficient de Marée

Il est temps de parler du Coefficient de Marée. Le coefficient de marée est une création française, c'est un indicateur de la hauteur relative de la marée haute et basse. Il varie par définition de 20 à 120. Mortes eaux entre 20 et 70, moyenne 45 *neap tide*, valeur moyenne 70, vives eaux entre 70 et 120, moyenne 95 (*spring tide*).

Le "coefficient" est une approximation : marée semi diurne de Brest divisée par la valeur de marée de vives eau d' équinoxe admise égale à 6.42 Extrait de l'ouvrage du SHOM [42] "Table des marées des grands ports du Monde" ISBN 2 11 080386 X, §6.1 p. 10 :

"Le coefficient de la marée est, pour une pleine mer de Brest-référence, le quotient du marnage semi-diurne de la formule de Laplace par la valeur moyenne de cette quantité pour les marées de vive-eau d'équinoxe (21 mars, 21 septembre), admise égale à 6.42 m. C'est un nombre sans dimension exprimé en centième entre 20 et 120. Le tableau suivant indique, pour les côtes de France, la correspondance entre les coefficients de marée et les principales marées :

- coefficient 120 : marées extraordinaires de vive-eau d'équinoxe ;
- coefficient 95 : marées de vive-eau moyenne ;
- coefficient 70 : marées moyennes ;
- coefficient 45 : marées de morte-eau moyennes ;
- coefficient 20 : marées de morte-eau les plus faibles."

C'est donc un port fictif tel que $Z_0 = 0$, $AN_2 = 130$, $GN_2 = 123$, $AM_2 = 672$, $GM_2 = 142$, $AS_2 = 235$, $GS_2 = 182$

ainsi, on trouve pour n_j , nombre de jours depuis le 01/01/2022, la hauteur fictive

$$\begin{aligned}
 C(n_j) = & 23.5 \cos(3.1765 - 12.5664n_j) + 1.38235 \cos(267.029 - 12.5492n_j) - 1.92 \cos(3030.18 - 12.3689n_j) + 67.2 \cos(6523.61 - 12.1408n_j) - \\
 & - 2.48889 \cos(6541.42 - 12.1399n_j) + 2.45283 \cos(9550.98 - 11.9433n_j) + 13. \cos(10016.7 - 11.9128n_j) + 2.06349 \cos(13044.4 - 11.7153n_j) + \\
 & + 1.71053 \cos(13510.1 - 11.6848n_j) + 6.35135 \cos(12.6008n_j + 534.407) + 1.95833 \cos(12.6017n_j + 552.218)
 \end{aligned} \tag{17}$$

le coefficient est le max journalier (valeur de n_j fractionnaire) de cette fonction.

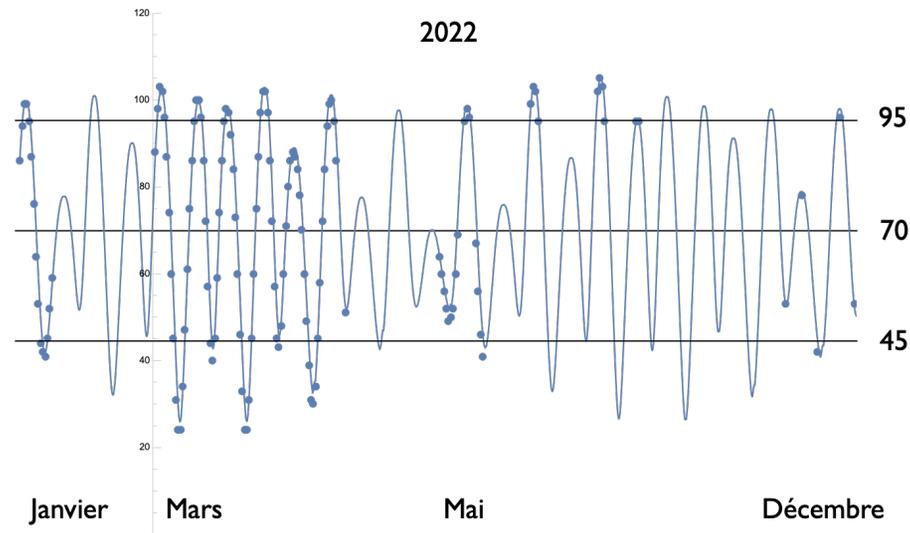


FIGURE 39 – Valeur du coefficient de marée toute l'année 2022, les points sont quelques valeurs issues (reportées point à point) de l'Annuaire des Marées (en fait le site <http://maree.info>), et les traits sont le calcul avec la méthode harmonique de Doodson.

8.11.4 En pratique

En pratique, de nos jours, le calcul du SHOM est fait et est accessible sur <https://maree.info>

8.11.5 Règle des douzièmes

La règle des douzièmes est une règle ancienne pratique qui permet, partant des données de pleine mer et de basse mer de calculer la hauteur heure par heure...

En fait, si on lit les tables de marée, on lit l'heure de basse mer h_{bm} , la hauteur associée Z_{bm} , puis l'heure de haute mer h_{hm} , la hauteur associée Z_{hm} , si on interpole un cosinus entre les deux, on a facilement pour toute heure h , la hauteur Z extrapolée :

$$Z(h) = Z_{bm} + (Z_{hm} - Z_{bm}) \frac{1 - \cos(\pi \frac{h - h_{bm}}{h_{hm} - h_{bm}})}{2}$$

partant des heures de basse mer et de pleine mer, on fait la différence qui correspond au temps de montée de la marée. On calcule "l'heure marée", qui est 1/6ème du temps de montée de la marée.

On calcule ensuite la variation de hauteur entre la basse et la pleine mer. On divise par 12.

Pendant la première heure marée la mer monte de 1/12ème
 Pendant la deuxième heure marée la mer monte de 2/12ème
 Pendant la troisième heure marée la mer monte de 3/12ème
 Pendant la quatrième heure marée la mer monte de 3/12ème
 Pendant la cinquième heure marée la mer monte de 2/12ème
 Pendant la dernière heure marée la mer monte de 1/12ème

Exemple sur la courbe ci contre, comparaison entre $(1 - \cos(x/2))/2$ tracé entre 0 et 2π et la même courbe avec la règle des 12 ème. L'accord est fort correct.

8.11.6 Modèles analogiques

Calculateur analogique de Marée

Thomson pose les principes d'un analyseur mécanique pour mesurer les modes en 1881. Une machine mécanique le "Tide Predictor" est construite et vendue par l'entreprise Kelvin & Bottomley (voir photo 35 au centre). Le Tide Predictor n°3 acquis par le SHOM en 1900 est dans les réserves du musée des Arts & Métiers [44], il est sur la photo 35 à droite.

Prenons le cas à deux ondes, on a un fil relié fixé d'un côté et l'autre côté est accroché à un styler qui va faire une trace sur un papier. On a deux poulies le principe est de faire tourner une manivelle, transformant une rotation en mouvement vers le haut. Ce déplacement déplace une poulie qui enroule un fil.

Simulateur analogique de Marée

Un simulateur analogique de marée a été construit au LEGI à Grenoble

fig :legi A tide analog experiment is presented in LEGI (link to a photo to come). It was used to study a huge project of tide mill (moulin à marée, extending l'usine marémotrice de la Rance).

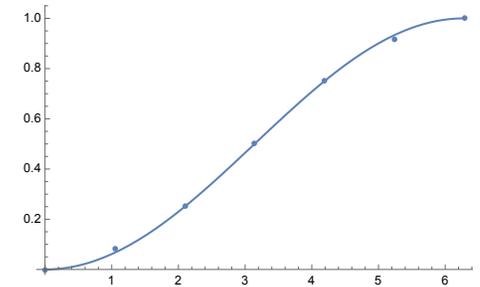


FIGURE 40 – comparaison entre $(1 - \cos(x/2))/2$ tracé entre 0 et 2π et la même courbe avec la règle des 12 ème. L'accord est très correct



FIGURE 41 –

8.11.7 Marée en baie de Seine

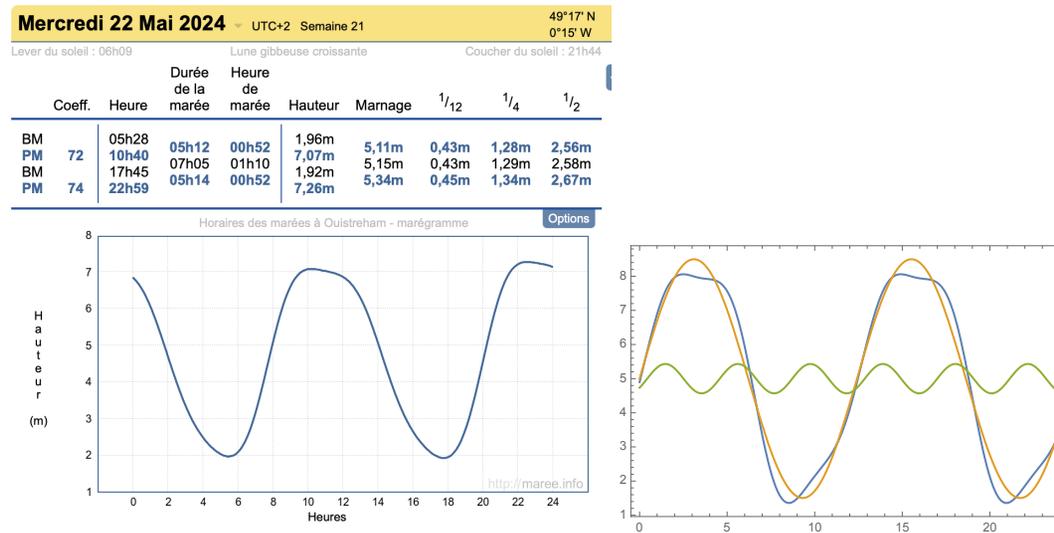


FIGURE 42 – Marée à Ouistreham sur le site mareeinfo ; on remarque la "tenue du plein". A droite 3 modes

Les ports de la baie de Seine présentent la particularité de la "tenue du plein". La haute mer reste plus longtemps qu'ailleurs. C'est ce qui a fait du port du Havre un grand port maritime historique dès le règne de François Ier⁵ On comprend ce phénomène en observant sur la figure 34 que la composante 1/4 diurne est importante. Cette composante est vraisemblablement liée à la forme de la Manche entre le Cotentin et la Baie de Seine. Ce bassin provoque une résonance qui s'ajoute à l'onde progressive de marée.

Sur la figure on trace en bleu $5 + 3.497 \sin(0.505868t) + .303 \sin(2 * 0.505868t + 241.327) + 0.43 \sin[3 * 0.505868t + 125)$, en rouge $5 + 3.497 \sin(0.505868t) + .303 \sin(2 * 0.505868t + 241.327)$ et en vert $5 + 0.43 \sin[3 * 0.505868t + 125)$ (valeurs inspirées de Bouteloup [6]). On voit l'aplatissement de la marée haute

5. Bouasse Houle Seiches et Marées (1924) La tenue du plein au Havre et à l'embouchure de l'Orne est vraisemblablement due à l'importance de la marée quart-diurne, jointe à un décalage convenable. Les marins du xvII siècle sont inépuisables sur les avantages que cette tenue confère au Havre. Ils disent qu'une flotte de cinquante navires peut en sortir en une seule marée et y rentrer quelques heures après, si le vent ou l'ennemi l'y obligent ; tandis qu'à Dieppe, la marée baissant aussitôt son plein, les navires en rade observent le signal des pilotes et filent leur câble par le bout pour entrer tout de suite, dans la crainte qu'un retard ne les empêche de réussir à cause de l'intensité du jusant.

8.11.8 Onde de marée

Nous venons de parler de la marée et nous avons même montré comment la calculer en pratique pour la navigation. De l'analyse de séries temporelles, on a extrait des modes pour reconstruire à tout instant la hauteur d'eau. Revenons à la modélisation, écrivons les équations pour calculer le champ complet d'écoulement de l'eau, pas seulement la hauteur en différents ports, mais aussi le champ des courants. On se doute que les équations de Saint-Venant seront pertinentes car elles sont valables pour des couches minces. En effet la profondeur de la Manche (par exemple) est en moyenne de 54m (max 170m), sa longueur est d'environ 500 km. La hauteur de marée va jusqu'à 15m. On voit que les perturbations sont quand même importantes, les termes non linéaires seront donc importants, la forme de la topographie est aussi importante. On se doute qu'il y a aussi du frottement...

Nous allons ici simplifier les équations complètes pour voir les phénomènes au premier ordre.

Jusqu'à présent les termes de dérivée en temps et en espace étaient de même ordre dans la dérivée totale (Strouhal unitaire). Dans le cas de la marée, il s'agit d'un forçage extérieur avec une échelle de temps imposée. On adimensionne le temps avec la période imposée par l'alternance des marées, on obtient donc en continuant de négliger les termes non linéaires, et le frottement au fond ainsi que la pente moyenne (en toute première approximation le fond est quasiplat mais varie lentement en espace)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial t} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

donc, comme la variation de hauteur de vague est faible, l'équation de

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (g(h_0(x)) \frac{\partial \eta}{\partial x})$$

c'est l'équation de type *tidal wave*, onde de marée (aussi *long gravity wave*.)

Il faut la résoudre connaissant le fond, en fait, $h_0(x)$ désigne la hauteur d'eau compte tenu de la forme du fond f (la bathygraphie), En conditions aux limites, on se donne la marée océanique au loin provoquée par la lune et le soleil, donc une superposition de ces deux modes. Rappel sur les marées : il y en a deux par jour, liées au jour lunaire 24h50min28s plus la contribution du soleil toutes les 12h00 qui donnent deux marées.

- La baie de Fundy, ou "baie des Français" (Landau p 40, ENS StCloud 80, Ellipses, Walker 4.55)

Cet exemple est peu général, mais se fait à la main, il traite de l'endroit où les marées sont les plus grandes au monde (avant la Manche). Cette baie est au Canada. Il s'agit en première approximation d'une onde linéaire simple en fond peu profond, la forme de la baie est assez rectangulaire, on l'approxime à un rectangle et on fait du 1D. On se donne (et c'est une approximation, la hauteur à l'entrée de la baie $\eta_0 e^{-i\omega t}$, donc un seul mode en première approximation). La marée importante s'explique par le fait que l'on a une onde stationnaire dans la cavité rectangulaire de la baie :

$$\eta = \eta_0 \frac{\cos(kx - L)}{\cos kL} e^{-i\omega t} \text{ avec } k = \omega / \sqrt{hg},$$

la marée est extrême au fond de la baie, si $k = (2n+1)\pi/2$ on a résonance. A.N. $\eta_0=2.2\text{m}$, période 12h25 min, profondeur de la baie $h = 73\text{m}$, donc $c_0 = \sqrt{hg} = 27\text{m/s}$, on a $k = 5.26 \cdot 10^{-6}\text{m}$, on trouve $\eta(L, t) = 14.4\text{m}$.

Ce cas correspond à une résonance due à la forme rectangulaire de la baie, dans le cas de la marée à Saint Malo, à une éventuelle résonance due au fait que l'on se trouve dans une cavité coincée au creux de la Bretagne et de la Normandie, l'effet s'additionne à celui de la force de Coriolis. Dans le cas la Marée en Normandie, cela s'appelle "la tenue du plein".

- A titre d'exemple de résolution des équations sous un forçage périodique on peut traiter ici le cas de faible profondeur linéarisé en 2D et en tenant compte de la force de Coriolis, avec le paramètre de Coriolis $f_c = 2\omega \sin \lambda$. On va résoudre dans le cas de l'écoulement dans un canal infini en x et borné en largeur y (largeur W , ce qui peut être le modèle de l'écoulement dans la Manche qui est longue et assez rectangulaire).

Nous allons voir "l'Amphidromie de Kelvin" : on fait apparaître par la résolution les points de hauteur de marée nulle, ce sont les points amphidromiques cf Hervouet [22]. Ce cas est en fait générique. On se donne un canal de profondeur h_0 et de largeur W , les équations linéarisées autour de h_0 et du repos, en négligeant les frottements,



FIGURE 43 – La baie de Fundy au Canada est connue pour avoir les marées les plus hautes du monde.

mais en mettant la force de Coriolis :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_c v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + f_c u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

cherchons des solutions de la forme (σ pulsation) :

$$F = F(x, y) e^{i\sigma t},$$

on obtient la solution pour le champ de vitesses

$$u = \frac{-g}{f_c^2 - \sigma^2} \left(i\sigma \frac{\partial \eta}{\partial x} + f_c \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad \& \quad v = \frac{g}{f_c^2 - \sigma^2} \left(-f_c \frac{\partial \eta}{\partial x} + i\sigma \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

soit dans l'équation de continuité, ce qui va donner la relation de dispersion $\sigma(k)$

$$\frac{\sigma^2 - f_c^2}{gh_0} \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + i\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

On appelle onde de Kelvin la solution particulière, se propageant ici vers la droite (dans le cas d'une largeur infinie *a priori*, mais en fait comme $v = 0$, il y a glissement automatique sur la paroi supérieure) :

$$u = \sqrt{\frac{g}{h_0}} \eta, \quad v = 0, \quad \eta = \eta_0 e^{-\frac{f_c y}{\sqrt{gh_0}}} e^{i\sigma \left(t - \frac{x}{\sqrt{gh_0}} \right)}.$$

L'onde se propage le long d'une des frontières, (vers le pôle pour une frontière est, vers l'équateur pour une frontière ouest). Le maximum est sur la frontière. L'amplitude varie de manière exponentielle d'un bord à l'autre du canal. La marée est plus haute d'un côté que de l'autre. L'onde décroît vers le large avec une longueur caractéristique $\sqrt{gh_0}/f_c$ qui s'appelle rayon de Rossby. Les lignes d'égale amplitude sont parallèles aux bords du canal et les lignes cotidales ($x = \text{constante}$) sont normales à l'axe du canal.

Les ondes de marées se réfléchissant et se réfractant sur les côtes, superposons deux ondes ainsi calculées se déplaçant en sens inverse dans le canal. La surélévation résultante s'écrit alors :

$$\eta = e^{i\sigma t} \left[\eta_1 e^{\frac{-i\sigma x - f_c y}{\sqrt{gh_0}}} + \eta_2 e^{\frac{i\sigma x + f_c y}{\sqrt{gh_0}}} \right].$$

soit $a = \eta_2/\eta_1$ qui caractérise le rapport des amplitudes des deux ondes. C'est vrai pour toute largeur de canal car $v = 0$. Sur chaque bord, l'onde se propage en sens inverse. L'amplitude de la marée :

$$|\eta| = \sqrt{\left(1 + a^2 e^{\frac{2f_c y}{\sqrt{gh_0}}} \cos(2\sigma x / \sqrt{gh_0}) \right)^2 + a^2 e^{\frac{4f_c y}{\sqrt{gh_0}}} \sin(2\sigma x / \sqrt{gh_0})^2}$$

FIGURE 44 – Onde de Kelvin se propageant dans un canal vers la droite [click to launch the movie, Adobe Reader required].

FIGURE 45 – 1 point amphidromique de marée nulle [click to launch the movie, Adobe Reader required].

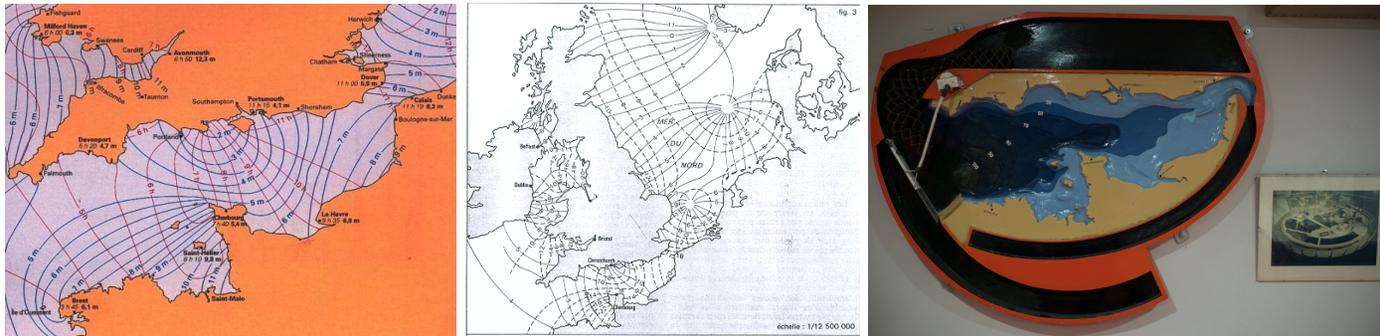


FIGURE 46 – La marée est plus élevée en France de par la force de Coriolis, document SHOM. A droite points Amphidromiques, image issue de <http://hmf.enseeiht.fr/travaux/CD0001/travaux/optsee/hym/12/titre.html>, document SHOM. Plateforme "Coriolis" : modèle expérimental (~ 1,5 m de diamètre) de la Manche utilisé sur un plateau en rotation, noter le batteur à gauche et la Mer du Nord transformée en un canal.

Cette expression nous montre aussi qu'il existe des points à marnage nul (d'amplitude nulle), ils sont situés sur la droite $y = \sqrt{gh_0} \ln(1/a)/(2f_c)$, séparés de $x = \sqrt{gh_0}(2k + 1)\pi/(2\sigma)$,

En ces points où la marée est toujours nulle, la mer est pleine (ou basse) à chaque instant ; toutes les lignes cotidales passent par ces points autour desquels elles paraissent tourner : ce sont les points amphidromiques.

- Exemple pratique des marées :

Dans le cas de la Manche considérée comme un canal, on observe ces ondes de Kelvin créées par l'ondes de marée. Parce que les ondes sont défléchies vers la droite (dans l'hémisphère nord), des ondes de Kelvin sont plus grandes en amplitude le long de la côte française par rapport à la côte anglaise.

Par exemple, la figure suivante 8.11.8 représente les courants de marée dans la Manche, le calcul complet présenté tient compte de la forme du fond et du coefficient de frottement. L'équation modèle présentée dans cette sous section est le premier ordre de ce calcul. La période de la marée est de 12 heures 25 minutes 14 secondes (moitié de la durée du jour lunaire moyen). Les vitesses de courant sont de l'ordre de 3 noeuds. La profondeur dans la Manche est de 20 à 30m. A l'origine, les courants ont été mesurés par des bouées. Et les hauteurs par des marégraphes. La simulation numérique permet de tracer des champs continus utiles aux navigateurs.

Un exemple de mise en oeuvre est sur http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/maree_bretagne.c, on y utilise les équations de Saint-Venant complètes avec Coriolis et frottement au fond dans la bathymétrie de la Manche avec seulement l'onde M2. Sur la figure 47 on a le champ d'hauteur et les hauteurs calculées par Basilisk et l'onde harmonique M2

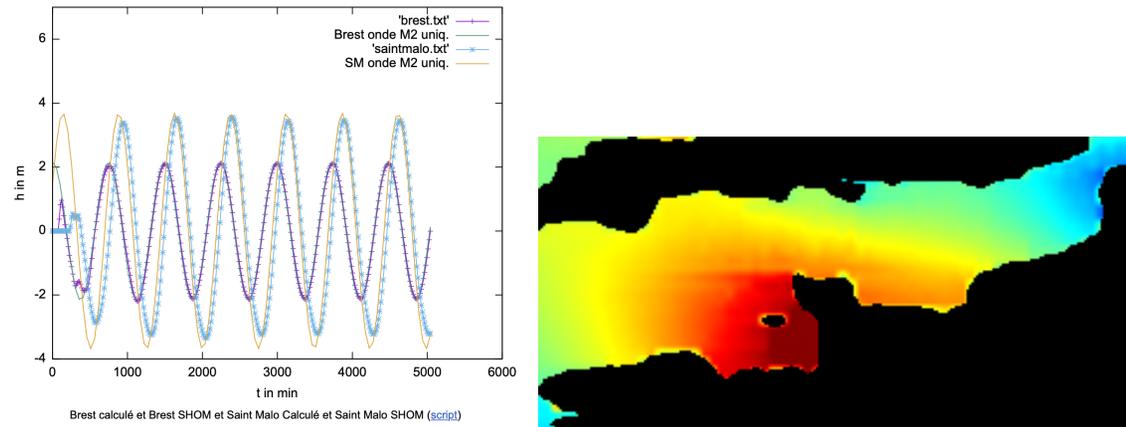


FIGURE 47 – La marée calculée par Basiliisk. On se donne uniquement l'onde M2 dans ce modèle simplifié

FIGURE 48 – Calcul "TELEMAC" d'EDF des courants de marées [click to launch the movie, Adobe Reader required]. voir aussi https://www.paralia.fr/jngcgc/12_04_desmare.pdf

8.11.9 ondes dans les estuaires

http://wikydro.developpement-durable.gouv.fr/index.php/ANSWER:_mod\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent18e\egroup\spacefactor\accent@spacefactorles_analytiques_de_propagation_d%27ondes_dans_les_estuaires

8.11.10

[1] calcul de marée complet avec basilisk (tides.c) <http://basilisk.dalembert.upmc.fr/src/examples/global-tides.c>.

Le solveur multicouches Euler-Lagrange est utilisé pour calculer la marée sur la terre entière avec le forçage de la Terre et de la Lune.

Quatrième partie

Le Fluide : Equations de Saint-Venant à frottement faible, échelle assez courte, quelques exemples de solutions

Nous avons vu que les équations de Saint-Venant contenaient un terme moteur lié à la pente α . Dans le cas des fleuves, ce terme est équilibré par le terme de frottement de Chézy. Cette description équilibrant pente et frottement est pertinente pour les problèmes caractérisés par une variation lente longitudinale. Dans cette partie, on étudie plutôt les écoulements à variation rapide (mais pas trop pour rester dans l'hypothèse couche mince de Saint-Venant) qui sont caractérisés par un frottement faible dans lequel on peut négliger la pente (voir §8.2 pour la discussion générale). On s'intéresse en plus à des écoulements établis, stationnaires en temps dans une première partie pour introduire la notion de "charge". On parle d'"écoulement graduellement varié". On examine ensuite les cas instationnaires pour introduire "la rupture de barrage" et le "ressaut".

9 Application en stationnaire, couche d'eau au dessus d'un obstacle

9.1 Expression du fond explicite

Examinons le problème correspondant à l'écoulement au dessus d'une bosse f donnée, avec une vitesse u_0 au loin, cherchons la modification du niveau d'eau associée. Les équations SV en stationnaire en négligeant les frottements sont (les 0, rappellent les simplifications) :

$$0 + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad 0 + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + 0 + 0 + 0$$

la première montre que le débit est conservé $hu = h_0 u_0$, et la deuxième s'écrit $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2} + g\eta) = 0$, il s'agit en fait de la loi de Bernoulli. Il faut noter que c'est bien une conséquence des hypothèses que nous avons posées. Les ouvrages de base d'hydrologie partent de la notion de Bernoulli pour établir les équations. La conservation s'écrit :

$$\left(\frac{u^2}{2} + g\eta\right) = \left(\frac{u_0^2}{2} + g\eta_0\right). \quad \text{Réécrivons la : } \frac{\eta}{h_0} = \frac{\eta_0}{h_0} + \frac{u_0^2}{2gh_0} \left(1 - \frac{u^2}{u_0^2}\right)$$

or comme $\eta = h + f$ et que $\eta_0 = h_0$ (la perturbation de la surface libre est nulle)

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \frac{f}{h_0} + \frac{u_0^2}{2gh_0} \left(1 - \frac{u^2}{u_0^2}\right) \quad \text{ou encore} \quad \boxed{h + f + \frac{u^2}{2g} = h_0 + \frac{u_0^2}{2g}} \quad \text{ou encore} \quad H_s + f = H_0.$$

Nous avons posé $H_s = h + \frac{u^2}{2g}$ qui est classiquement appelée "la charge spécifique" en hydrodynamique.

Comme $h/h_0 = u_0/u$, on écrit une relation implicite entre f et u . Connaissant la vitesse u et $F^2 = \frac{u^2}{gh_0}$ on trouve la topographie

$$\frac{f}{h_0} = 1 + \frac{F^2}{2} \left(1 - \frac{u^2}{u_0^2}\right) - \frac{u_0}{u}$$

Cette relation est utilisée en pratique pour mesurer la topographie en fonction de la vitesse de surface mesurée, mais elle est délicate car il ne faut pas que la vitesse soit trop faible.

9.2 Charge de l'écoulement (*Head en anglais*)

Réinsistons sur la relation encadrée ci dessus qui traduit que $h + f + \frac{u^2}{2g}$ est constant le long de l'écoulement. On définit classiquement la quantité H_s appelée "charge spécifique", et

$$H_s = h + \frac{u^2}{2g} \text{ donc } H_s + f \text{ la "charge" totale est conservée le long de l'écoulement.}$$

Bien entendu c'est tout simplement l'écriture de la relation de Bernoulli.

Quand il y a de la friction, on dit qu'il y a "perte de charge".

9.3 Analyse de la charge spécifique

Etudions un écoulement stationnaire uniforme (à débit constant donné) dans un canal droit (infiniment large, on pourrait réintroduire sa largeur), la définition de H_s permet certaines interprétations pratiques. Par définition de H_s et du débit Q donné :

$$H_s = h + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gh^2}, \text{ on a } dH_s/dh = 1 - \frac{Q^2}{gh^3},$$

On voit que pour $h \rightarrow \infty$ et pour $h \rightarrow 0$ on a $H_s \rightarrow \infty$. Plus généralement, pour deux hauteurs différentes, nous avons le même H_s , mais il existe une valeur minimale, appelée valeur critique h_c ; telle que H_s est minimale. On a $dH_s/dh = 0$ telle que $h_c = (\frac{Q^2}{g})^{1/3}$ et $H_{sc} = \frac{3}{2}h_c = \frac{3}{2}(\frac{Q^2}{g})^{1/3}$

Le nombre de Froude $F = \frac{u}{\sqrt{gh}}$ c'est aussi $\frac{Q}{\sqrt{g}h^{3/2}}$. On a alors

$$F = \frac{Q}{\sqrt{g}h^{3/2}} \text{ et } \frac{dH_s}{dh} = 1 - F^2.$$

Le nombre F est tel que en $h = h_c$ on a $F_c = \frac{Q}{\sqrt{g}(h_c)^{3/2}} = (\frac{Q^2}{g(h_c)^3})^{1/2} = 1$. Le froude est unité à la valeur critique. Pour une valeur de la charge spécifique, il existe donc deux valeurs possibles pour la hauteur, une valeur petite à nombre de Froude supérieur à l'unité et une valeur plus haute à Froude inférieur à l'unité.

$$H_s = h + \frac{u^2}{2g} \text{ s'écrit aussi puisque } F = \left(\frac{h_c}{h}\right)^{3/2} \text{ sous la forme } \frac{H_s}{h_c} = \frac{h}{h_c} \left(1 + \frac{F^2}{2}\right).$$

En pratique, on appelle "écoulements graduellement variés" des écoulements sur une échelle suffisamment longue pour que l'on soit toujours à l'équilibre. On peut alors analyser l'écoulement avec la notion de charge.

9.4 Passage sub/trans/super critique

Réexprimons l'expression complète de la quantité de mouvement en utilisant f et h au lieu de η :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

en éliminant par la conservation de la masse la dérivée de la hauteur

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{h \partial u}{u \partial x} \text{ et ainsi } g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{h \partial u}{u \partial x}, \text{ et comme } u \frac{\partial u}{\partial x} = u^2 \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ce qui donne

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} (u^2 - gh) + g \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

s'écrit aussi à l'aide du Froude local $F(x) = u^2(x)/(gh(x))$

$$\frac{h}{u} \frac{\partial u}{\partial x} (F^2(x) - 1) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

- Si $F^2(x) > 1$ les variations de f et de u sont de sens opposé, une augmentation du fond se traduit par une décélération.
- Si $F^2(x) < 1$ les variations de f et de u sont de même sens, une augmentation du fond se traduit par une accélération. Ce résultat généralise le résultat linéaire précédent.
- Si $F^2(x) \neq 1$, la vitesse est extrémale là où la bosse atteint son sommet.
- Si $F^2(x) = 1$ au sommet, la vitesse continue d'augmenter, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ne change pas de signe après le sommet, mais $F^2(x) - 1$ a changé de signe, donc la bosse peut décroître $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$.

Le passage sub critique supercritique peut se produire exactement au sommet d'une bosse. On a alors la figure à droite ou la figure . La vitesse est accélérée, la surface se creuse. Au col l'écoulement est critique $F = 1$, après le col il est supercritique. La surface ne remonte pas.

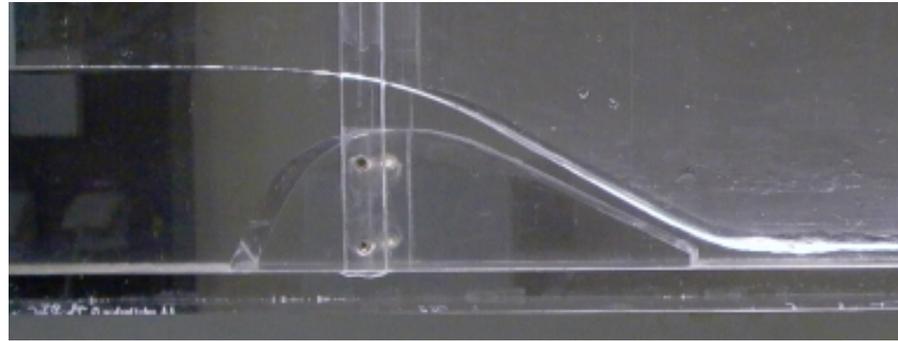


FIGURE 49 – passage de $F < 1$ à $F > 1$ au col $F = 1$, cuve de l'ENSTA photo PYL

l'interprétation physique de ces calculs est liée au fait que des ondes (des vagues) se déplacent sur la surface et transmettent ainsi des informations à l'écoulement en amont et en aval. La vitesse des ondes dépend de la hauteur d'eau.

Dans le cas subcritique, la vitesse du courant est inférieure à la vitesse des ondes ($u < c_0, F < 1$), les ondes peuvent remonter le courant et "prévenir" l'eau en amont qu'il va y avoir bientôt une bosse et qu'il faut adapter la vitesse : accélérer pour conserver le débit. Par Bernoulli, cette accélération provoque une dépression, le niveau de l'eau baisse au dessus de la bosse.

Dans le cas supercritique, la vitesse du courant est supérieure à la vitesse des ondes ($U > c_0, F > 1$), les ondes ne peuvent plus remonter le courant et ne "préviennent" plus l'eau en amont qu'il va y avoir bientôt une bosse et qu'il faut adapter la vitesse : "surprise" par la bosse, l'eau s'accumule devant elle et est brusquement freinée. Par la loi de Bernoulli, cette décélération provoque une surpression, le niveau de l'eau augmente au dessus de la bosse.

Le cas subtil est celui subcritique tel que l'accélération au niveau du sommet est telle qu'elle permet à l'écoulement de devenir supercritique.

Bien entendu, cette relation est comparable à la relation dans les tuyères, avec le nombre de Mach.

9.5 Expressions linéarisées

Si les perturbations du fond sont faibles $f = \varepsilon \bar{f} h_0$ avec $\varepsilon \ll 1$, on peut linéariser cette expression, $u = u_0(1 + \varepsilon \bar{u}_1 + \dots)$, $\eta = h_0(1 + \varepsilon \bar{\eta}_1 + \dots)$

Si on part de $\frac{f}{h_0} = 1 + \frac{F^2}{2}(1 - \frac{u^2}{u_0^2}) - \frac{u_0}{u}$ au premier ordre

$$\bar{f} - F^2\bar{u}_1 + \bar{u}_1 = 0, \text{ donc } \bar{u}_1 = \frac{\bar{f}}{1 - F^2}.$$

Ou, si on repasse en valeur dimensionnée, mais sans oublier que la perturbation du fond est faible :

$$u = u_0(1 + \frac{(f/h_0)}{1 - F^2}).$$

Bernoulli sans dimension ($F^2\frac{(u/u_0)^2}{2} + \eta/h_0$) = ($F^2\frac{1}{2} + 1$), linéarisé devient $F^2\bar{u}_1 + \eta_1 = 0$, on peut ainsi exprimer la déviation relative $\eta_1 = \frac{F^2\bar{f}}{1 - F^2}$ position de la surface libre

$$\eta = h_0 + \frac{F^2 f}{F^2 - 1}.$$

ou de la hauteur d'eau :

$$h = h_0 + \frac{F^2 f}{F^2 - 1} - f = h_0 + \frac{f}{F^2 - 1}.$$

Suivant le régime, la réponse de la hauteur d'eau (supercritique) sera une élévation ou un creusement (subcritique).

Si on part de $\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x}(F^2(x) - 1) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$, on retrouve bien sûr les mêmes résultats.

9.6 Appilcations

Exprimons l'expression de la déviation de la surface libre en fonction de la forme de la topographie et la varaition de vitesse, respectivement :

$$\frac{F^2 f}{F^2 - 1} \quad \text{resp} \quad u_0 \frac{f}{h_0(1 - F^2)}.$$

Pour un régime subcritique, $F < 1$, on constate que la surface libre de l'eau est creusée et que le courant est accélérée. Inversement, pour un écoulement supercritique la surface libre est déviée vers le haut et le fluide est ralenti. La figure 50 montre à gauche un écoulement subcritique et la figure 51 montre un écoulement supercritique.

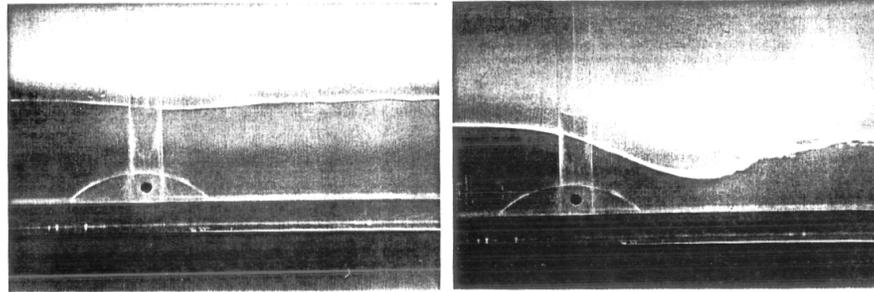


FIGURE 50 – A gauche $F < 1$ la surface libre de l'eau est creusée. à Droite $F < 1$ à $F > 1$ au col, puis ressaut, Photo issue du livre de Hulin Guyon Petit [20]

De exemples de résolution numérique *Basilisk* à différents Froude pour l'écoulement sur une bosse sont dans http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bump_trans.c



FIGURE 51 – Ecoulement supercritique $F > 1$, la surface libre est déviée vers le haut et le fluide est ralenti. Cuve de l'ENSTA Palaiseau à gauche, cuve Sorbonne-U à droite, photos PYL

9.7 Application du concept de Charge de l'écoulement

9.8 Courbes de Remous

Il s'agit d'essayer d'écrire une équation différentielle du premier ordre dont l'intégration en x donne la forme de la surface libre connaissant le fond. Pour ce faire, reprenons l'expression avec frottement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\tau_0}{\rho h}, \text{ qui donne } \frac{h}{u} \frac{\partial u}{\partial x} (F^2(x) - 1) + \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\tau_0}{\rho g h}$$

Comme $\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{h \partial u}{u \partial x}$ et $Q = uh$, elle s'écrit aussi, comme on est en stationnaire

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{1}{Q^2(x)/(gh(x)^3) - 1} \left(\frac{df(x)}{dx} + \frac{\tau_0}{gh} \right).$$

Cela permet de calculer la hauteur par intégration. Remarquons que dans le cas où le fond est faible, la vitesse varie peu $Q^2(x)/(gh(x)^3)$ est à peu près constant c'est F^2 . et on peut intégrer $h = h_0 + \frac{f}{F^2 - 1}$, on retrouve bien la solution linéarisée.

– Reprenons dans le cas non linéaire

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{1}{Q^2(x)/(gh(x)^3) - 1} \left(\frac{df(x)}{dx} + \frac{\tau_0}{gh} \right)$$

On se souvient que l'on a introduit la notion de "pente de frottement" $\tau_0 = \rho g h S_f$ avec S_f la friction sans dimension (équivalente à une pente, *Slope*), c'est une notation classique des hydrologues. La pente de l'écoulement $-\frac{df(x)}{dx} = S$ On écrit le frottement en fonction de la vitesse moyenne u et du débit Q .

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{S_f - S}{Q^2(x)/(gh(x)^3) - 1}$$

par exemple le frottement simple c_f (appelé coefficient de Fanning) $S_f = c_f \frac{Q|Q|}{2gh^3}$ ou Gauklert Manning Strikler $S_f = n^2 \frac{u|u|}{h^{4/3}}$.

On arrive ainsi à calculer la forme de la surface libre ... C'est ce que l'on appelle les courbes de remous *backwater*

10 Caractéristiques et chocs

10.1 Encore et encore ∂ 'Alembert ? (né en 1717)

Reprenons le système de base que nous allons linéariser pour en obtenir un système simple (menant à l'équation des ondes) introductif au cas non linéaire. Cherchons les invariants de l'équation linéaire pour $u(x, t)$ et $h(x, t)$.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

linéarisons la vitesse et la hauteur autour de l'état de base $(u, h) = (0, h_0)$, donc $u = 0 + \varepsilon u_1 + \dots$ et $h = h_0 + \varepsilon h_1 + \dots$ etc bien entendu on pose $c_0 = \sqrt{gh_0}$, on a donc au premier ordre

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + h_0 \frac{\partial(u_1)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial u_1}{\partial t} = -g \frac{\partial h_1}{\partial x} \text{ on ré arrange en } \frac{\partial}{\partial t} [c_0 \frac{h_1}{h_0}] + c_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial u_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} [c_0 \frac{h_1}{h_0}] = 0$$

on peut les additionner et les soustraire

$$\frac{\partial}{\partial t} [u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0}] + c_0 \frac{\partial}{\partial x} [u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0}] = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} [u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0}] - c_0 \frac{\partial}{\partial x} [u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0}] = 0$$

On rappelle qu'en posant $\xi = x - c_0 t$, et $\zeta = x + c_0 t$, on voit que comme

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} \text{ et donc } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = c_0 (-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta})$$

ce qui donne pour $\partial_t \pm c_0 \partial_x$ les expressions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} = 2c_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \text{ puis } \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} = -2c_0 \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [u_1 \pm c_0 \frac{h_1}{h_0}] \pm c_0 \frac{\partial}{\partial x} [u_1 \pm c_0 \frac{h_1}{h_0}] = 0 \text{ deviennent } 2c_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} [u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0}] = 0 \text{ et } 2c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} [u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0}] = 0$$

- la première équation porte sur $[u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0}]$ qui ne varie pas en $\zeta = x + c_0 t$, donc une fonction $\xi = x - c_0 t$ donc manifestement (le coefficient $\frac{2c_0}{h_0}$ est introduit pour simplifier) :

$$[u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0}] = \frac{2c_0}{h_0} f(x - c_0 t) \text{ constant le long de } \frac{dx}{dt} = c_0$$

- la seconde équation porte sur $[u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0}]$ qui est indépendante de ξ , c'est une fonction de ζ on écrit de même :

$$[u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0}] = \frac{-2c_0}{h_0} g(x + c_0 t) \text{ constant le long de } \frac{dx}{dt} = -c_0$$

En recombinaut, on a

$$h_1(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \text{ et } u_1(x, t) = \frac{c_0}{h_0} (f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t))$$

le cas linéarisé est très simple et reconduit à d'Alembert, on retrouve ainsi les deux solutions en $x \pm c_0 t$.

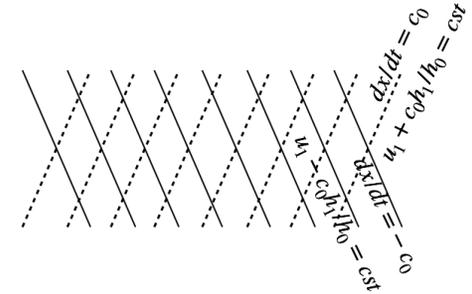


FIGURE 52 – Caractéristiques, ici des droites. Le long $dx/dt = c_0$ on a $u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0}$ constant, Le long $dx/dt = -c_0$ on a $u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0}$ constant.

- Par exemple, si une onde se propage sur la droite exclusivement, c'est que g est identiquement nul, $u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0} = 0$. Il ne reste que $u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0} = \frac{2c_0}{h_0} f(x - c_0 t)$ donc que

$$u_1 = c_0 \frac{h_1}{h_0}, \text{ ou } u_1 = c_0 f(x - c_0 t), \text{ et } h_1 = h_0 f(x - c_0 t).$$

- Si au temps $t = 0$, on se donne $u_1 = U(x)$ et $h_1 = H(x)$, on peut résoudre à tout temps car on en déduit

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{h_0 U}{c_0} + H \right) \text{ et } g = \frac{1}{2} \left(\frac{-h_0 U}{c_0} + H \right).$$

Nous allons reprendre ce calcul linéarisé en non linéaire sur les équations non linéaires. Nous allons le faire de deux manières et montrer que ce résultat est plus général. Mais la compréhension de ce cas linéarisé est fondamentale.

10.2 Invariants de Riemann avec les matrices

La première méthode est de reprendre le système complet non linéaire. Les équations de Saint-Venant en (x, t) et u, h sans frottement sont

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0, \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

est de la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \text{ ou } \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

avec $U = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$ et $F(U) = \begin{pmatrix} uh \\ \frac{u^2}{2} + gh \end{pmatrix}$ et $A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}$. La matrice A est diagonalisable, ses valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gh}$, soit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u - \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & u + \sqrt{gh} \end{pmatrix},$$

ses vecteurs propres $V_{i=1,2}$ tels que : $A \cdot V_i = \lambda_i V_i$ et $V = R^{-1} \cdot U$, où la matrice de changement de base R est telle que l'on a $R = \begin{pmatrix} -\sqrt{h/g} & \sqrt{h/g} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que

$R^{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{g/h}/2 & 1/2 \\ \sqrt{g/h}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $R \cdot R^{-1} = I$. On a $R \cdot \Lambda \cdot R^{-1} = A$ et $A \cdot R = R \cdot \Lambda$ ainsi que $R^{-1} \cdot A = \Lambda \cdot R^{-1}$. Dans le cas d'une équation linéaire, en multipliant à gauche par R^{-1} l'équation matricielle, et en remplaçant $R^{-1} \cdot A$ par : $\Lambda \cdot R^{-1}$

$$R^{-1} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda \cdot R^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

On obtient donc la forme suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

la solution est donc de la forme $V_i(x - \lambda_i t)$

Vérifions dans ce cas non linéaire si par hasard ça marche aussi. Calculons $R^{-1} \cdot \partial_t U$: sur la première ligne :

on a $-\sqrt{g/h}/2 \partial_t h + (1/2) \partial_t u = (1/2) \partial_t (u - 2\sqrt{gh})$, etc pour la seconde ligne, et la dérivée ∂_x donnera une expression similaire, donc après calculs, on trouve la forme suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u + \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u + 2\sqrt{gh}) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u - \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u - 2\sqrt{gh}) = 0$$

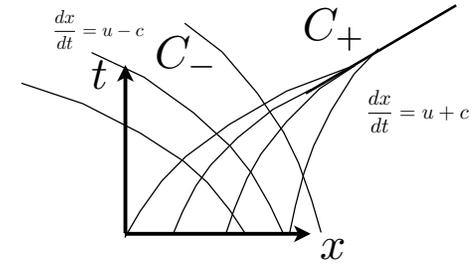
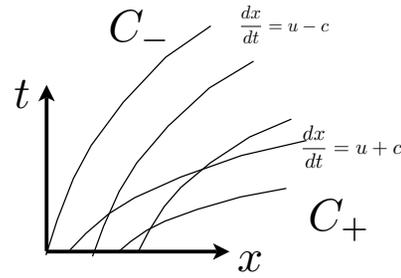
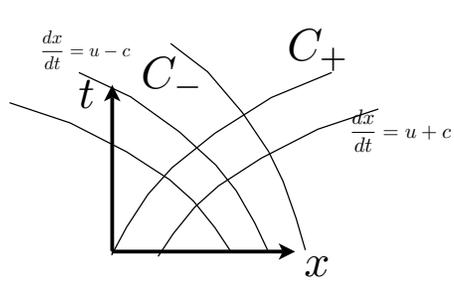


FIGURE 53 – à gauche régime fluvial, la vitesse est plus petite que la vitesse des ondes ; l’écoulement en un point dépend de l’amont et de l’aval. A droite ; régime torrentiel, les ondes vont moins vite que le courant ; l’écoulement en un point ne dépend que de l’amont, il n’influence que l’aval. $u + 2c$ constant le long des C^+ et $u - 2c$ constant le long des C^-

FIGURE 54 – Des caractéristiques se croisent : il y a un choc, voir §10.6.

La fonction qui est constante le long de la caractéristique est appelée invariant de Riemann. Pour les ondes non linéaires on a conservation des invariants de Riemann ($u \pm 2\sqrt{gh}$) le long des caractéristiques aux vitesses caractéristiques ($u \pm \sqrt{gh}$).

On a :

$$\frac{d}{dt}(u + 2\sqrt{gh}) = 0 \text{ le long des courbes } C_+ \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = u + c$$

$$\frac{d}{dt}(u - 2\sqrt{gh}) = 0 \text{ le long des courbes } C_- \text{ d'équation } \frac{dx}{dt} = u - c$$

10.3 Invariants de Bernhard Riemann 1826-1866 , sans les matrices

Reprenons le système de Saint-Venant, nous retrouvons les résultats précédents par une méthode un peu plus simple. Sous forme développée, remarquons que si on pose $c^2 = gh$, donc $2cdc = gdh$, l’équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \text{ devient } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

et multiplions l’équation de conservation de la masse par g :

$$g \frac{\partial h}{\partial t} + ug \frac{\partial h}{\partial x} + gh \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ on y reconnaît } 2c \frac{\partial c}{\partial t} + 2uc \frac{\partial c}{\partial x} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ ou encore : } \frac{\partial(2c)}{\partial t} + u \frac{\partial(2c)}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

en additionnant et soustrayant les deux équations de quantité de mouvement et de masse écrites en u et c , on a :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u \pm 2c) = 0.$$

Cette forme montre bien que selon certaines lignes dans le plan x, t définies par $dx/dt = u \pm c$ on a les intégrales de $u \pm 2c$ constantes. Ces lignes sont appelées des "caractéristiques", et les intégrales $u \pm 2c$ sont les "invariants". Dans ce type de situation, le système est dit "hyperbolique".

- $u + 2c$ est constant le long de la courbe $\frac{dx}{dt} = u + c$, cette courbe est notée C_+
- $u - 2c$ est constant le long de la courbe $\frac{dx}{dt} = u - c$, cette courbe est notée C_-

Remarque

Nous faisons le lien ici avec l'équation des ondes. Si on linéarise autour d'une hauteur d'eau fixe et d'une vitesse nulle : $u = 0 + \varepsilon u_1 + \dots$ et $h = h_0 + \varepsilon h_1 + \dots$ donc $c = c_0(1 + \varepsilon h_1/h_0 + \dots)^{1/2} = c_0 + \varepsilon \frac{h_1}{2h_0} + \dots$

- $u + 2c = 2c_0 + \varepsilon(u_1 + c_0 h_1/h_0) + \dots$ est constant le long de la courbe $\frac{dx}{dt} = c_0$,

on retrouve ce que l'on avait en linéaire : $[u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0}]$ fonction de $(x - c_0 t)$ constant le long de $\frac{dx}{dt} = c_0$

- $u - 2c = -2c_0 + \varepsilon(u_1 - c_0 h_1/h_0) + \dots$ est constant le long de la courbe $\frac{dx}{dt} = -c_0$,

on retrouve ce que l'on avait en linéaire : $[u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0}]$ fonction de $(x + c_0 t)$ constant le long de $\frac{dx}{dt} = -c_0$

10.4 Application en instationnaire des invariants de Riemann : Onde centrée simple

Avant de passer à la rupture elle même, remarquons que l'on a une solution remarquable simple possible des équations instationnaires de Saint Venant 1D non visqueuses à fond plat. Elle est appelée "onde simple centrée". Cette solution est telle que les C_- sont des droites centrées en $x = 0$ et $t = 0$ et u et c sont constants le long de cette droite.

Montrons le : pour cette solution on se donne des C_- qui sont des droites centrées en $x = 0$ et $t = 0$. L'équation d'une droite étant de la forme $x = at$, la pente de la droite est $\frac{dx}{dt} = a$. C'est aussi $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$ puisque c'est une droite passant par l'origine.

Ceci étant dit, revenons à la définition des courbes caractéristiques le long desquelles les invariants sont conservés. Par définition stricte des C_- , le long de cette courbe, on a $u - 2c$ constant et la C_- est la courbe telle que $\frac{dx}{dt} = u - c$. Donc comme la pente de la droite est x/t , on a $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = u - c$. Donc $\frac{x}{t} = u - c$ et $u - 2c$ constants ensemble le long de C_- . Puisque $u - c$ et $u - 2c$ constants le long de chaque droite, c'est que u et c sont constants sur chaque droite. Ces valeurs varient par les C_+ , sur lesquelles la valeur de l'invariant est $u + 2c$. Ainsi l'"éventail" de l'onde simple centrée est tel que, puisque $u + 2c$ est invariant lorsque l'on passe d'une C_+ , à l'autre, si on pose pour simplifier K la valeur de cette constante

$$\frac{x}{t} = u - c, \quad u + 2c = K \quad \text{donc on peut trouver } c \text{ et } u \text{ fonctions de } x/t \text{ tels que } \quad c = \frac{1}{3}(K - \frac{x}{t}), \quad \& \quad u = \frac{1}{3}(K + 2\frac{x}{t})$$

10.5 Application en instationnaire des invariants de Riemann : Rupture de Barrage, solution de Ritter

Nous venons d'exprimer la solution d'onde simple telle que $\frac{x}{t} = u - c$, $u + 2c = K$ est constante. Cette solution est en fait celle de la rupture de barrage, mais elle est limitée par le cas $u = 0$ à gauche et $h = 0$ à droite. À gauche, la vitesse étant nulle on voit $K = 2c_0$ et que $\frac{x}{t} = 0 - c_0$, l'information de la rupture se propage en $x/t = -c_0$ et remonte du côté $h = h_0$. Ce qui donne $c = \frac{1}{3}(2c_0 - \frac{x}{t})$ et $u = \frac{1}{3}(2c_0 + 2\frac{x}{t})$. À droite, l'onde est limitée par la hauteur nulle en $h = 0$ donc $\sqrt{gh} = 0 = \frac{1}{3}(2c_0 - \frac{x}{t})$ soit sur la caractéristique $x = 2c_0 t$. Le point mouillé se propage avec une vitesse double sur le sec en aval que le point de départ de vidange en amont. C'est la solution de Ritter datant de 1892.

- pour $-\infty < x < -t\sqrt{gh_0}$ on a $h = h_0$, la hauteur d'eau ne varie pas. Le signal de la perturbation due au barrage détruit se propage vers l'amont à la vitesse c_0 .
- pour $-t\sqrt{gh_0} < x < 2t\sqrt{gh_0}$ on a $\sqrt{gh} = \frac{1}{3}(2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t})$ donc $h = \frac{x^2}{9gt^2} - \frac{4x}{9t}\sqrt{\frac{h_0}{g}} + \frac{4h_0}{9}$ et $u = (2/3)(x/t + \sqrt{gh_0})$. On est dans le régime d'onde simple présenté auparavant.
- pour $2t\sqrt{gh_0} < x < \infty$ on a $h = 0$, on a la deuxième limite correspondant à la hauteur nulle.

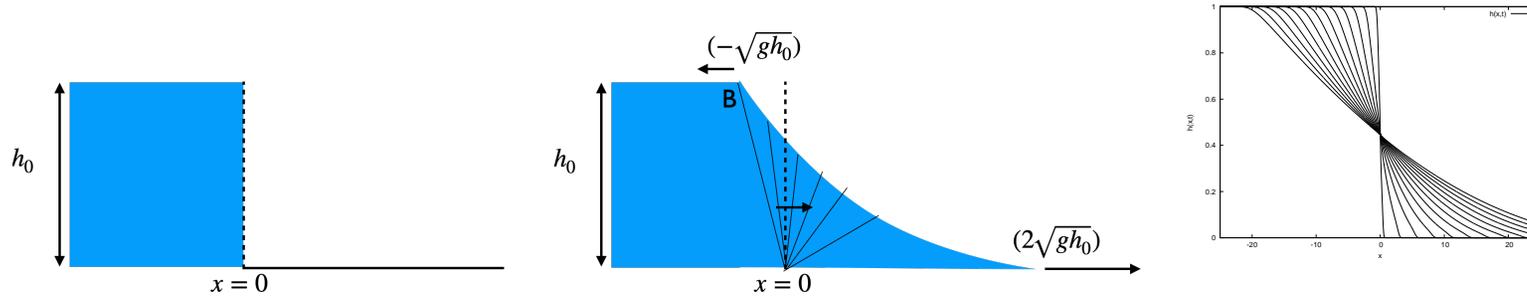


FIGURE 55 – rupture de barrage : gauche un tas semi infini ($x < 0$) au repos, au temps $t = 0$ on enlève instantanément une "porte" en $x = 0$, milieu : vision de l'écoulement à un temps donné, droite évolution de la surface libre en fonction du temps.

Remarquons que lors de la rupture d'un barrage, le débit est constant en $x = 0$, c'est $hu = \frac{8h_0}{27} \sqrt{gh_0}$.

c'est la solution de RITTER, A. (1892). "Die Fortpflanzung der Wasserwellen." Vereine Deutscher Ingenieure Zeitschrift, Vol. 36, No. 2, 33, 13 Aug., pp. 947-954
 Une mise en oeuvre de ces solutions est le problème de rupture de barrage. Ce genre d'accidents est rare, un cas tristement célèbre est celui de la rupture du barrage de Malpasset 1959 (Var) le 2/12/59. Ce jour là, la rupture du barrage fait déferler une vague de 5 m de haut à la vitesse de 70 km/h (voir le film du lien suivant à la minute 04 :41)) (effectivement $3.6\sqrt{5 * 9.81} = 50$). Balayant tout sur son passage sur une distance d'une douzaine de kilomètres, elle débouche sur Fréjus 20 minutes plus tard, avant de se jeter dans la mer faisant 423 victimes.

Récemment, suite à l'effondrement du pont de Gènes (14/08/18) des inquiétudes se manifestent
https://www.francetvinfo.fr/monde/environnement/video-barrage-le-scenario-catastrophe_2933971.html ("envoyé spécial" 13/09/18) sur le barrage de Vouglans (Jura).

Nous verrons que si la rupture de barrage se produit sur un fond déjà mouillé, un ressaut se forme, mais avant, il nous faut étudier les ressauts.

10.6 Application en instationnaire des invariants de Riemann : formation de chocs

Dans le cas linéarisé pour une onde se déplaçant vers la droite $[u_1 - c_0 \frac{h_1}{h_0}] = 0$ et on a $[u_1 + c_0 \frac{h_1}{h_0}] = \frac{2c_0}{h_0} f(x - c_0 t)$, donc $u_1 = \frac{c_0}{h_0} f(x - c_0 t)$ et $h_1 = f(x - c_0 t)$.

Passons au **cas non linéaire** : pour une onde se déplaçant vers la droite $(u - 2\sqrt{gh})$ est constant, donc si la surface n'est pas perturbée au loin ($u = 0, h = h_0$), on peut exprimer u par la conservation de l'invariant de Riemann : $u - 2\sqrt{gh} = 0 - 2\sqrt{gh_0}$ donc

$$u = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}.$$

(Si on linéarise cette expression, on retrouve que $\varepsilon u_1 = 2c_0(1 + \varepsilon h_1/h_0 + \dots)^{1/2} - 2\sqrt{gh_0}$. Donc $u_1 = c_0 \frac{h_1}{h_0}$, c'est bien ce que l'on avait trouvé en linéaire, ici on passe au non linéaire (par la suite on pose $\eta = \varepsilon h_1$).

L'équation de la hauteur d'eau (mais on montre après que l'on peut partir de l'autre équation de Riemann)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0$$

devient, en posant $\eta + h_0 = h$ (attention η est la perturbation de la surface libre et non la cote de la surface libre) et en substituant la vitesse précédente, comme

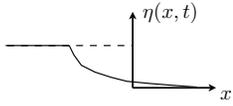


FIGURE 56 – Rupture de barrage, entre $x = -t\sqrt{gh_0}$ et $x = 2t\sqrt{gh_0}$, $u = (2/3)(x/t + \sqrt{gh_0})$ et $gh = ((2/3)(\sqrt{gh_0} - x/(2t)))^2$.

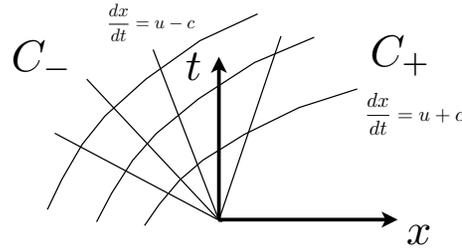


FIGURE 57 – Les caractéristiques pour l’onde simple centrée lors de la rupture de barrage. $u + 2c$ constant le long des C_+ et $u - 2c$ constant le long des C_-

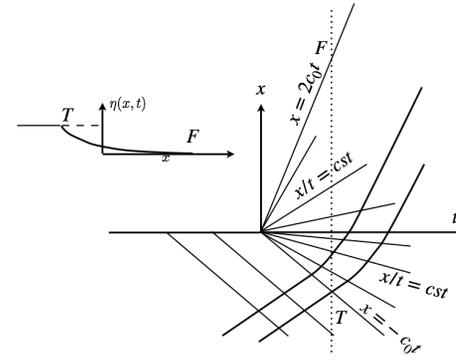


FIGURE 58 – Rupture de barrage, entre $x = -t\sqrt{gh_0}$ et $x = 2t\sqrt{gh_0}$.

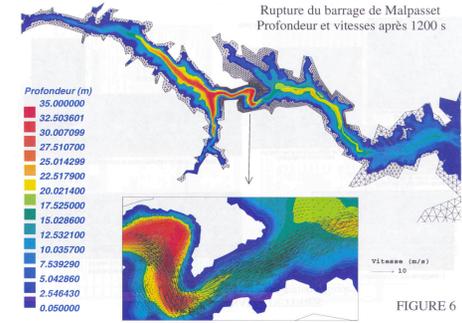


FIGURE 59 – Calcul EDF [24] de la rupture du barrage. Ce cas est un cas test numérique car la rupture de chaque ligne électrique croisée par l’inondation a été relevée temporellement.

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + (h_0 + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et que } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial h} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ avec } \frac{\partial u}{\partial h} = \sqrt{g/h} :$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (2\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (h_0 + \eta) \sqrt{\frac{g}{(h_0 + \eta)}} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

il y a création du déferlement par raidissement du profil voir figure 66. Les caractéristiques se croisent voir figure 54 car on a une équation du même type $\partial_t \eta + c(\eta) \partial_x \eta = 0$.

Alternative :

Bien entendu, comme on a considéré des ondes allant vers la droite, avec $u - 2c$ constant $u - 2c = -2c_0$ partout, on aurait aussi pu partir de l’autre équation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial x}\right)(u + 2c) = 0$$

qui donne puisque $u = 2c - 2c_0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (3c - 2c_0) \frac{\partial}{\partial x}\right)(4c + 2c_0) = 0$$

et comme $c(h)$, donc on retrouve bien l’équation précédente.

Note historique

Ce calcul a été fait par J. Proudman en 1957 "On the series that represent tides and surges in an estuary" avec un point de vue proche, avec en plus un contre courant $-u_0$. Il trouve que la vitesse est alors $((3\sqrt{1 + \frac{\eta}{h_0}} - 2 - \frac{u_0}{c_0})c_0)$ (exercice : vérifiez le).

Mais en fait il a été proposé par Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant lui même en 1871 dans la première partie de son article de 1871 Le fichier est ici <https://dropsu.sorbonne-universite.fr/s/RpmpqgDY8477qf6>.

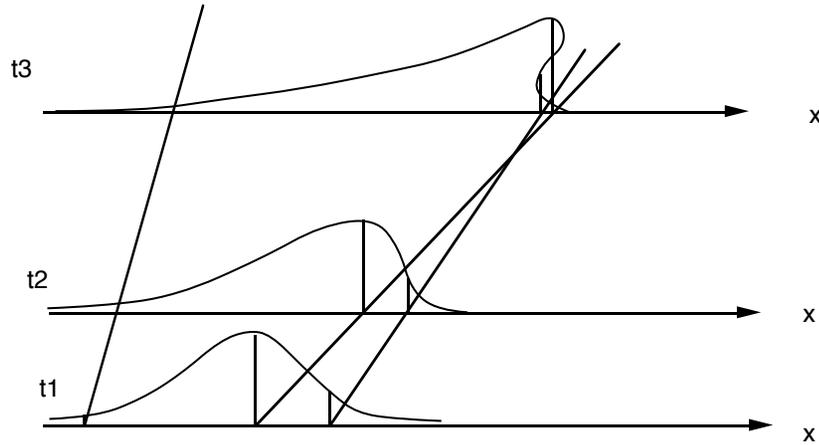


FIGURE 60 – De bas en haut les hauteurs de vague pour différents temps. Raidissement du profil : le haut qui va plus vite dépasse le bas. la solution prédit un enroulement. Cet enroulement est détruit par rupture de la surface en gouttes et bulles : il s’agit en fait du déferlement.

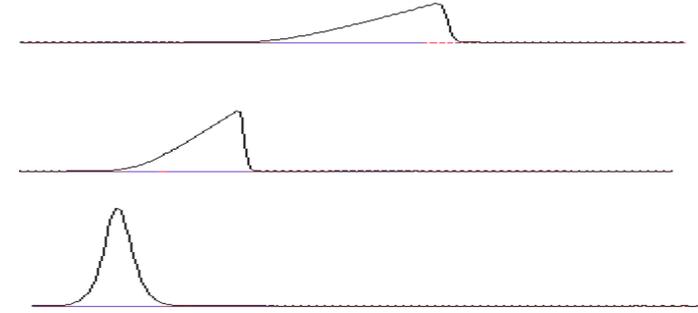


FIGURE 61 – De bas en haut les hauteurs de vague. Raidissement du profil formation d’un choc. Ce choc traduit le déferlement qui se produit sur une échelle courte et qui met en jeu des phénomènes physiques absents des équations de Saint-Venant. L’enroulement de la surface libre sur elle même est remplacée par une discontinuité. En pratique, cette discontinuité est lissée sur quelques points Δx par les schémas numériques, <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/raid.mov>

10.7 Application des invariants de Riemann, Formation de chocs, équation de Burgers

Si on linéarise autour de h_0 à η petit, on a : $(3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}) = \sqrt{gh_0}(3(1 + \frac{\eta}{2h_0} + \dots - 2) = \sqrt{gh_0}(1 + \frac{3\eta}{2h_0} + \dots)$ ce qui donne comme équation d’advection de l’élévation :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh_0}\left(1 + \frac{3\eta}{2h_0}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

On pose $c_0 = \sqrt{gh_0}$, puis $\eta = (\varepsilon h_0)\bar{\eta}$, $x = h_0\bar{x}$, $t = \bar{t}/c_0/h_0$ de manière à adimensionner l’équation : $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + (1 + \varepsilon \frac{3}{2}\bar{\eta}) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} = 0$. Plaçons nous dans le repère qui se déplace $\xi = x - t$ et utilisons pour le temps la variable $\tau = t/\varepsilon$, c’est un temps long : $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}$ donc l’équation aux temps longs et dans le repère de l’onde qui se déplace devient l’équation dite de Burgers :

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau} + \frac{3}{2}\bar{\eta} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} = 0.$$

Cette équation non linéaire a tendance à créer un choc car les vagues de plus grande hauteur rattrapent les plus basses.

En effet elle s’écrit aussi $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau} + \frac{3}{4} \frac{\partial \bar{\eta}^2}{\partial \xi} = 0$. Sa vitesse de choc associée est donc $\frac{[\frac{3}{4}\bar{\eta}^2]}{[\bar{\eta}]} = \frac{3}{4}[\bar{\eta}]$. La vitesse totale de la discontinuité, en revenant dans le repère du laboratoire et en remettant les dimensions, est

$$W = c_0\left(1 + \frac{3}{4} \frac{[\eta]}{h_0}\right). \quad (18)$$

Équation de Burgers

Dans les équations de Navier Stokes, on a toujours négligé le terme de dérivée seconde (∂_x^2) en prétendant qu’il était négligeable. Une autre difficulté est aussi que l’on ne peut pas écrire simplement l’intégrale moyenne sur l’épaisseur de $\int \partial_x^2 u_1 dz$ en fonction $\partial_x^2(hu)$. Cependant, ce terme est parfois rajouté de manière *ad hoc*. Il permet justement de lisser les chocs, sur une distance peu physique, mais utile en pratique :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{3}{2}\bar{\eta} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}$$

- Il ressort de la théorie des caractéristiques que cette équation a des solutions ξ/τ ... Il est également évident que cette équation non linéaire tend à créer un choc, car les ondes de plus grande hauteur rattrapent celles de plus petite hauteur.

En effet, on l'écrit aussi : $\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau} + \frac{3}{4} \frac{\partial \bar{\eta}^2}{\partial \xi} = 0$. Sa vitesse de choc associée est donc $\frac{[\frac{3}{4} \bar{\eta}^2]}{\bar{\eta}} = \frac{3}{4} [\bar{\eta}]$. La vitesse totale de la discontinuité, dans le référentiel du laboratoire et en remettant les dimensions, est

$$W = c_0 \left(1 + \frac{3[\eta]}{4h_0}\right). \quad (19)$$

Il s'agit de la vitesse d'une discontinuité.

- Solution par la méthode des solutions semblables

Notons que nous pouvons construire une solution analytique de :

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \bar{\eta} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} = 0$$

en supposant que la surface déplacée $\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx$ est donnée. Cette équation est résolue en utilisant la technique des solutions similaires...

$$\text{changement d'échelle} \begin{cases} t = T\hat{t} \\ \xi = X\hat{\xi} \\ \eta = H\hat{\eta} \end{cases} \quad (20)$$

La conservation de la masse totale est préservée par $HX = 1$. De même pour l'équation elle-même, on voit que $T = X^2$ préserve l'invariance de l'équation, qui s'écrit alors identiquement

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} = -\frac{3\hat{\eta}}{2} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{\xi}}.$$

En utilisant l'astuce classique de l'invariance de la solution implicite, on obtient la variable de similitude ζ et la surface η de la forme :

$$\zeta = \frac{\xi}{t^{1/2}}, \text{ et } \eta = t^{-1/2} f\left(\frac{\xi}{t^{1/2}}\right).$$

Par substitution et dérivation, la fonction $f(\zeta)$ vérifie

$$\frac{(-\zeta f' - f)}{2} = \frac{3}{2} f f'$$

Comme $(-\zeta f' - f) = -(\zeta f)'$ par intégration et comme f est nul à l'infini, on a : $\zeta f = (3/2)f^2$. Cela donne $f = 2\zeta/3$. Cela donne

$$\eta = \frac{2\xi}{3t}, \text{ avec } \xi_{max} = \sqrt{6t}.$$

Toute perturbation se transforme en un triangle dont la forme décroît avec le temps.

- Solution par la méthode des caractéristiques
pour

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3\eta}{2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0,$$

il est évident que comme la vitesse des caractéristiques est $\frac{d\xi}{dt} = \frac{3\eta}{2}$, alors au loin $\frac{\xi}{t} = \frac{3\eta}{2}$ on retrouve bien $\eta = \frac{2\xi}{3t}$.

• **autre méthode.**

Pour résoudre cette équation (équation de Burgers) on fait la transformation dite de Hopf en posant $\eta = -2\nu \frac{\partial \log(F)}{\partial \xi}$ d'où

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = g(t)F, \quad \text{On obtient : } F(x, t) = \frac{1}{4\pi\nu t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\zeta)^2}{4\nu t}\right) F(\zeta, 0) d\zeta.$$

Une autre solution de cette équation, en posant $\zeta = (\xi - c\tau)/\nu$ pour faire disparaître la viscosité artificielle et en cherchant une solution $F(\zeta) : -cF' + FF' + F'' = 0$, soit $-cF + F^2/2 + F' = cst$ on a vu déjà que $\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ s'il y a mouvement la solution est de la forme :

$$c = \frac{h_2 + h_1}{2}, \quad \eta = \frac{h_2 + h_1}{2} + \frac{h_2 - h_1}{2} \tanh\left((h_1 - h_2) \frac{(x - ct)}{4\nu}\right)$$

ce qui donne la solution se déplaçant à la vitesse $c = (h_1 + h_2)/2$, passant de h_1 à h_2 sur une épaisseur $\nu/(h_1 - h_2)$:

10.8 Rupture de Barrage sur une pente

On peut étudier la problème de rupture de barrage sur une pente constante α (avec $-dz_b/dx = \alpha > 0$)

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) = -gh\partial_x h + gh\alpha \end{cases}$$

La résolution a été établie indépendamment par Ancey et al. [4]. et Dressler [16]. Il faut revenir à la formulation non conservative sans dimension

$$\begin{cases} \partial_t h + u\partial_x h + h\partial_x u = 0 \\ \partial_t u + u\partial_x u = -\partial_x h + \alpha \end{cases}$$

Pour résoudre il faut passer dans le repère qui tombe en chute libre, $\xi = x - \alpha t^2/2$ et $w = u - \alpha t$

$$\begin{cases} \partial_t h + w\partial_\xi h + h\partial_\xi w = 0 \\ \partial_t w + w\partial_\xi w + \partial_\xi h = 0. \end{cases}$$

Dans cette nouvelle forme, la technique des invariants de Riemann est utilisée, après calculs compliqués présentés en détails par Ancey, on trouve une solution analytique sous forme paramétrée avec des fonctions spéciales (fonction hypergéométrique).

Voir http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/damb_slope.c

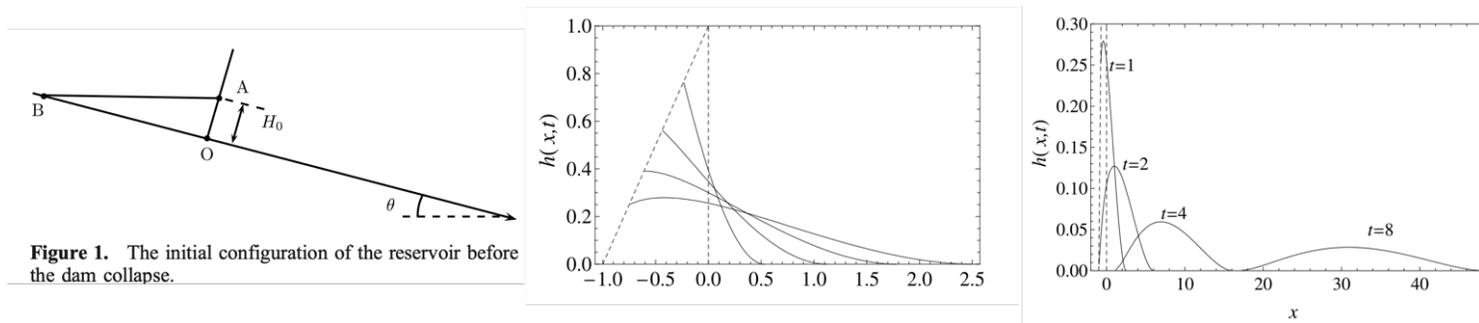


FIGURE 62 – Rupture de barrage, sur un sol incliné, forme du réservoir aux instants initiaux, $t = 0, .250.50.751$. Hauteur d’eau, profils aux temps $t = 1, 2, 4, 8$. Images extraites de Ancey Rentschler, R.M. Iverson, R.P. Denlinger “An Exact Solution for Ideal Dam-Break Floods on Steep Slopes” Water Resources Research, 2008, 44(1) : 1-10.

11 Ressaut

11.1 Système

Le système qui nous occupe est toujours le système de Saint-Venant sur fond plat sans frottement. Rappelons que nous l'avons établi avec la démarche de conservation sur des petites tranches. On a donc sous établi sous la forme "conservative" en 1D

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) & = 0. \end{cases}$$

Les équations de Saint-Venant s'écrivent en 2D

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + g\frac{h^2}{2}) + \frac{\partial(huv)}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(hv^2 + g\frac{h^2}{2}) & = 0 \end{cases} \quad \text{de la forme } \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0$$

En fait, pour établir les équations 1D, nous avons fait un bilan sur une tranche de longueur Δx que l'on a fait tendre vers 0. Mais nous aurions pu nous arrêter à la tranche sans la faire tendre vers 0. Voire, considérer un domaine quelconque, pour l'écrire sur un domaine (D de frontière ∂D) qui n'est pas forcément infinitésimal :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho h dS = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \int_D \rho u h dS + \int_{\partial D} \rho g \frac{h^2}{2} d\ell = 0.$$

Nous allons montrer que ce système permet d'écrire des relations de part et d'autre d'une discontinuité. Cette "discontinuité" est le ressaut. Le vrai ressaut physique a une certaine longueur, mais on suppose l'extension suffisamment faible que vu de loin, c'est une variation brusque des valeurs. On a vu plus haut comment se forme un choc et que sa structure dépend de la viscosité. En fait, la description est plus compliquée car l'écoulement devient turbulent et donc le ressaut est plus épais, mais encore assez mince.

Voir l'Annexe 31 "Rappel, dérivées d'intégrales" sur les les équations de Rankine Hugoniot.

11.1.1 Application au Ressaut 1D des relations de Rankine Hugoniot

Les équations de Saint-Venant dans un domaine D qui est le segment $[x_1, x_2]$ transporté dans le mouvement $x_1(t), x_2(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} h dx = 0, \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} h u dx + [g\frac{h^2}{2} dx]_{x_1(t)}^{x_2(t)} = 0$$

donc comme on connaît le résultat d'une dérivation d'intégrale lorsqu'il y a une discontinuité (voir Annexe 31 ou que l'on a déjà vu §8.5.2), que l'on écrit ici en 1D

$$\frac{d}{dt} \int C dx = \int \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(Cu)}{\partial x} \right) dx - [|C(w-u)|]$$

ici $C = h$ donc ici $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx = 0$, s'écrit

$$\int \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} \right) dx - [|h(w-u)|] = 0$$

L'équation locale $(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(Cu)}{\partial x}) = 0$ fait disparaître l'intégrale de "volume", il ne reste que que les discontinuités au bord.

$$[h(w - u)] = 0$$

De même si $C = hu$ donc $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} hudx + [g\frac{h^2}{2}dx]_{x_1}^{x_2} = 0$ devient

$$\int (\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{h^2}{2}))dx - [hu(w - u)] = 0$$

où $C = h$ pour la masse et $C = uh$ pour la quantité de mouvement, les discontinuités sont :

$$[|\rho h(w - u)|] = 0 \quad \text{et} \quad [|\rho uh(w - u) - \frac{1}{2}\rho gh^2|] = 0.$$

Reprendre ici en première lecture.

Remarque

On aurait pu utiliser la démarche aussi de §8.5.2, qui donne bien sûr la même chose. En effet, rappelons que l'on avait montré

$$\frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}Q = 0 \quad \text{donnait en discontinuité} \quad [|-wh + Q|] = 0$$

de même on identifie

$$\frac{\partial}{\partial t}Q + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q^2}{h} + g\frac{h^2}{2}) = 0 \quad \text{qui donne en discontinuité} \quad [|-wQ + (\frac{Q^2}{h} + g\frac{h^2}{2})|] = 0$$

les discontinuités sont donc bien en remplaçant $Q = uh$:

$$[|\rho h(w - u)|] = 0 \quad \text{et} \quad [|\rho uh(w - u) - \frac{1}{2}\rho gh^2|] = 0.$$

Pour un ressaut fixe la Conservation de la masse et la Conservation de la quantité de mouvement donnent respectivement les relations de saut suivantes ;

$$U_1 h_1 = U_2 h_2, \quad \text{resp.} \quad U_1^2 h_1 + g \frac{h_1^2}{2} = U_2^2 h_2 + g \frac{h_2^2}{2}. \quad (21)$$

Pour un ressaut mobile, la vitesse de la discontinuité W n'est pas nulle :

$$\text{conservation de la masse } (W - U_2)h_2 = (W - U_1)h_1, \quad \text{Conservation de la quantité de mouvement } (W - U_2)h_2 U_2 - (W - U_1)h_1 U_1 = g(\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2}) \quad (22)$$

Nous allons traiter ces deux cas, qui sont en fait les mêmes dans les sections suivantes.

Nous remarquons au passage que la modélisation nous donne l'impression que le ressaut est infiniment fin, on voit bien sur l'image 98 qu'il n'en est rien. Le ressaut est constitué de bulles et d'écume sur une épaisseur d'environ la profondeur. Même si on avait tenu compte des termes en $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$ dans la partie visqueuse de Navier Stokes, ils n'auraient pas expliqué la structure intime du ressaut.

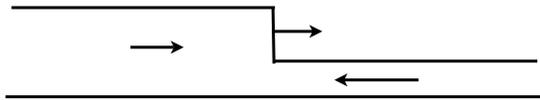


FIGURE 63 – **Gauche** Un ressaut créé par la montée de la marée à Port à La Duc baie de la Fresnaye, 22, Photo PYL 22/08/09, en dessous sa simplification en deux niveaux. **Droite** "The Lord of the Ring", un ressaut au cinéma (délirant : on voit des chevaux d'écume dans le ressaut)

11.2 Application : le ressaut fixe, formule de Bélanger

Conservation de la quantité de mouvement

$$U_1^2 h_1 + g \frac{h_1^2}{2} = U_2^2 h_2 + g \frac{h_2^2}{2} \quad (23)$$

Conservation de la masse :

$$U_1 h_1 = U_2 h_2 \quad (24)$$

à partir de ces relations de conservation nous allons écrire l'expression de U_2/U_1 et h_2/h_1 en fonction du nombre de Froude $F_1^2 = \frac{U_1^2}{gh_1}$. Partant de l'éq. 23 multipliée

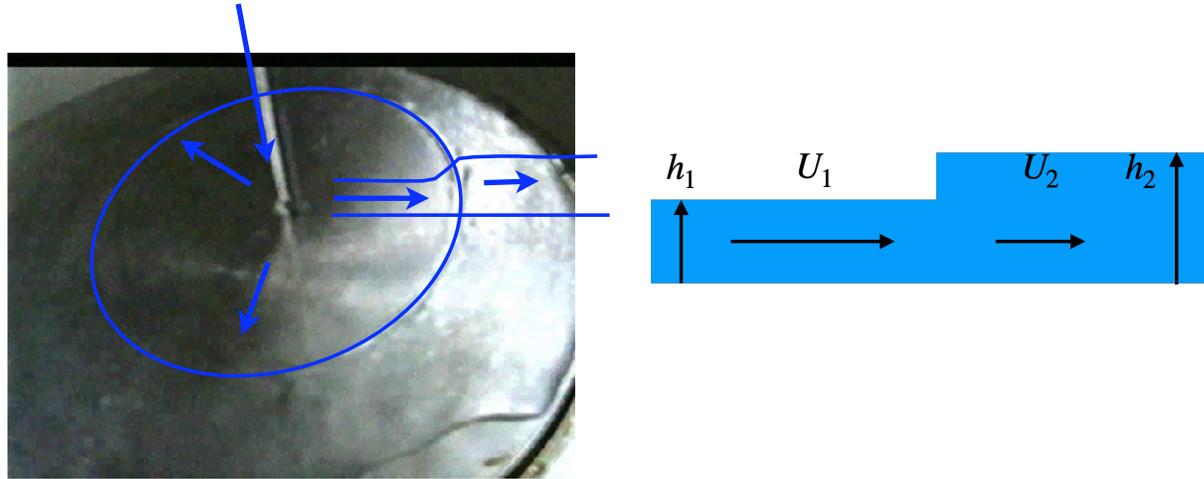


FIGURE 64 – Un ressaut créé par l'eau sortant d'un robinet au fond d'un évier, Photo PYL, on a 1 litre/20s le rayon est d'environ 7cm, la hauteur d'eau environ 0.2 mm ce qui fait un Froude d'environ 12, et une hauteur après le ressaut 16 fois plus haute environ.

par h_2 dans lequel $U_2 h_2$ est remplacé par $U_1 h_1$ compte tenu de l'éq. 24

$$U_1^2 h_1 h_2 + g \frac{h_2 h_1^2}{2} = U_1^2 h_1^2 + g \frac{h_2^2}{2} h_2$$

d'où en mettant les vitesses à gauche et la gravité à droite et comme on reconnaît une identité remarquable avec $(h_2^2 - h_1^2)$:

$$U_1^2 h_1 (h_2 - h_1) = g \frac{(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)}{2} \quad \text{ou} \quad U_1^2 = g \frac{(h_2 + h_1) h_2}{2 h_1}$$

Le nombre de Froude est donc

$$F_1^2 = \frac{U_1^2}{gh_1} = \frac{(h_2 + h_1) h_2}{2 h_1^2}$$

si $h_2 > h_1$ le nombre F_1 est supérieur à 1. On pourrait faire de même pour l'indice 2, on trouve alors

$$F_2^2 = \frac{U_2^2}{gh_2} = \frac{(h_2 + h_1) h_1}{2 h_2^2}$$

cette fois, si $h_2 > h_1$ le nombre F_2 est inférieur à 1. On constate que

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{3/2}$$

Reprenons l'équation de F_1^2 et exprimons la comme un polynôme en h_2/h_1 soit :

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right) - 2F_1^2 = 0$$

cette équation du second degré a une racine positive qui est :

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8F_1^2}}{2}.$$

Cette relation est appelée formule de Bélanger. On a donc maintenant toutes les quantités :

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = \left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^{2/3} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8F_1^2}}{2}$$

11.3 Dissipation d'énergie

On peut construire une énergie $E = \rho \frac{hu^2}{2} + \rho gh(Z_b + \frac{h}{2})$, somme d'une énergie potentielle et cinétique. On substituant dans les équations de Saint-Venant on voit que

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((E + g \frac{h^2}{2}) u \right) \leq 0$$

Les considérations sur le flux d'énergie permettent de montrer qu'il y a dissipation d'énergie dans un ressaut :

$$\frac{1}{2} U_1 h_1 (h_2 - h_1) \left[-\frac{U_2^2}{h_1} - g \left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right) \right]$$

11.4 Vanne de décharge dans un canal

Des considérations similaires permettent d'exprimer la résultante des forces sur un barrage ouvert. L'écoulement après la vanne est d'un niveau h_2 plus faible qu'en amont, il est supercritique.

11.5 Ressaut Mobile (cas général)

Cette fois ci le ressaut se déplace à une vitesse W . Les vitesses U_1 et U_2 ne sont pas forcément positives. Conservation de la masse :

$$(W - U_2)h_2 = (W - U_1)h_1 \tag{25}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$(W - U_2)h_2U_2 - (W - U_1)h_1U_1 = g \left(\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right) \tag{26}$$

Compte tenu de la conservation de la masse

$$U_1 = W - (h_2/h_1)(W - U_2)$$

Compte tenu de la conservation de la masse le membre de gauche de 26 et de cette expression de U_1

$$(W - U_2)h_2U_2 - (W - U_1)h_1U_1 = (W - U_2)h_2[U_2 - U_1] =$$

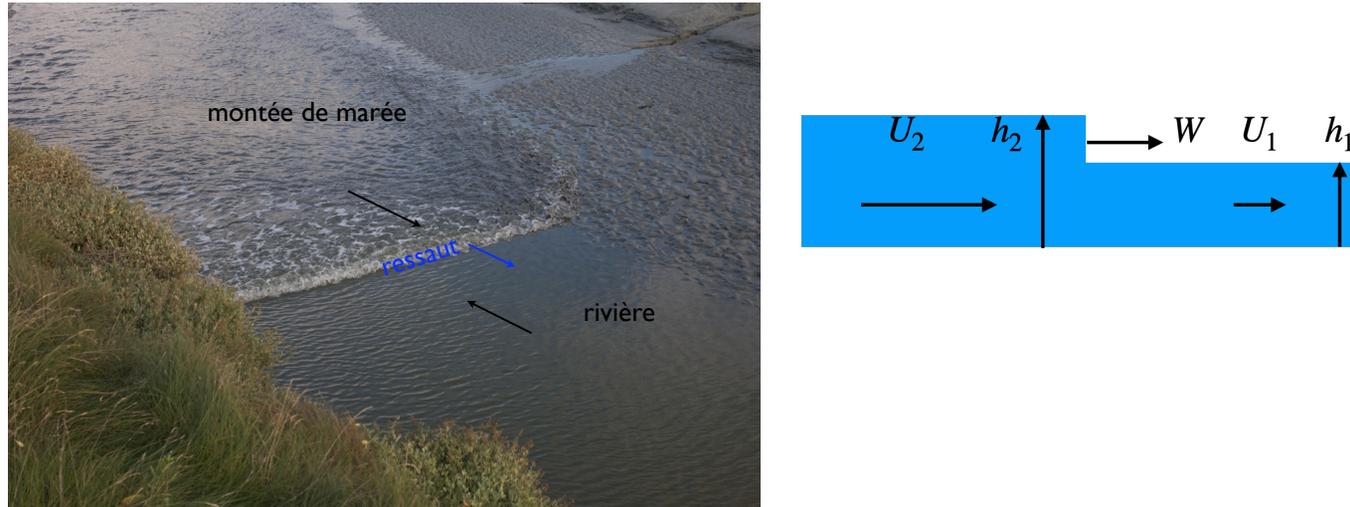


FIGURE 65 – Un ressaut créé par la montée de la marée à Port à La Duc baie de la Fresnaye, Côtes du Nord, Photo PYL 22/08/09. Dans le cas de la rivière avec un ressaut de marée qui remonte $U_2 > 0$ et $U_1 > 0$, la vitesse de remontée est ici $W > 0$.

$$(W - U_2)h_2[U_2 - (W - (h_2/h_1)(W - U_2))] = (W - U_2)h_2[U_2 - W]\left(\frac{h_1 - h_2}{h_1}\right)$$

d'où en simplifiant par $(h_1 - h_2)$

$$(W - U_2)^2 = g\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)\frac{h_1}{h_2}$$

Ce qui donne

$$W = U_2 + \sqrt{g\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)\frac{h_1}{h_2}}$$

Reprenant l'équation donnant $(W - U_2)^2$, on multiplie par 2 et on la divise par gh_2

$$2\frac{(W - U_2)^2}{gh_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

cette équation du second degré a une racine positive qui est la relation de Bélanger avec un ressaut mobile :

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{(W - U_2)^2}{gh_2}\right)}}{2}$$

On a donc maintenant toutes les quantités du ressaut mobile.

Remarque :

Si on se donne par exemple U_2 et h_1 et h_2 , on voit que $W = U_2 + \sqrt{g\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)\frac{h_1}{h_2}}$, et $U_1 = \sqrt{\frac{gh_1(h_1 + h_2)}{2h_2}}(1 - h_2/h_1) + U_2$. On retrouve bien que pour tout U_2 donné, alors U_1 et W sont de la forme $U_2 + F(h_1, h_2)$, ce qui montre que l'on peut changer de repère Galiléen le ressaut sans changer sa forme.

11.6 Ressaut Mobile (cas particulier de l'aval au repos)

Reprenons dans le cas où l'aval est au repos, disons que $h_1 = h_0$ constant, et que la vitesse aval $u_1 = 0$. On va refaire le calcul en posant $h_2 = h_0(1 + \varepsilon)$, en supposant ε quelconque (puis petit !). Le ressaut se déplace à une vitesse W à déterminer. Conservation de la masse Eq. 25 et conservation de la quantité de mouvement Eq. 26 donnent

$$(W - U_2)(1 + \varepsilon) = (W) \text{ et } (W - U_2)(1 + \varepsilon)U_2 = c_0^2 \left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

la première donne

$$U_2 = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}W \text{ et } (W - U_2) = \frac{(W)}{(1 + \varepsilon)} \text{ que l'on substitue dans la deuxième } \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}W^2 = c_0^2 \frac{\varepsilon + 2}{2} \text{ donc } W = c_0 \sqrt{(1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$W = c_0 \sqrt{(1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \text{ et } U_2 = \varepsilon c_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{1 + \varepsilon}},$$

$$\text{avec } h_1, h_2, \text{ si on préfère ainsi, } U_1 = 0, \quad h_1 = h_0, \quad h_2 = (1 + \varepsilon)h_0, \quad W = \sqrt{g \frac{h_1 h_1 + h_2}{h_2} \frac{h_1 + h_2}{2}}, \quad U_2 = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$$

le développement limité pour ε petit donne $W = c_0(1 + (3\varepsilon)/4 + \dots)$, on retrouve le résultat de l'équation 19.

11.7 Application en instationnaire des invariants de Riemann et des ressauts : Rupture de Barrage sur fond non sec

Considérons maintenant une rupture de barrage sur un lit déjà rempli d'eau. La solution précédente fait apparaître un ressaut lors de la vidange du lac... Etat à $t = 0$, pour $x < 0$, $h = h_L$, lac au repos, pour $x > 0$, hauteur constante h_0 . On en lève le barrage, une détente se fait sur la gauche (point "B" mobile), l'information part à la vitesse $-c_L = -\sqrt{gh_L}$ à gauche, tandis qu'un ressaut part à droite à la vitesse inconnue W . De part est d'autre du ressaut on résout les relations de Bélanger avec $U_1 = 0$ et $h_1 = h_0$ donnés. Mais on ne connaît pas h_2 , on peut pas déterminer non plus W . Pour connaître ces deux valeurs il faut voir ce qui se passe à gauche.

Entre "B" et "A", il y a une détente de vidange, en "A", la hauteur est justement h_2 celle de derrière le choc qui se déplace à la vitesse $W = \sqrt{gh_1 h_2 \frac{h_1 + h_2}{2}}$, hauteur toujours inconnue. La vitesse derrière ce choc est $U_2 = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$, fonction aussi de h_2 inconnu.

En "B" on a l'onde qui part à gauche, et de "B" à "A" on peut mettre un éventail le long duquel $u + 2c = \text{constante}$. Donc de "B" à "A" on a $0 + 2\sqrt{gh_L} = U_2 + 2c_2$, avec les données du problème :

$$2\sqrt{gh_L} = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}} + 2\sqrt{gh_2}.$$

Posons $h_1 = h_0$, $c_0^2 = gh_0$ et $h_2 = (1 + \varepsilon)h_0$, et $h_L = h_0(1 + \eta)$ on a en fait η donné, et il faut trouver ε de manière implicite en résolvant :

$$2\sqrt{(1 + \eta)} = \varepsilon \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{1 + \varepsilon}} + 2\sqrt{1 + \varepsilon}.$$

Une fois ε trouvé à partir de η :

$$h_L = h_0(1 + \eta), \quad h_2 = h_0(1 + \varepsilon), \quad h_1 = h_0, \quad c_0^2 = gh_0 \text{ puis } W = c_0 \sqrt{(1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \text{ et } U_2 = \varepsilon c_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{1 + \varepsilon}},$$

ce qui nous donne l'ensemble de la solution du problème.

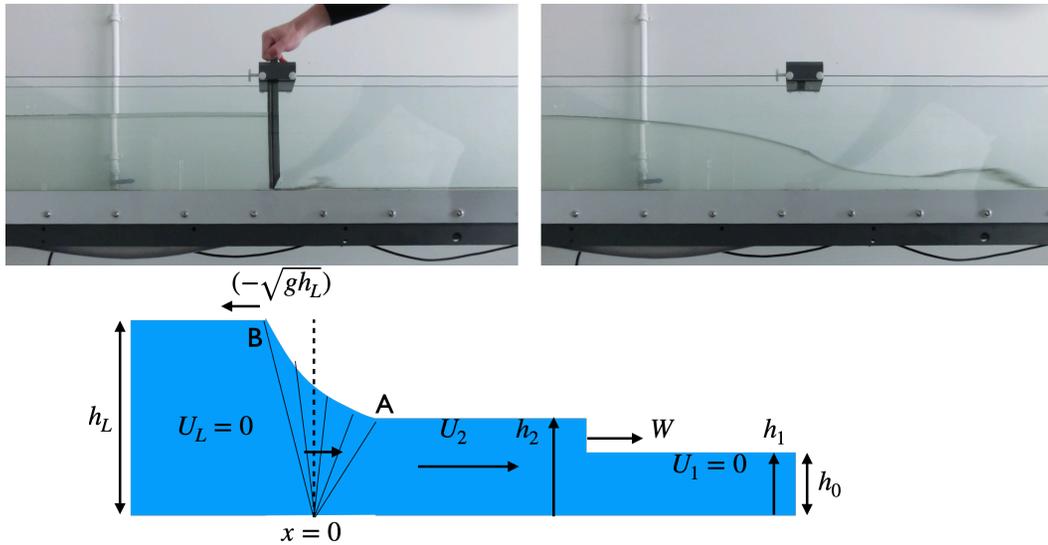


FIGURE 66 – Un ressaut se forme lors d’une rupture de barrage sur un fond initialement non sec. En haut état initial et une photo de l’écoulement. En bas, sur le schéma, un ressaut de vitesse W se forme lors d’une rupture de barrage de hauteur h_L sur un fond initialement à la hauteur h_0 .entre ”B” à ”A” on peut mettre un éventail

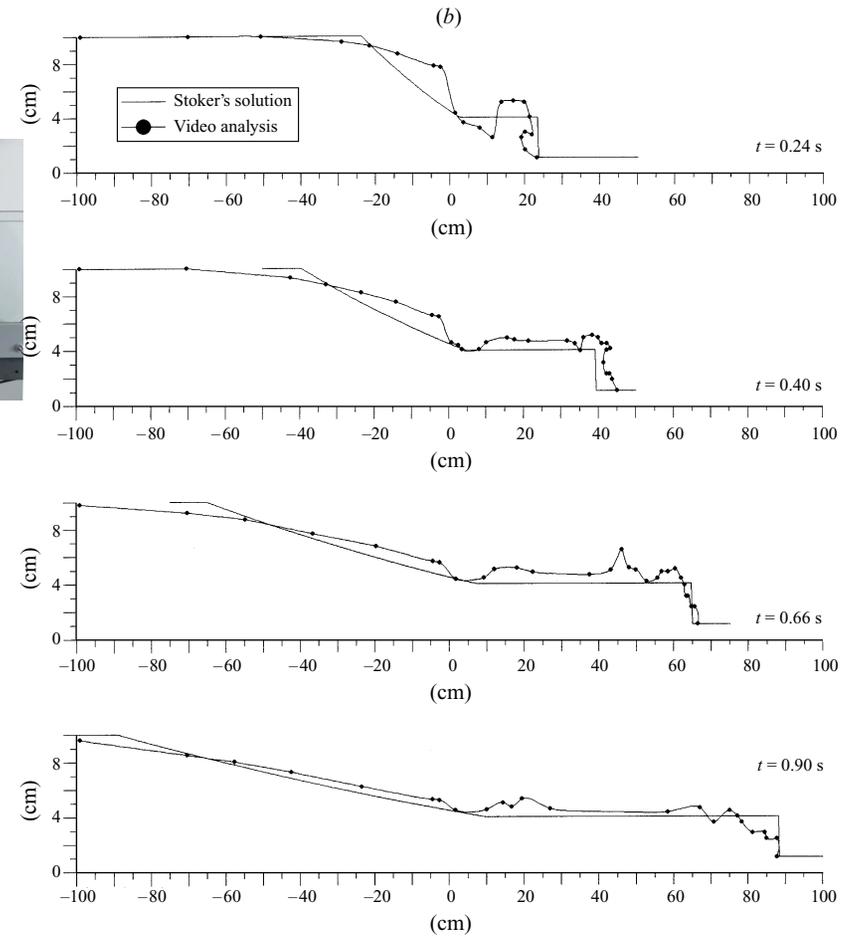


FIGURE 67 – Comparaison expérience / solution analytique JFM 1998 The initial Stages of a Bam-Break Flow, Stansby et al

Bien entendu, on peut préférer se donner le rapport d'eau entre l'aval et le lac : $\frac{h_0}{h_L} = \bar{h}_{aval}$, et la hauteur intermédiaire de la fin d'éventail au choc $\frac{h_2}{h_L} = \bar{h}_{inter}$

$$\frac{\bar{h}_{aval} - \bar{h}_{inter}}{\sqrt{\bar{h}_{aval}\bar{h}_{inter}}} \frac{\sqrt{\bar{h}_{aval} + \bar{h}_{inter}}}{2} + 2\sqrt{\bar{h}_{inter}} = 2$$

et si on écrit $\bar{h}_{inter} = H\bar{h}_{aval}$, il faut résoudre

$$\bar{h}_{aval} = \frac{1}{\left(\frac{1-H}{2\sqrt{H}} \frac{\sqrt{1+H}}{2} + \sqrt{H}\right)^2}$$

Application numérique :

à Port à La Duc $h_1 = 0.30m$, $h_2 = 0.1m$, on a $W = 3.4km/h$ la vitesse de la rivière est de -1.4 m/s et l'eau monte à environ 0.15m/s.

à Saint Pardon $h_1 = 3.0m$, $h_2 = 2.5m$, on a $W = 17km/h$ la vitesse de la rivière est de -9 m/s et l'eau monte à environ 0.03m/s.

Cuve FC 80

Débit ($3,30E-04 m^3/s$) $h_1 = 9,50E-03 m$, $h_2 = 1,40E-02 m$ $Fr \sim 1.4$ $h_2/h_1 = 1,47 \pm 0,5$ la relation de Bélanger donne 1,57 (à 6%)

Débit ($20E-03 m^3/s$) $h_1 = 0.019 m$, $h_2 = 0.064 m$, $Fr \sim 3.04$ $h_2/h_1 = 3,37 \pm 0,5$ la relation de Bélanger donne 3.8 (14% d'errur)

11.8 Ressaut dans la cuve FC-80

Utilisation du Canal Hydraulique à Pente Variable de 5m "FC80" (TecQuipment) dans la salle Galilée de Sorbonne-U du Campus Pierre & Marie Curie, données et procédures des stages de L. Gengembre (L3) et D. Ruiz 2021 (M1).

Le débit est écrit sur l'écran de la cuve. Afin de vérifier que la valeur sur l'écran du débitmètre est correcte on a aussi mesuré par ailleurs le temps nécessaire pour remplir un Bécher de 5L.

L'existence des deux types de ressauts, fixe et dynamique, nécessite deux méthodes. Pour ceux du premier type il faut deux vannes positionnées dans la cuve de la manière suivante : en premier lieu une vanne amont qui sera fixe pour toutes les mesures, puis à débit fixé, on joue avec la vanne aval afin de rendre le ressaut statique. Pour chaque débit il faut faire des petits ajustements avec la vanne aval.

Une fois le ressaut fixé, on réalise les mesures de hauteur :

- première méthode, analogique, on utilise le pointeau pour mesurer les hauteurs d'eau.
- seconde méthode, on prend une photo du ressaut puis on mesure les hauteurs d'eau avec le logiciel imageJ. Connaissant l'espace entre deux vis (distance de 15 cm) qui sert pour créer une échelle, on mesure la distance du fond de la cuve à la surface de l'écoulement. L'illustration a été réalisée sur Paint, d'où l'imprécision des traits pour les hauteurs h_1 et h_2 .

Pour visualiser le second type de ressaut, le ressaut dynamique, il suffit d'utiliser une seule vanne, de définir un débit puis de fermer brusquement cette vanne. On filme alors le ressaut qui parcourt la cuve puis on utilise le logiciel *imageJ* pour mesurer la position du ressaut pour deux images successives. Connaissant le nombre d'images par seconde de la caméra on trouve ainsi la vitesse du ressaut.

Exemples de tracés de la relation de Bélanger liant les hauteurs et le Froude relatif pour un ressaut comparé à des expériences.

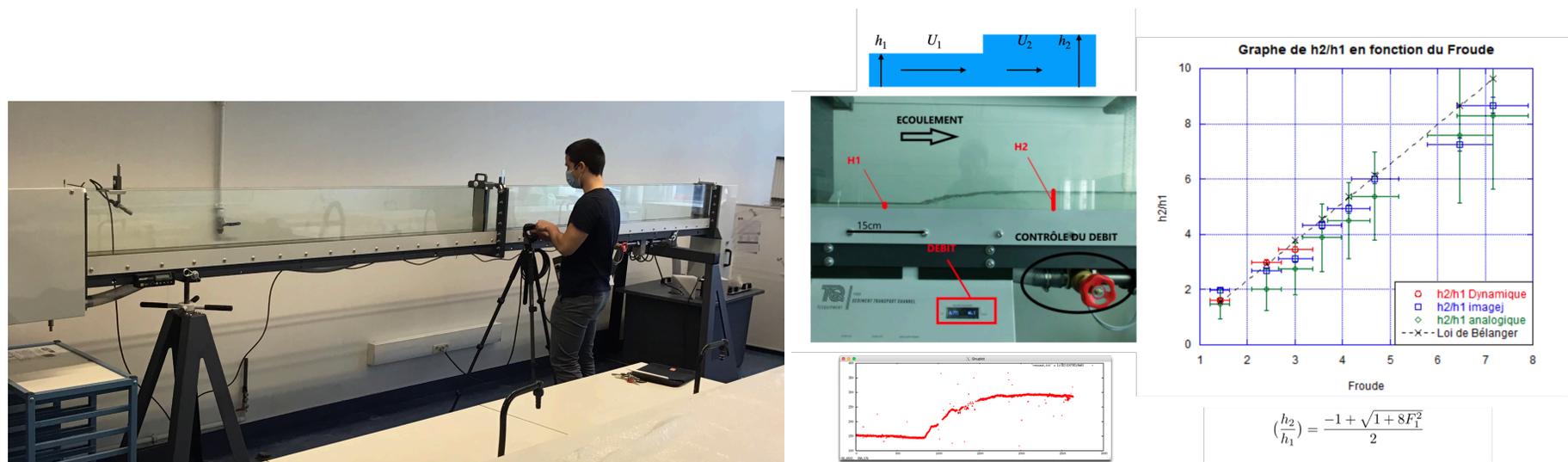


FIGURE 68 – Données et procédures de L. Gengembre et D. Ruiz 2021 pour vérifier la relation de Bélanger.

12 Influence de la profondeur, Equation KdV, Mascarets

12.1 Rappel rapide des ondes de surface

Jusqu'à présent, il était question de couche mince pour l'écoulement, rappelons que dans la §8.2 nous avons discuté les dégénérescences des équations de Saint-Venant suivant l'échelle longitudinale. Nous avons (§8.2) progressivement réduit l'échelle longitudinale, d'abord très très longue, c'était le problème de l'onde d'inondation, un poil plus courte, mais toujours longue, c'était l'onde de crue diffusante, diminuant l'échelle longitudinale tout en restant longue, c'était les équations de Saint-Venant non visqueuses... La question se pose maintenant de savoir ce qu'il se passe si on continue à diminuer la longueur longitudinale jusqu'à se rapprocher de la profondeur... Nous testons ici la limite de la description en couche mince.

Lorsque la profondeur est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, nous savons modéliser et décrire le phénomène, dans le cas des petites perturbations : c'est le problème de la houle de Airy : (<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEhoule.pdf>). Nous avons vu l'équation de dispersion pour la houle simple, on a vu que pour des ondes de surface, il faut chercher la solution du problème de Euler linéarisé

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

sous forme d'onde $\exp(i(\omega t - kx))$ avec à la surface pour la perturbation de pression $p = \rho g \eta$.

Nous allons partir de cette description et regarder ce qu'il se passe lorsque $\lambda = 2\pi/k$ devient plus grand que h_0 (ou si on veut kh_0 de plus en plus petit). On espère ainsi être dans ce régime intermédiaire où la profondeur est faible mais pas trop. Cela va nous donner des idées pour corriger les équations de Saint-Venant lorsque la profondeur devient pas trop faible.

On a trouvé pour le problème de la houle d'Airy des solutions en ondes telles que $\omega^2 = gk \tanh(kh_0)$. Si on développe dans le cas peu dispersif de l'eau peu profonde, à grande longueur d'onde $kh_0 \rightarrow 0$, on fait un développement limité en kh_0 de la tangente puis de la racine, (et $c_0^2 = gh_0$) :

$$\omega^2 = gk(kh_0 - \frac{(kh_0)^3}{3} + \dots) = (gh_0)k^2(1 - \frac{(kh_0)^2}{3} + \dots), \quad \text{dont les racines sont } \omega = \pm c_0 k(1 - \frac{(kh)^2}{6} + \dots).$$

On en déduit en prenant la valeur + des ondes qui se déplacent vers la droite. On la forme d'onde $\eta = \eta_0 \exp(i(\omega t - kx))$, avec $i\omega = (ik)c_0(1 + \frac{(h_0)^2}{6}(ik)^2 + \dots)$ ce qui veut dire que puisque $\partial_t \eta = i\omega \eta$ et que $\partial_x \eta = -ik\eta$ l'équation de dispersion linéarisée est celle correspondant au problème suivant (elle s'appelle équation de KdV linéarisée) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

Ce la veut bien dire que cette équation a pour relation de dispersion : $i\omega = c_0(ik)(1 + \frac{(h_0)^2}{6}(ik)^2)$.

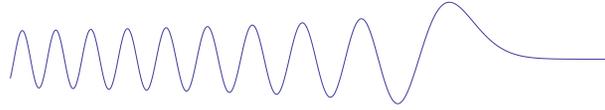
Nous allons résoudre cette équation en supposant que la surface déplacée $\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx$ est une donnée. La première idée est de se déplacer avec la vitesse c_0 et de poser $\xi = x - c_0 t$ et $\alpha = c_0 h_0^2$, l'équation devient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\alpha}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}.$$

Cette équation, se résout par la technique des solutions semblables. Par invariances par dilatations on cherche des solutions semblables... Consulter

$$\text{le changement d'échelle } \begin{cases} t = T\hat{t} \\ \xi = X\hat{\xi} \\ \eta = H\hat{\eta} \end{cases} \quad (27)$$

La conservation de la masse totale $\int_{-\infty}^{\infty} \eta d\xi$ devient $HX \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta} d\hat{\xi}$ mais comme on veut l'invariance $\int_{-\infty}^{\infty} \eta d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta} d\hat{\xi}$, donc $HX = 1$ préserve la conservation de la surface déplacée $\int_{-\infty}^{\infty} \eta dx = 1$. De même pour l'équation, si $T = X^3$ cela préserve l'invariance de l'équation qui s'écrit identiquement $\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} = -\frac{\alpha}{6} \frac{\partial^3 \hat{\eta}}{\partial \hat{\xi}^3}$. La variable de

FIGURE 69 – Onde dispersive à t fixé, fonction de x (fonction de Airy)

similitude est $\zeta = \frac{\xi}{t^{1/3}}$ et la surface est de la forme : $\eta = t^{-1/3} f(\frac{\xi}{t^{1/3}})$. Par substitution et dérivation la fonction $f(\zeta)$ vérifie $-\alpha/6 f''' = -\zeta f'/3 - f/3$. En intégrant, et comme f est nulle à l'infini, on a : $\alpha f'' = 2\zeta f$.

La solution de $y''(x) = xy(x)$ avec $y(\infty) = 0$ est $y = Ai(x)$ la fonction d'Airy, de plus $\int_{-\infty}^{\infty} Ai(x) dx = 1$. On a donc la solution pour $f = (2/\alpha)^{1/3} Ai((2/\alpha)^{1/3} \zeta)$, puisque $\xi = x - c_0 t$ la solution est au final :

$$\eta(x, t) = \left(\frac{2}{c_0 h_0^2 t}\right)^{1/3} Ai\left[\left(\frac{2}{c_0 h_0^2}\right)^{1/3} \frac{(x - c_0 t)}{t^{1/3}}\right].$$

Nous allons retrouver ce résultat autrement dans la suite.

12.2 Equation KdV (Korteweg-de Vries)

Si maintenant on se place dans une configuration avec "un peu" de non linéarité et "un peu" de dispersion, on peut en première approximation additionner les deux effets. C'est la fameuse équation KdV. Les effets de dispersion qui tendent à détruire le paquet d'onde sont compensés par les effets linéaires qui font se raidir et se ramasser la vague.

La non linéarité a été vue en §10.6, pour une onde se déplaçant vers la droite ($u - 2\sqrt{gh}$) est constant, donc si la surface n'est pas perturbée au loin ($u = 0, h = h_0$), on peut exprimer u par la conservation de l'invariant de Riemann : $u - 2\sqrt{gh} = 0 - 2\sqrt{gh_0}$ donc $u = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}$. En substituant dans l'une ou l'autre des équations du mouvement on a vu que

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

puis on a linéarisé, ce qui a donné comme équation d'advection de l'élévation :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3\eta}{2h_0}\right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

En ajoutant directement à cette équation la contribution dispersive $\frac{c_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$ on a :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h_0} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h_0^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

Cette équation possède la bonne non linéarité et a aussi été construite de manière à obtenir pour une onde $e^{i\omega t - kx}$ la relation de dispersion : $i\omega = (ik)c_0 \left(1 + \frac{(h_0)^2}{6} (ik)^2\right)$ qui est la bonne approximation à l'ordre $(h_0 k)^2$.

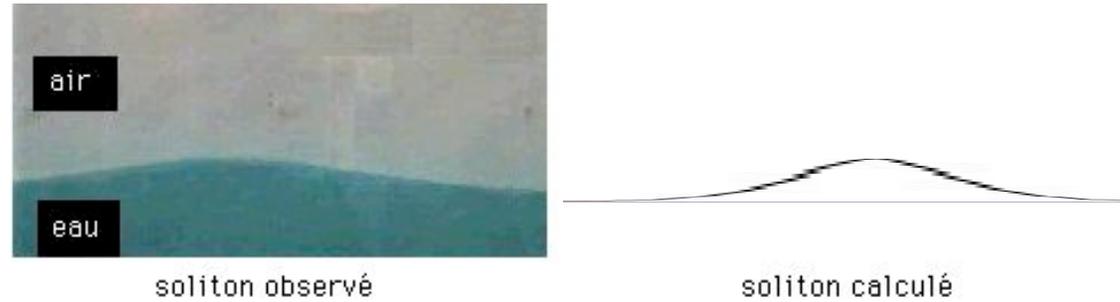


FIGURE 70 – Soliton observé dans une cuve à Vague au Palais de la Découverte <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/solitongd.mov>

12.3 Ondes Solitaires

Une solution de l'équation Korteweg-de Vries s'obtient en cherchant des solutions de la forme $f(x - ct) = f(s)$, par substitution et intégration :

$$f'' = 6cf - 9/2f^2 + cste$$

si pour $s \rightarrow \pm\infty$ la déviation de la surface libre f et ses dérivées sont nulles :

$$(f')^2 = 6cf^2 - 3f^3$$

Il est alors facile de voir qu'une solution de la forme $\alpha / \cosh(\beta s)^2$ convient !! avec $\alpha = 2c$ et $\beta = (3c/2)^{1/2}$.

La solution de $(f')^2 = 6cf^2 - 3f^3$ est donc

$$f(x - ct) = \frac{2c}{\cosh[(3c/2)^{1/2}(x - ct)]^2}$$

C'est l'onde solitaire :

$$\eta = \frac{a}{\cosh[(3a/4h^3)^{1/2}(x - (1 + \frac{a}{2h})t)]^2}$$

ou, on peut aussi trouver des ondes cnoïdales... succession de bosses...

12.4 Equation de Boussinesq

Il s'agit en fait de Saint Venant avec un ajout de terme dispersif,

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \end{cases}$$

Ces équations permettent de retrouver KdV et sont donc plus générales.

Le terme supplémentaire vient du fait que la pression n'est plus hydrostatique à cause de l'accélération verticale. Linéarisons autour d'un niveau d'eau h_0 . Décomposons la pression en une pression hydrostatique plus une perturbation qui va varier avec y : $p = \rho g(h - y) + \Pi$. Cette perturbation est liée à la variation de

quantité de mouvement transversale pour l'instant oubliée : $-\frac{\partial \Pi}{\partial y} \simeq \rho \frac{\partial v}{\partial t}$, Par l'équation de continuité : $v \simeq -y \frac{\partial u}{\partial x}$, on substitue dans $\rho \frac{\partial v}{\partial t} \simeq -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g$ qui est $-\frac{\partial \Pi}{\partial y}$.
On intègre $\Pi(y) \simeq \rho \frac{y^2 - h_0^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ (on a $\Pi(h) = 0$). Cette pression est intégrée une nouvelle fois sur l'épaisseur (les équations de St Venant sont intégrées sur la hauteur) :

$$\int_0^y \Pi dy \simeq \rho \left[\left(\frac{y^3}{6} - \frac{y h_0^2}{3} \right) \right]_0^{h_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \text{ ainsi } \int_0^{h_0} \Pi dy \simeq -\rho \left(\frac{h_0^3}{3} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

C'est ce terme dérivé en x qui modifie le mouvement longitudinal :

$$-\int_0^{h_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x} dy \simeq \frac{1}{3} \rho h_0^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$$

Le système final

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} = -gh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h_0^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \end{cases}$$

L'équation de dispersion

$$i\omega h_1 = ih_0 k u_1, \quad i\omega u_1 = +igk h_1 - i\omega k^2 \frac{h_0^2}{3} u_1$$

donc $\omega^2(1 + k^2 \frac{h_0^2}{3}) = gh_0 k^2$, la relation de dispersion est :

$$\omega = \frac{\sqrt{gh_0 k}}{\sqrt{1 + k^2 \frac{h_0^2}{3}}}$$

donc pour k proche de 0 :

$$\omega = \sqrt{gh_0} \left(k - k^3 \frac{h_0^2}{6} + \dots \right)$$

Mais souvenons nous que la relation de dispersion exacte (*Airy Swell*) devient

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh_0)} \simeq \sqrt{gk(kh_0 - k^3 \frac{h_0^3}{3} + \dots)} \simeq k \sqrt{gh_0} \left(1 - k^2 \frac{h_0^2}{6} + \dots \right)$$

donc jusqu'à l'ordre 3 on retrouve la même relation dans Boussinesq et la Houle de Airy.

Ces équations sont plus ou moins les équations de Serre (Serre Green Nagdhi) :

"Nous, les mathématiciens, on ne coûte pas cher. Pour travailler, il suffit d'un crayon, de papier et d'un ordinateur. Ah, j'oubliais, d'une corbeille à papier. C'est fou ce que l'on peut écrire comme bêtises", s'amuse Jean-Pierre Serre (1926-), premier lauréat du prix Abel, 2006 Oslo (Norvège).

12.5 Mascaret

Lorsque la mer monte dans une embouchure de rivière, la marée étant de plus en haute, elle peut créer par accumulation des non linéarités un ressaut qui remonte l'écoulement, voir figure 65. Si la profondeur du fleuve est adéquate, le ressaut se casse par la dispersion et un train d'onde apparaît. C'est ce que l'on observe sur la figure 74.

Bien plus en amont, ce mascaret finit par être détruit, un seul soliton peut être éventuellement observé.

http://www.epoc.u-bordeaux.fr/indiv/bonneton/publications/Talks/Bonneton_Cargese_29mai-2juin2017.pdf

Mascaret, mise en oeuvre numérique :

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/ressaut_mascaret.c

FIGURE 71 – Un ressaut se transforme en mascaret à cause d'une variation légère de profondeur, photo PYL, [click to launch the movie, Adobe Reader required]



FIGURE 72 – Quelques mètres plus loin en amont le ressaut se casse..



FIGURE 73 – ... pour devenir un mascaret



photo (C) Pierre-Yves Lagrèe

Le Mascaret à Saint Pardon sur la Dordogne en août 1997

FIGURE 74 – Mascaret à Saint Pardon sur la Dordogne, Photo PYL

Cinquième partie

Résolution numérique avec *Basilisk*

13 Résolution numérique

13.1 Résolution numérique : schémas pour les équations 1D

Les équations ressemblent beaucoup aux équations de la dynamique des gaz. De nombreuses méthodes ont été proposées pour ces équations. On consultera principalement les ouvrages de Eleuterio Toro ou de Randall LeVeque.

Voir le fichier http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/code_C_saintvenant.pdf

qui présente sommairement les Volumes finis appliqués à la résolution 1D de Saint-Venant.

13.2 Exemples de codes

De nombreux codes existent sur le marché. Rappelons ici que ce qui est demandé aux lecteurs de ce cours est de savoir ce que sont les équations de Saint-Venant, ce qu'elles modélisent, quelles sont les approximations et les limites, quels sont les problèmes typiques que l'on peut résoudre avec. Connaître les "archétypes", c'est à dire les exemples simples techniquement, compréhensibles, et assez généraux (le fleuve, le ressaut, la rupture de barrage...).

D'un point de vue numérique, il s'agit de connaître un algorithme de base et de comprendre que les conditions aux limites jouent aussi un rôle important dans la résolution, et d'avoir la notion de convergence vers la solution si on met beaucoup de points.

C'est donc la démarche que nous employons, partant du principe que si l'on a compris ce qui vient d'être dit ci dessus et si en plus on sait faire tourner un code comme *Basilisk* alors, on sait pratiquement faire tourner tous les codes.

Le plus important est d'avoir un oeil critique sur le résultat : bien comprendre le résultat numérique obtenu, pouvoir l'interpréter, voir ses limites.

- Code NEMO <http://www.nemo-ocean.eu/>
- Code TELEMAC. <http://www.opentelemac.org/>
- Code SLIM <http://sites.uclouvain.be/slim/>
- Code MARS3D <http://wwz.ifremer.fr/mars3d>
- FreeFem++ <http://www.freefem.org/ff++/>
- Code *Gerris* <http://gfs.sourceforge.net/>
- Code *Basilisk* <http://basilisk.fr>
- Code FunWave- <http://chinacat.coastal.udel.edu/programs/funwave/funwave.html>
- Code Clawpack <http://depts.washington.edu/clawpack/>
- Code FullSWOF <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/FullSWOF/>
- Code HEC RAS <http://www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras/>
- Code AIR <https://www.floodmodeller.com/en-us/products/desktop/r/flood-modeller-pro>
- Code MIKE <http://dhigroup.com/MIKECUSTOMISEDbyDHI.aspx> Saint-Venant,
- Code MIKE <http://www.mikebydhi.com/Products/WaterResources/MIKEFLOOD.aspx> couplage hydraulique 1D et 2D (payant).
- Code MIKE <http://www.mikebydhi.com/Products/WaterResources/MIKESHE.aspx> Ruissellement sous forme onde diffusive, rivière en Saint-Venant (ou diffusive ou cinématique).
- Code SWASH <http://swash.sourceforge.net/> Simulating WAVes till SHore, (swash=clapottis)

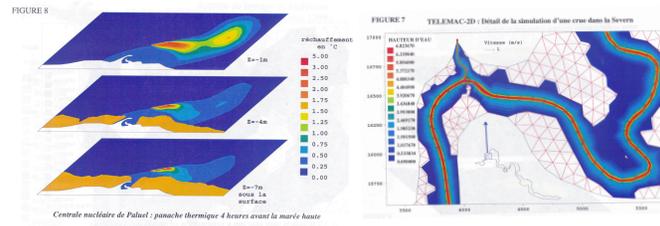


FIGURE 75 – Calcul EDF [24] effectués à l'aide du code TELEMAC d'EDF, dispersion d'eau chaude dans un port et crue de la Severn. Cette dernière rivière est célèbre pour son mascaret, voir plus loin.

-Code ISIS <http://www.isisuser.com/isis/isis1D.asp>
Saint-Venant 1D et 2D

on citera aussi DassFlow <http://www-gmm.insa-toulouse.fr/monnier/DassFlow/>

- Suite infoworks <http://geomod.net/gmd-societe/ce-accueil/ce-logiciels/ce-log-suite-infoworks/ce-log-infoworks-rs/>

- Code VolcFlow http://wwwobs.univ-bpclermont.fr/lmv/perso/Kelfoun_Karim/VolcFlow/VolcFlow.html

- Code Bing

- Code EPANET www.epa.gov <http://hmf.enseeiht.fr/travaux/beiepe/book/export/html/1002>

- Code *Gerris* <http://gfs.sourceforge.net/>

- Code *Basilisk* <http://basilisk.fr>

- Code "mascaret" code Saint Venant EDF avec avec section

- Code "COURLIS" Saint Venant "mascaret" EDF avec avec section érodable

- Code IBER <https://www.gidsimulation.com/wp-content/uploads/p148.pdf>

-Code SWMM (écoulement pour réseau d'eau pluviale) <https://www.epa.gov/water-research/storm-water-management-model-swmm>

14 Résolution numérique avec *Basilisk*

14.1 Télécharger le code

Télécharger le code *Basilisk* sur la page source <http://basilisk.fr>
 le plus simple est de télécharger `wget http://basilisk.fr/basilisk/basilisk.tar.gz`
 ou sur Mac `curl http://basilisk.fr/basilisk/basilisk.tar.gz >> basilisk.tar.gz`
 puis `tar xzf basilisk.tar.gz`
 Il est bon de modifier son fichier `HOME/.bashrc` :

```
cd basilisk/src
export BASILISK=$PWD
export PATH=$PATH:$PWD

cp config.osx config
make
```

le code est alors compilé et prêt à être utilisé.

La page d'installation <http://basilisk.fr/src/INSTALL>, la suivre scrupuleusement. Noter que `make -k` force la compilation sans s'arrêter sur des erreurs intermédiaires.

15 Exemples

15.1 Equation d'advection

Examinez le code <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/BASIC/advecte1.c> en *Basilisk* ou le code <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/BASIC/advecte1c.c> en C standard.

15.2 Equation de l'onde d'inondation

Examinez le code <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/floodwave.c> en *Basilisk*
<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/PYTHON/flood.py> en Python.

15.3 Exemple de la rupture de barrage

Sur un fond plat, on examine le Dam Break. Examinez le code <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/damb.c> en *Basilisk* ou le code <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/svdb.c> en C standard.
 ou en Python <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/PYTHON/svdb.py> On vérifie la solution en x/t .

Sur un fond incliné de pente constante, on vérifie la solution de Ancey [4] http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/damb_slope.c

15.4 Exemple du ressaut stationnaire

Le ressaut est testé dans <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/belanger.c> en *Basilisk*

15.5 Exemple d'arrivée d'une "vague" sur la côte

Une vague se propage en eau peu profonde de profondeur constante et arrive sur une plage en pente douce à droite : "how many seas must a white dove sail before she sleeps in the sand?"

voir le fichier : <http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/slope.c>

Un autre exemple simple de vague se cassant sur une plage : http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/slope_deferle1D.c

captation vidéo <https://dropsu.sorbonne-universite.fr/s/Jpm5XNrF7FbzMbG>

15.6 Exemple de l'écoulement sur une bosse à différents Froude

De exemples de résolution numérique *Basilisk* à différents Froude (.2 , .4 , 0.65 , 2) pour l'écoulement sur une bosse sont dans http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/bump_trans.c

15.7 Tas Visqueux s'effondrant sur une surface plane (tas de Huppert, premier problème de Huppert), onde de crue diffusante

Cet exemple est extrait de Huppert [25] "The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface" J . Fluid Mech. (1982), vol. 121, p p . 43-58

Il s'agit d'étudier avec les équations de Saint-Venant la chute d'un tas initialement au repos et rectangulaire sous l'action de la gravité et avec un frottement visqueux de Poiseuille

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{g}{3\nu} \frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ qui est de la forme } \frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} h^3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ ou aussi } \frac{\partial h}{\partial t} - (k/4) \frac{\partial^2 h^4}{\partial x^2} = 0$$

Par dilatations des échelles l'invariance par changement d'échelle on résout et on montre que la solution finale est de la forme *selfsimilar*

$$h(x, t) = t^{-1/5} (9/10(C - (xt^{-1/5})/2))^{1/3} \text{ avec } C = \frac{3 \cdot 10^{2/5} \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\right)^{6/5}}{\pi^{9/5}}$$

Voir sur le web : http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous_collapse.c

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous_collapse_noSV.c

http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/viscous_collapse_ML.c

15.8 Tas de Huppert sur pente forte : onde de crue laminaire, second problème de Huppert

Cet exemple est extrait de Huppert [26] "Flow and instability of a viscous current along a slope" Nature volume 30 1982 p427

Les équations de Saint-Venant pour les pentes fortes telles que $|Z'| \gg \partial_x h$ alors $Q = -gZ'h^3/(3\nu)$ et, la masse devient

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{gZ'}{3\nu} \frac{\partial}{\partial x} h^3 = 0 \text{ de la forme } \frac{\partial h}{\partial t} - kh^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

la solution de est "simplement" pour $x < x_f$

$$h = t^{-1/3} \sqrt{(x)t^{-1/3}/k} = \sqrt{\frac{x}{kt}}$$

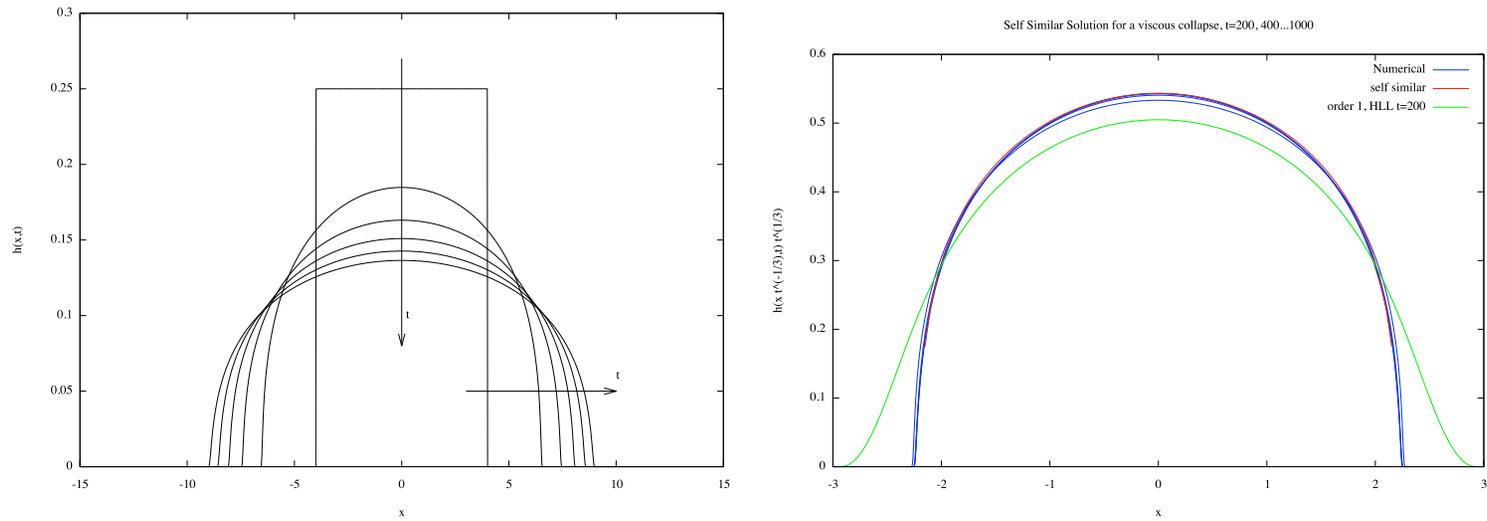


FIGURE 76 – Gauche Plot at $t=100,200,300\dots1000$ of $h(x, t)$ with *Basilisk*. Droite Plot at $t=100,200,300\dots1000$ of $t^{1/5}h(x/t^{1/5}, t)$ with *Basilisk* with a FV code order 1 HLL and the analytical solution $(3b^2/(10k)(1 - (\eta/b)^2))^{1/3}$.

On se donne une masse initiale $A = \int_0^{x_1} h(x, 0)dx$ qui se déplace entre $x_f t$, position du front et 0 le front arrière qui ne bouge pas, la masse est donc ultérieurement ce qui donne $x_f = (\frac{9A^2 kt}{4})^{1/3}$

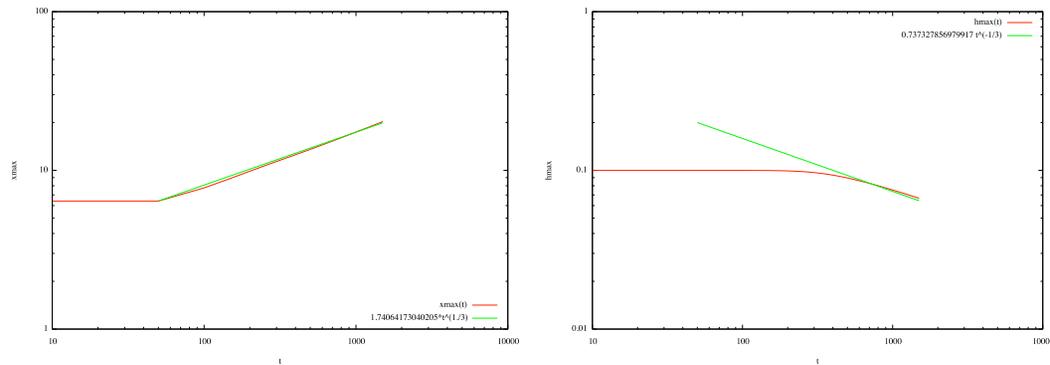


FIGURE 77 – x_{max} as function of time, h_{max} fonction of time

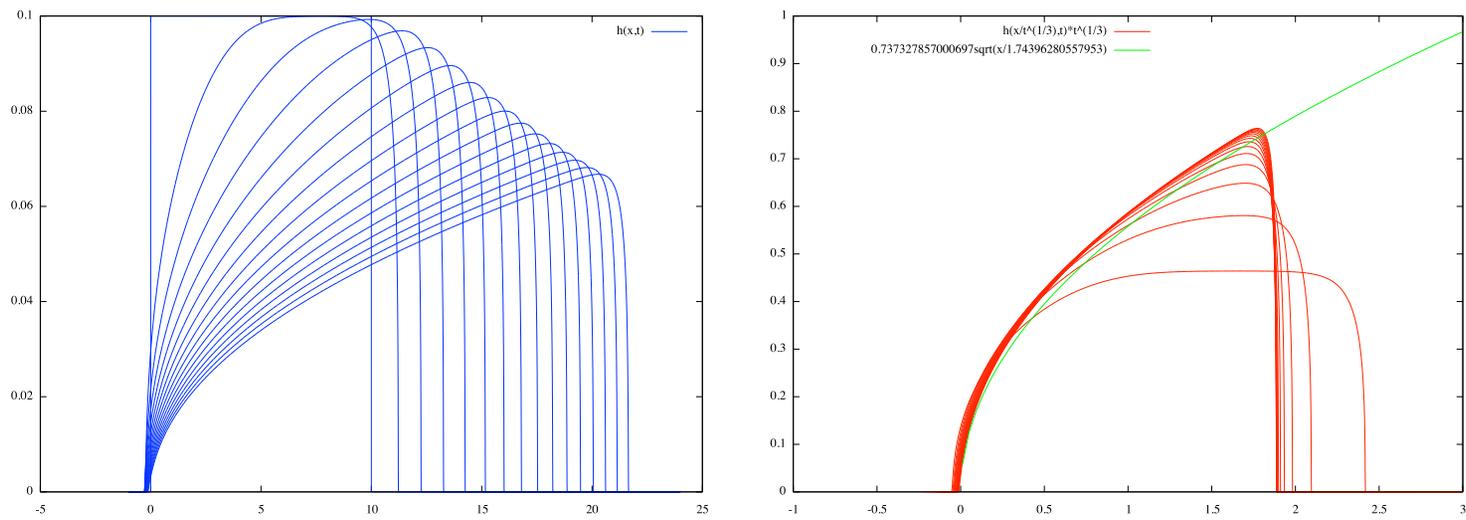


FIGURE 78 – **Gauche** Plot at $t=100,200,300\dots1500$ of $h(x,t)$ with *Basilisk*; **Droite** Plot at $t=100,200,300\dots1500$ of $t^{1/3}h(x/t^{1/3}, t)$ with *Basilisk*.

15.9 Exemple du Tsunami

Nous avons parlé plusieurs fois du tsunami en temps que solution simple de l'équation d'onde. Nous l'examinons ici sur un cas pratique en temps que solution du système de Saint-Venant dans une géométrie compliquée.

15.10 Exemples de Tsunamis simplifiés

Dans le directory <https://dropsu.sorbonne-universite.fr/s/FDYCyrjggdTcXzb> il y a 3 fichiers `tsuntunis_0.c`, `tsuntunis_1.c` et `tsuntunis.c` il faut avoir installé Basilisk et VLC.

- `tsuntunis_0.c` est un fichier avec un fond constant à -1000m,

Compilation :

```
gcc tsuntunis_0.c -lm -o tsuntunis_0
./tsuntunis_0
```

- `tsuntunis_1.c` est un fichier avec un fond variable 32m, -1000 et -2000m,

Compilation :

```
gcc tsuntunis_1.c -lm -o tsuntunis_1
./tsuntunis_1
```

- `tsuntunis.c` est le cas complet avec la topographie TopoT (trois fichiers à charger) :

```
kdt2kdt -v ./topoT
gcc tsuntunis.c /basilisk-darcs/src/kdt/kdt.o -lm -o tsuntunis
./tsuntunis
```

captation vidéo de 2022 expliquant les trois codes <https://dropsu.sorbonne-universite.fr/s/mNFX6F9dKJA4wS8>

15.11 Exemple du Tsunami complet

Récupérer la topographie :en suivant les instructions de

<http://gfs.sourceforge.net/wiki/index.php/Xyz2kdt>

attention le fichier qui représente le monde est très lourd bien utiliser `/Users/pyl/basilisk/basilisk/src/kdt/xyz2kdt -v etopo2` pour créer le "sol".
changer la position

```
// the domain is 54 degrees squared
LO = 45.;
// centered on 94,8 longitude,latitude
X0 = 15 - LO/2.;
Y0 = 40. - LO/2.;
```

```
event init (i = 0)
```

```
{
  terrain (zb, "/Users/pyl/basilisk/basilisk/src/test_pyl/DS_OK/WORD/etopo2", NULL);
```

```
  définir des jauges
```

```
Gauge gauges[] = {
  // file lon lat description
  {"coco", 96.88, -12.13, "Cocos Islands, Australia"},
  {NULL}
};
```

Le premier problème est de déterminer la source : c'est en fait le fond qui bouge très vite et qui déplace la masse d'eau,

il est d'usage d'utiliser le modèle d'Okada

```
http://www.bosai.go.jp/study/application/dc3d/DC3Dhtml_E.html
http://www.bosai.go.jp/study/application/dc3d/download/Okada_1985_BSSA.pdf
http://www.bosai.go.jp/study/application/dc3d/download/Okada_1992_BSSA.pdf
http://gerris.dalembert.upmc.fr/gerris/tmp/GUM/delaux.pdf
```

il est d'usage d'utiliser le modèle d'Okada

```
fault (x = 25.4, y = 36.43,
depth = 1.e3,
strike = 0, dip = 12, rake = 90,
length = 25e3, width = 25e3,
U = 18*4,
iterate = adapt);
```

length and width of the fault plane (typically in m or km),

latitude and longitude of some point on the fault plane, typically either the centroid or the center of the top (shallowest edge),

depth of the specified point below the sea floor,

strike, the orientation of the top edge, measured in degrees clockwise from North. Between 0 and 360. The fault plane dips downward to the right

dip, angle at which the plane dips downward from the top edge, a positive angle between 0 and 90 degrees.

rake, the angle in the fault plane in which the slip occurs, measured in degrees counterclockwise from the strike direction. Between -180 and 180

slip > 0, the distance (typically in cm or m) the hanging block moves relative to the foot block, in the direction specified by the rake. The \ha

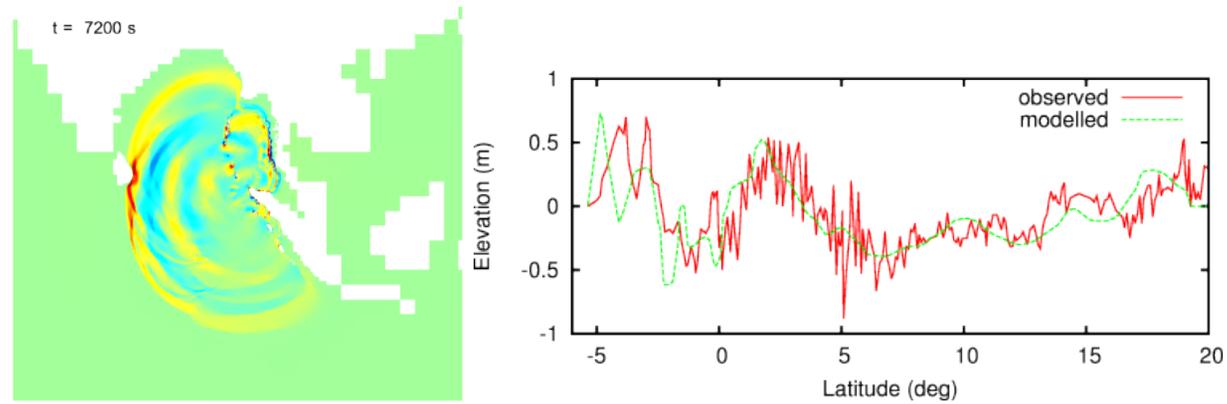


FIGURE 79 – exemple de calcul du Tsunami de décembre 2004. Elévation calculée à 7200s de l’onde rouge : +2 m bleu -2. A droite observation du Tsunami par le satellite Jason-1 comparé et calcul de la simulation. <http://gerris.dalembert.upmc.fr/gerris/examples/exemples/tsunami.html>

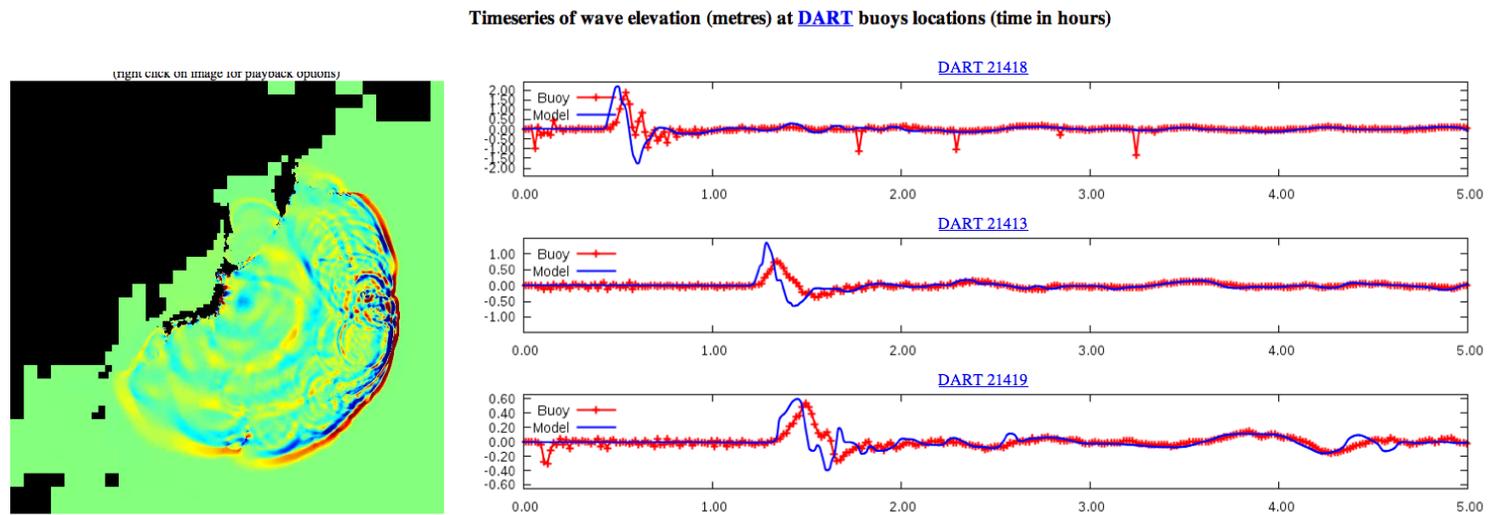


FIGURE 80 – exemple de calcul du Tsunami du 11 mars 2011. Elévation calculée à 7200s de l’onde rouge : 0.5 m bleu -0.5m. A droite observations du Tsunami par les bouées DART dans le pacifique, calcul \mathcal{G} erris. <http://gerris.dalembert.upmc.fr/gatm/index.php?id=usc0001xgp-subfaults>

15.12 Exemple des marées en Bretagne

Fortement inspiré de l'exemple des Tsunamis, calcul de la marée http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/maree_bretagne.c

15.13 Exemple d'inondations

15.13.1 Cannes 2015

<http://basilisk.fr/sandbox/b-flood/Cannes.c>

15.13.2 La Roya 2020

16 Conclusion pour la résolution numérique

Consulter le fichier http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/code_C_saintvenant.pdf qui présente sommairement les Volumes finis appliqués à la résolution 1D de Saint-Venant et quelques exemples de base.

Bien entendu, les pages de *Basilisk*, <http://basilisk.fr/> fourmillent d'exemples instructifs.

Sixième partie

Granulaires, Neige, Glace, boue...

17 Introduction

Nous venons de voir des écoulements d'eau en couche mince, ils sont décrits par les équations de Saint-Venant en bonne première approximation (tant que la pression reste hydrostatique et tant que la profondeur est assez faible par rapport au développement longitudinal et que la pente n'est pas trop forte). Nous avons considéré le cas du fluide Newtonien laminaire puis turbulent. Souvent dans la nature, la pente peut être plus forte, et surtout ce n'est pas uniquement de l'eau qui coule mais un mélange complexe de débris variés. La rhéologie de ces fluides n'est pas encore bien connue ni modélisée. Pour ces fluides plus complexes, on va cependant utiliser les mêmes hypothèses et essayer d'écrire le frottement τ à la paroi en fonction de Q et h et de coefficients pertinents.

Ces fluides étant "collants", il peut y avoir un seuil τ_{seuil} tel que si les contraintes sont sous ce seuil, alors le fluide ne bouge pas (cas de la boue, des rochers, du sable...). Il faut que $\tau > \tau_{seuil}$ pour que le mouvement se produise. Dans le cas où il y a beaucoup de roches, le caractère "solide" va l'emporter dans le frottement. On utilisera la loi d'Amontons-Coulomb :

$$(\text{Force Tangentielle}) = (\text{Coefficient}) \text{ fois } (\text{Force Normale}), \text{ soit en contraintes : } \tau = \mu \rho g h$$

où μ est le coefficient de friction et où la contrainte normale est prise égale à la pression hydrostatique $\rho g h$ en première approximation (il existe certaine controverse à ce sujet liée au fait que l'on parle d'un solide et non d'un fluide, mais nous allons au plus simple). Pour les granulaires secs, ce sera en effet une bonne description, pour la neige, il faudra y rajouter une partie dynamique.

18 Equations de Saint-Venant pour les fluides plus complexes : granulaires & neige, ...

Le système que nous considérons est celui des Equations de Saint-Venant (CRAS 1871 Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant, *Shallow Water*) :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x Q = 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left[\Gamma \frac{Q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right] = -gh \partial_x Z - \frac{\tau}{\rho} \end{cases}, \quad (28)$$

avec $h(x, t)$ est la hauteur d'eau, $u(x, t)$ la vitesse moyenne, $Q(x, t) = h(x, t)u(x, t)$ le flux, Γ facteur de forme, τ frottement au fond et $Z(x)$ est la "topographie" ou forme du fond, g la gravité...

On va garder ces équations où en fait les hypothèses de rhéologie n'ont pas été appliquées (seulement couche mince, faible angle, moyenne en épaisseur). On a besoin du facteur de forme Γ , mais on prendra 1, on a surtout besoin de modéliser τ le frottement à la paroi. On remarque ici, que le détail de τ dans l'épaisseur est sans importance. On a besoin de τ à la paroi uniquement.

18.1 Pour un granulaire.

Les granulaires sont les milieux constitués de particules de plus d'une dizaine de micromètres, le sable, le gravier, les rochers.... En dessous, il s'agit des poudres qui ont des propriétés différentes (plus collantes, et plus proches d'un gaz). La modélisation de leur écoulement passe par Saint-Venant et a été proposé par Savage et Hutter. Ils se sont inspirés du frottement de Coulomb liant la contrainte tangentielle τ à la contrainte normale $\rho g h$. On définit un coefficient de friction μ . Les travaux originaux de Savage et Hutter 1991 prenaient un μ constant et $\Gamma = 1$. C'est une bonne première approximation. Le coefficient de friction μ est compris entre 0.2 et 0.5 suivant les matériaux et on a la relation

$$\tau = \mu \rho g h$$

Un exemple d'effondrement d'un tas granulaire avec Saint-Venant et $\Gamma = 1$
<http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/savagestaron.c>

Plus récemment, il a été montré (GRDMiDi) que le coefficient μ peut être variable et qu'il fonction de $I = (d/h)5Q/2h/\sqrt{gh}$ (nombre sans dimension que l'on peut construire, on y reconnaît d/h et un Froude), voir <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/mainM2EMN.pdf>. C'est la rhéologie du $\mu(I)$, Il est compris entre 0.2 et 0.5 suivant les matériaux et on a la relation

$$\tau = \mu(I)p, \text{ où } \mu(I) = \mu_s + \frac{\Delta\mu}{\frac{I_0}{I} + 1} \text{ avec } \mu_s = .3, \Delta\mu = .26, I_0 = .3 \text{ et } p = \rho gh$$

Le profil de base est calculable, il s'appelle profil de Bagnold (on ne donne pas de détail ici, mais c'est un peu la contrepartie du profil de Poiseuille, on peut donc estimer Γ , avec l'écoulement de Bagnold)

$$\Gamma = \frac{5}{4} \text{ et } \tau = \mu(I)\rho gh \frac{|Q|}{Q}$$

Un exemple de cette modélisation est proposé dans le cas de propagation du front d'une avalanche de granulaires secs. On montre que ne pas prendre $\Gamma = \frac{5}{4}$ provoque une erreur http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/front_poul_ed.c
 Mais en pratique, on prend souvent $\Gamma = 1$

18.2 Pour de la neige

On modifie le μ précédent, on garde un μ_0 constant pour une friction solide $\rho gh\mu_0$ et on ajoute une friction de type fluide en carré de la vitesse et ξ un coefficient. On écrit $\rho(g/\xi)u^2 = \rho(g/\xi)(Q/h)^2$ pour cette contribution. La somme est la loi de Voellmy (μ_0 valeur typique 0.2 et ξ valeur typique 500 à 1000m/s²)

$$\Gamma = 1 \text{ et } \tau = \rho gh(\mu_0 + \frac{1}{\xi} \frac{Q^2}{h^3}) \frac{|Q|}{Q}$$

Avalanche de neige : initiation (surcharge, température) sur pente forte, puis propagation. Enfin arrêt

Avalanches de poudre peu dense (aérosols) 1 à 20kg/m³, épaisseur de 5 à 100m, 10 à 200 m/s ne suit pas forcément la topo

Avalanches denses (avalanches coulantes) 150kg/m³ à 400 kgm³, 60m/s suit la topo

Le départ de l'avalanche est supercritique

18.3 Les glaciers

En première approximation on dit que ce sont des "fluides en loi de puissance". Une classe importante de fluides non Newtoniens est en effet celle des fluides en loi de puissance (la contrainte est une puissance du cisaillement, ici u/h en moyenne). Par définition, les fluides en loi de puissance sont tels que la contrainte locale est une puissance du cisaillement local : $\tau = A \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n$ donc on a alors $u(x, z, t) = \left(\frac{Q}{h} \right) \frac{1+2n}{n+1} \left(\left(1 - \left(1 - \frac{z}{h} \right)^{(n+1)/n} \right) \right)$ on peut en déduire

$$\Gamma = \frac{2(1+2n)}{2+3n} \text{ et } \tau = c_n \mu_n \left(\frac{Q}{h^2} \right)^n \text{ avec } c_n = \left(\frac{1+2n}{n} \right)^n.$$

ex $n = 1$ on a $\Gamma = 6/5$ and $c_n = 3$, (cas laminaire) $n = 2$ on a $\Gamma = 5/4$, ...

En pratique pour un glacier $n = 1/3$ c'est la loi de Glen. L'écoulement est tellement lent que l'on ne se soucie pas de Γ , on est dans la description de l'onde d'inondation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0; \text{ avec } c_n \mu_n \left(\frac{Q}{h^2} \right)^n = -gh\partial_x Z - gh\frac{\partial h}{\partial x}$$

Un modèle correspondant à la lente avancée des glaciers a été proposé par M. W. Mahaffy 1976, l'image suivante montre un exemple de répartition de la glace (A three-dimensional numerical model of ice sheets : Tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories, JGR). La solution autosemblable a été écrite par P. Halfar 1981 ("On the Dynamics of the Ice Sheets" JGR).

voir <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/mainM2EMN.pdf>.

18.4 La boue

La boue peut être considérée aussi comme un fluide en loi de puissance $\tau = c_n \mu_n \left(\frac{u}{h}\right)^n$ avec $0.1 < n < 0.4$. C'est la description de Ng et Mei. (1994), "Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid" Fluid Mech. C'est aussi envisagé dans Lervolino Vacca & Di Cristo. Simplified Wave Models Applicability to Shallow Mud Flows Modeled as Power- Law Fluids Mountain Science · (2015) DOI : 10.1007/s11629-014-3065-6.

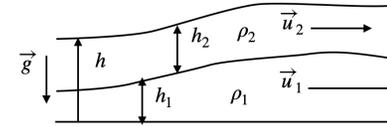
Cependant, une modélisation plus fine de la boue doit tenir compte du fait qu'il existe un seuil en contrainte pour l'écoulement τ_{seuil} . Les nombreux articles de Balmforth évoqués dans <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/mainM2EMN.pdf> montrent alors qu'il faut analyser plus précisément le profil de vitesse pour écrire l'onde cinétique diffusante.

cette section est à rapprocher de §6.7

19 Equations bicouches et multicouches

19.1 Equations

Les écoulements naturels sont souvent stratifiés en densité ρ , par exemple à cause de la température, ou de la salinité, ou de la charge en sédiments... Cette variation de densité va modifier l'écoulement. Pour simplifier nous examinons le cas le plus simple avec deux couches (numérotées 1 et 2) de densités différentes constantes (ρ_1 et ρ_2) s'écoulant l'une au dessus de l'autre (en effet souvent, la stratification est emportée passivement), la hauteur totale est $h(x, t)$. Chaque couche a une vitesse moyenne u_1 et u_2 . Nous supposons aussi le fluide parfait. Bien entendu, nous restons dans la description onde longue des équations d'Euler, et nous allons intégrer sur chaque épaisseur $h_1(x, t)$ et $h_2(x, t)$ les équations en couche mince. Cette section est porche de 6.7, la numérotation y est différente, les densités sont différentes, mais les idées sont les mêmes : les couches on un déplacement Eulérien.



Configuration en deux couches de hauteur h_1 et h_2 glissant l'une sur l'autre avec des vitesses moyennes différentes, on pourrait mettre un fond non plat en $y = Z_b$, la surface libre est $\eta = Z_b + h$.

19.1.1 Pression

On a besoin de calculer la pression qui est bien sûr hydrostatique dans le cadre couche mince que nous continuons à adopter, on écrit que :

$$0 = -\partial_y p - \rho_1 g, \text{ et } 0 = -\partial_y p - \rho_2 g,$$

on intègre, on écrit que la pression est 0 à la surface en $y = \eta = h_1 + h_2 + Z_b$, on écrit que la pression est continue au changement d'interface, on trouve que pour :
pour $Z_b + h_1 < y < Z_b + h_1 + h_2$ on a $p = \rho_2 g(h_1 + h_2 + Z_b - y)$, puis $Z_b < y < Z_b + h_1$ on a $p = \rho_1 g(Z_b + h_1 - y) + \rho_2 g h_2$.

On remarque que bien évidemment le gradient de pression $\frac{\partial}{\partial x} p$ est indépendant de y .
pour $Z_b + h_1 < y < Z_b + h_1 + h_2$ on a $\frac{\partial}{\partial x} p = \rho_2 g(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial x} h_2 + \frac{\partial}{\partial x} Z_b)$, puis :

$$Z_b < y < Z_b + h_1 \text{ on a } \frac{\partial}{\partial x} p = \rho_1 g(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial x} h_2 + \frac{\partial}{\partial x} Z_b) + (\rho_2 - \rho_1) g \frac{\partial}{\partial x} h_2 = \rho_2 g(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial x} h_2 + \frac{\partial}{\partial x} Z_b) + (\rho_1 - \rho_2) g(\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial x} Z_b).$$

Comme les méthodes de Saint-Venant sont des approches intégrées sur chaque couche, donc on avoir besoin de $\int p dy$ sur chaque couche, on doit évaluer $h_1 \frac{\partial}{\partial x} p$ et $h_2 \frac{\partial}{\partial x} p$:
pour $Z_b < y < Z_b + h_1$ on a $p = \rho_1 g(h_1 + Z_b - y) + \rho_2 g h_2$ ce qui va donner

$$h_1 \frac{\partial}{\partial x} p = \rho_1 g \frac{\partial}{\partial x} \frac{h_1^2}{2} + \rho_2 g h_1 \frac{\partial}{\partial x} h_2 + \rho_1 g h_1 \frac{\partial}{\partial x} Z_b = \rho_1 g h_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2 + Z_b) + (\rho_2 - \rho_1) g h_1 \frac{\partial}{\partial x} h_2$$

puis dans l'autre couche : $h_1 < y < h_1 + h_2$ on a $p = \rho_2 g(h_1 + h_2 - y)$ ce qui va donner

$$h_2 \frac{\partial}{\partial x} p = \rho_2 g \frac{\partial}{\partial x} \frac{h_2^2}{2} + \rho_2 g h_2 \frac{\partial}{\partial x} h_1 + \rho_2 g h_2 \frac{\partial}{\partial x} Z_b = \rho_2 g h_2 \frac{\partial}{\partial x} (h_2 + h_1 + Z_b).$$

On va ensuite mettre ces pressions dans les équations du mouvement que nous allons établir plus bas.

19.1.2 Masse

En intégrant sur l'épaisseur, qui se décompose en deux couches h_1 en bas et h_2 en haut, les équations de masse (d'incompressibilité) sont évidentes

$$\int_0^{h_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h_1} u dy - u(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(h_1)$$

$$\int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_1+h_2} u dy - u(h_1+h_2) \frac{\partial(h_2+h_1)}{\partial x} + u(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + (v(h_1+h_2) - v(h_1))$$

bien entendu lors de l'intégration transverse, comme la description est Eulerienne les vitesses en haut de 1 et en bas de 2 se compensent voir 6.7 :

$$v(h_1+h_2) = \frac{\partial}{\partial t}(h_1+h_2) + u(h_1+h_2) \frac{\partial(h_1+h_2)}{\partial x}, \text{ et } v(h_1) = \frac{\partial}{\partial t}(h_1) + u(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

donc en posant $\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} u dy = h_1 u_1$ et $\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_1+h_2} u dy = h_2 u_2$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0, \text{ et } \frac{\partial}{\partial t}(h_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) = 0.$$

19.1.3 Accélération

Pour la quantité de mouvement de même qu'en Saint-Venant une couche on a sur chaque couche (de même les vitesses transverse se compensent avec le mouvement de la couche, voir 6.7)

$$\rho_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2) \right) + 0 \text{ et } \rho_2 \left(\frac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2^2) \right) + 0.$$

19.2 Equations bicouches, formulation initiale

Le jeu d'équations de Saint-Venant bicouches en utilisant les pressions précédentes est tel que l'on cherche à résoudre, pour h_1 la couche du bas, et h_2 la couche du haut le système, avec en général $\rho_2/\rho_1 < 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2 + \frac{g h_1^2}{2}) = -g \frac{\rho_2}{\rho_1} h_1 \frac{\partial}{\partial x} h_2 - g h_1 \frac{\partial}{\partial x} Z_b$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2^2 + \frac{g h_2^2}{2}) = -g h_2 \frac{\partial}{\partial x} h_1 - g h_2 \frac{\partial}{\partial x} Z_b$$

On va écrire de différentes manières ces équations (surtout les termes d'échange), le jeu d'écriture est utile pour la résolution numérique.

19.3 Equations en 2D

On peut l'écrire en 2D avec \mathbf{u}_1 vecteur vitesse de la couche du bas \mathbf{u}_2 et celui du haut.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \mathbf{F} = 0$$

avec

$$\mathbf{q} = \left(h_2 \ h_2 u_{2x} \ h_2 u_{2y} \ h_1 \ h_1 u_{1x} \ h_1 u_{1y} \right), \quad \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} h_2 u_{2x} & h_2 u_{2y} \\ h_2 u_{2x}^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 & h_2 u_{2x} u_{2y} \\ h_2 u_{2x} u_{2y} & h_2 u_{2y}^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 \\ h_1 u_{1x} & h_1 u_{1y} \\ h_1 u_{1x}^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 & h_1 u_{1x} u_{1y} \\ h_1 u_{1x} u_{1y} & h_1 u_{1y}^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ g h_2 \frac{\partial}{\partial x} (h_2 + z_b) \\ g h_2 \frac{\partial}{\partial y} (h_2 + z_b) \\ 0 \\ g h_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(z_b + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \right) \\ g h_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(z_b + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \right) \end{pmatrix},$$

voir auss [Popinet,2011] (/src/references.bib#popinet2011) et le code bicouche de Emily Lane http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/two_layer_emily.h pour plus de détails vérifier : es couches 1 et 2 sont permutées par rapport à Emily Lane,

19.4 Equations bicouches à deux densités autre formulation

On cherche à résoudre, pour h_1 la couche du bas, et h_2 la couche du haut, on obtient en mettant le terme $h_1 h_2$ dans le flux :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_2) + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 u_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1 u_1^2 + \frac{g h_1^2}{2} + g \frac{\rho_2}{\rho_1} h_1 h_2 \right) = +g \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \frac{\partial}{\partial x} h_1 - g h_1 \frac{\partial}{\partial x} Z_b$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2 u_2^2 + \frac{g h_2^2}{2} \right) = -g h_2 \frac{\partial}{\partial x} h_1 - g h_2 \frac{\partial}{\partial x} Z_b$$

en sommant on fait disparaître le terme source $\pm g h_2 \frac{\partial}{\partial x} h_1$ C'est l'approche de Abgrall & Karni Two-Layer Shallow Water System : A Relaxation Approach Siam J. Sci. Comput 2009 Vol. 31, No. 3, pp. 1603–1627.

19.5 Equations bicouches à deux densités encore une autre formulation

On cherche à résoudre, pour h_1 la couche du bas, et h_2 la couche du haut $\rho_1 > \rho_2$. on écrit comme Audusse, à partir de Abgrall en ajoutant et retranchant $g h_1 \frac{\partial}{\partial x} h_2$ à Abgrall

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_2) + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 u_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1 u_1^2 + g h_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2) \right) = +g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right) h_1 \frac{\partial}{\partial x} h_2 - g h_1 \frac{\partial}{\partial x} Z_b$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2^2) + g h_2 \frac{\partial}{\partial x}(h_1 + h_2) = -g h_2 \frac{\partial}{\partial x} Z_b$$

il y a donc un terme source à rajouter à la première

$$+g\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right)h_1 \frac{\partial}{\partial x} h_2$$

(c.f. Audusse 11 p174 (2.24) à (2.26)).

19.6 Equations bicouches à deux densités formulation

C'est la formulation dans *Basilisk*, on définit $\eta = h + Z_b = h_1 + h_2 + Z_b$, on a donc en regroupant dans le système précédent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t}(h_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2) &= -g h_1 \frac{\partial}{\partial x} \eta + g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\right) h_1 \frac{\partial}{\partial x} h_2, & \frac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2^2) &= -g h_2 \frac{\partial}{\partial x} \eta. \end{aligned}$$

On voit donc il qu'il y a une variété de choix dans l'expression des équations. Le système de départ est important pour la discrétisation car il induit des choix.

19.7 Equations N couches formulation alternative

On vient de voir l'écriture pour deux couches, passons à un plus grand nombre... La généralisation à N couches, $k = 1$ à $k = N$, $\eta = h + Z_b$ est évidente pour la masse

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_k) + \frac{\partial}{\partial x}(h_k u_k) = 0$$

Pour la quantité de mouvement, dans le terme d'inertie on retrouve (par compensation des vitesses transverses)

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_k u_k) + \frac{\partial}{\partial x}(h_k u_k^2) =$$

pour le membre de droite on utilise une astuce d'écriture de la pression; on décompose la pression en deux parties une partie hydrostatique $\rho_0 g(\eta - y)$, et une non hydrostatique liée à la variation de densité. On l'appelle Π , on pose $p = \rho_0 g(\eta - y) + \Pi(x, y)$. Dans une couche k , le bas de cette couche est en η_k , le haut est en η_{k+1} , on va calculer $\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \frac{\partial p}{\partial x} dy$, où $\eta_{k+1} - \eta_k = h_k$

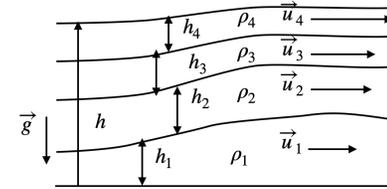
$$\begin{aligned} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \frac{\partial p}{\partial x} dy &= h_k \rho_0 g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \Pi dy - \frac{\partial \eta_{k+1}}{\partial x} \Pi(x, \eta_{k+1}) + \frac{\partial \eta_k}{\partial x} \Pi(x, \eta_k) \\ \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \frac{\partial p}{\partial x} dy &= h_k \rho_0 g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \Pi dy - \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \Pi(x, \eta) \right]_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g = -\rho_0 g + \frac{\partial \Pi}{\partial y}$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = (\rho_0 - \rho)g$$

On part de 0, en ayant supposé que la pression en bas est la bonne pression, $\Pi(0) = 0$ et on intègre pour calculer la correction.

Cette approche est celle de la section §6.7, mais la couche du bas est numérotée 0, et la numération en 1/2
<http://basilisk.fr/src/layered/dr.h>



Configuration en N couches de hauteur h_k glissant l'une sur l'autre avec des vitesses moyennes u_k différentes, on pourrait mettre un fond non plat en $y = Z_b$, et la couche k est entre $z_{k-1/2}$ et $z_{k+1/2}$.

19.8 Bicouche : équations linéarisées

Reprenons le système à deux couches, on peut linéariser ce système et chercher la relation de dispersion pour des ondes se déplaçant dans le bi couche. On trouve deux vitesses de propagation

$$c^2 = \frac{g}{2}(h_1 + h_2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{g^2(h_1 + h_2)^2 - 4g^2 \frac{\Delta\rho}{\rho} h_1 h_2}$$

quand $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ est petit, on obtient :

$$c^2 = g(h_1 + h_2) + \dots \text{ ainsi que } c^2 = \frac{g \frac{\Delta\rho}{\rho} h_1 h_2}{(h_1 + h_2)}$$

il y a donc des ondes de surface rapides (\sqrt{gh}) et des ondes internes plus lentes ($\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$).

19.9 Exemple : ressaut interne en bicouche

Un exemple numérique difficile issu de Berthon et al. Il s'agit de l'effondrement d'une colonne de fluide 1 sous la surface, mais avec une hauteur initiale uniforme de ce même fluide 1, le tout dans un fluide moins dense, les densités différentes sont telles que $\rho_2/\rho_1 = 0.7$:

$$h_1(t = 0, x) = 0.2 \text{ si } x < 5, \quad h_1(t = 0, x) = 1.8 \text{ si } x > 5$$

$$h_2(t = 0, x) = 2 - h_1(t = 0, x), \quad u_2(t = 0, x) = u_1(t = 0, x) = 0$$

C'est comme le dambreak avec une hauteur initiale, dans le cas classique on sait qu'un ressaut se forme. Il en va de même ici, En plus, des ondes de surface se produisent et s'échappent plus vite...

La résolution est proposée dans http://basilisk.fr/sandbox/M1EMN/Exemples/internaldam_2.c

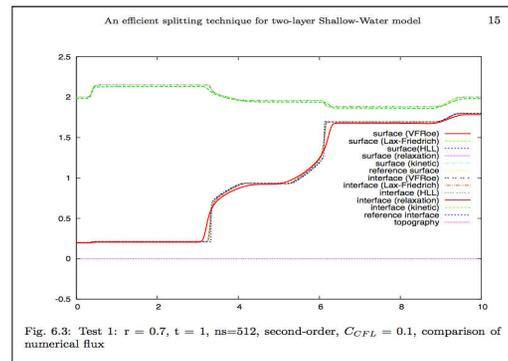


FIGURE 81 – Comparaison Berthon Foucher Morales ” An Efficient Splitting Technique For Two-Layer Shallow-Water Model”

20 Conclusion

En première approximation, les équations de Saint-Venant restent valides pour la plupart des fluides géophysiques qui s'écoulent en couches minces. Ces équations (ou des simplifications "onde cinétique") sont utilisées effectivement de plus en plus dans des codes dédiés pour reproduire les évènements passés, et pour ensuite prévenir les risques sur le terrain.

En toute première approximation, une loi newtonienne suffit (lave...), mais parfois il faut rajouter des détails de transfert de chaleur et de solidification (lave...), ou changer la rhéologie avec des lois en puissance (écoulement de glaciers, boue....) L'aspect friction est important pour la Neige, les avalanches de roches, les dunes de sable.... Cependant, dans le cas des fluides de type "boue" si on veut une description précise de l'arrêt on aura besoin du détail sur l'épaisseur de l'écoulement pour résoudre effectivement. Cela sort donc un peu du cadre Saint-Venant.

Plus de détails voir <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/mainM2EMN.pdf> qui précise les écoulements de type boue et milieux granulaires qui sont des écoulements à seuil.

Septième partie

Les Sédiments : Problèmes de sédimentation érosion

21 Introduction

Il s'agit du problème général de transport de sédiments (de particules, de sable, d'alluvions, de boues), on parle aussi de courant de turbidité, mais c'est aussi le transport de déchets, de polluants dans un écoulement de fluide (d'eau ou d'air). Les écoulements envisagés sont tous ceux liés aux fleuves et à la mer, ou au déplacement des dunes de sable (dans l'air et l'eau). Les ordres de grandeurs vont des rides de sable sur la plage qui sont de quelques centimètres aux bancs de sable (méga ripples) de plusieurs centaines de mètres sous la Manche. Les dunes du Sahara vont de 5m à plusieurs centaines de mètres.

La complexité vient ici en plus du fait que la présence des particules modifie la viscosité de l'écoulement, mais surtout, que le déplacement des particules modifie le fond de l'écoulement et modifie donc aussi l'écoulement lui même.

On simplifiera en supposant que les sédiments sont emportés comme des scalaires passifs par la couche limite (turbulente) avec en plus une vitesse de chute de sédimentation. On n'étudiera pas ici le problème des avalanches qui est un problème de transport dans un milieu granulaire.

Nous faisons des allers et retours entre l'échelle du grain et l'échelle macroscopique.

22 Mécanismes simples, seuil de mouvement, Shields

22.1 Mouvement Brownien/ chute de particules : suspension, vitesses caractéristiques

Commençons par estimer les ordres de grandeurs de vitesse et longueurs qui peuvent intervenir pour dimensionner le problème. Prenons un fluide au repos avec des particules en suspension. On veut construire une vitesse caractéristique associée à ces particules. Sous l'action des chocs des molécules une particule solide est animée d'un mouvement aléatoire (Brown 1827)... Si les particules sont en plus soumises à une force extérieure, la gravité (g), à l'état stationnaire, il y a équilibre entre la traînée (force de frottement fluide sur la particule) et le poids. Attention, il y a plein de subtilités dans ce problème simple, nous sommes au niveau le plus bas, en effet il faut tenir compte de la "masse ajoutée" car l'eau est accélérée par les variations du mouvement de la particule, il y a un effet mémoire (terme de Basset) et des termes de dérivée de la vitesse (Faxen formulae) R. Gatignol, (1983)⁶ voir aussi Magnaudet.

- Au plus simple et en oubliant les effets subtils de dérivée fractionnaire, la traînée est la force de Stokes (si la vitesse est faible : $6\pi\mu(d/2)v$), d est le diamètre :

$$F = 6\pi\mu\left(\frac{d}{2}\right)v, \text{ donc } m\frac{dv}{dt} = -mg + m_{eau}g + 6\pi\mu\left(\frac{d}{2}\right)v \text{ donc } \left(\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3\right)\rho_p\frac{dv}{dt} = \left(\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3\right)(\rho_p - \rho)g - 6\pi\mu v\left(\frac{d}{2}\right)$$

la vitesse terminale est la vitesse de Stokes $V_f = \frac{d^2}{18\rho\nu}(\rho_p - \rho)g$ on a aussi un temps caractéristique outre cette vitesse caractéristique (vitesse de Stokes, ou vitesse de chute (*settling velocity*) ou vitesse finale). Le nombre de Reynolds construit sur la vitesse de Stokes est le Galilée (un genre de Grashoff) On réécrit donc

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V_f - v}{T_{Stokes}} \text{ avec } T_{Stokes} = \frac{\rho_p}{\rho\nu} \frac{d^2}{\nu}, \text{ et vitesse de Stokes } V_f = \frac{d^2}{18\rho\nu}(\rho_p - \rho)g, \text{ et nombre de Galilée } Ga = \frac{(\rho_p - \rho)gd^3}{\rho_p\nu^2} \quad (29)$$

On a ainsi déterminé la vitesse de sédimentation de Stokes, dans le cas très visqueux pour un grain sphérique de diamètre d . Le temps caractéristique de déposition, dans le cas visqueux est le temps de chute d'une hauteur d à la vitesse de Stokes : $\frac{d}{V_s}$ (cf. Charru et Mouilleron-Arnould [9]).

6. dans un fluide de viscosité $\vec{u}(x, y, z, t)$ une particule de viscosité $\vec{v}(t)$ est accélérée selon $\frac{d\vec{v}}{dt} = \beta\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{\vec{v}-\vec{u}}{\tau} - \sqrt{\frac{3\beta}{\tau_p}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\vec{v}-\vec{u}}{\sqrt{t-\tau}} - (\Delta\rho/\rho - 1)\vec{g}$ avec $\beta = 3/(2\Delta\rho + 1)$ et $\tau_p = (d/2)^2/(3\beta\nu)$.

Si la particule est dans un écoulement cisaillé, elle peut rester à la même hauteur par un effet de variation du cisaillement du fluide. C'est la re-suspension (Acrivos et Leighton). En effet on a en bas de la particule une contrainte en $\tau(z)\pi(d/2)^2$ et en haut $\tau(z + d/2)\pi(d/2)^2$. Ce qui fait $\sim \pi(d/2)^3 \frac{d\tau}{dz}(z)$. Cette contribution s'interprète comme un flux de resuspension et maintient la particule à hauteur fixe...

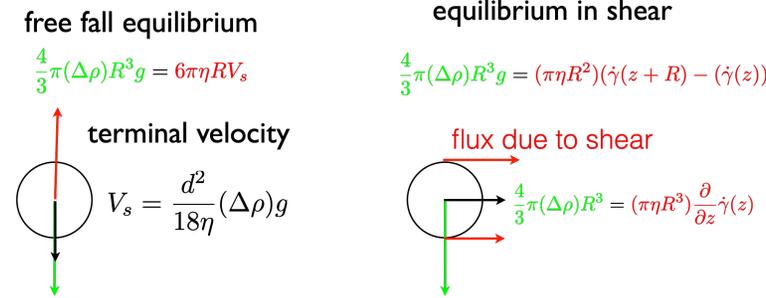


FIGURE 82 – Gauche : équilibre poids/ traînée et chute. Droite effet de la resuspension visqueuse dans un écoulement cisaillé $R = d/2$ est le rayon, $\tau = \mu\dot{\gamma}$ la contrainte de cisaillement.

• Si la vitesse est trop rapide, on quitte le régime laminaire. Une estimation simpliste de V_{finale} est souvent présentée sous la forme d'un équilibre entre la traînée aérodynamique (attention ici prise en vitesse au carré, Stokes n'étant qu'une approximation à faible vitesse), la poussée d'Archimède et le poids de la particule (d diamètre, c_d coefficient de traînée...).

L'équation de mise à l'équilibre :

$$(4/3\pi(d/2)^3)\rho_p \frac{dv}{dt} = \left(\frac{4}{3}\pi(d/2)^3\right)(\rho_p - \rho)g - \frac{c_d}{2}\pi(d/2)^2 v^2. \quad (30)$$

Cette fois comme noté par Andreotti [?], c'est une longueur caractéristique qui apparaît naturellement $\frac{3c_d \rho_p}{16 \rho}$, en oubliant $\frac{3c_d}{16}$ facteur d'ordre 1 ($c_d = 1.4 + 36/Re_p$ Fredsoe and Deigaard (1992)) :

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{V_{finale}^2 - v^2}{l_{sat}} \quad \text{avec} \quad l_{sat} = \frac{\rho_p}{\rho} d \quad \text{et} \quad V_{finale} = \sqrt{\frac{4(\rho_s/\rho - 1)gd}{3c_d}}. \quad (31)$$

Cette longueur est fondamentale, nous la retrouverons dans la suite.

On peut construire une vitesse avec simplement la taille des grains et l'accélération de la pesanteur, c'est un peu une version appauvrie du cas précédent :

$$V = \sqrt{gd}.$$

Enfin, on peut construire une vitesse à partir de la vitesse du fluide elle-même, la vitesse pertinente sera liée au cisaillement de vitesse. En laminaire, entre le haut et le bas d'une particule dans un écoulement cisaillé $\gamma = \frac{\partial u}{\partial y}$, la différence de vitesse est $d \frac{\partial u}{\partial y}$. C'est donc avec cette vitesse que l'on va construire le nombre de Reynolds associé à la particule $(\frac{d^2}{\nu}) \frac{\partial u}{\partial y}$. Dans le cas turbulent, on utilise la vitesse de frottement construite sur la contrainte à la paroi : $\tau = \rho u_*^2$. Le nombre de Reynolds associé sera donc $\rho u_* d / \mu$.

Par la suite nous prendrons une de ces vitesses comme un des paramètres du problème. Ces vitesses, longueurs et temps sont ensuite systématiquement utilisés pour dimensionner les phénomènes. On peut cependant imaginer que cette vitesse n'est pas constante, qu'elle varie avec la densité... Il s'agit d'une résolution hyper simplifiée des équations de la mécanique pour les grains qui traduit notre ignorance des équations exactes.

22.2 Mise en mouvement, Nombre de Shields

Le vrai problème initial est celui de la mise en suspension. Comment des particules qui étaient initialement posées les unes sur les autres vont brusquement sauter en l'air ? (dans l'air ou dans l'eau !)

Des arguments du même type que précédemment laissent penser que $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ (qui est la contrainte de cisaillement au fond, là où est la particule) provoque sur la particule de diamètre d la force en $\tau \pi (d/2)^2$ d'ordre τd^2 qui entraîne la particule si elle est d'ordre de grandeur de son poids apparent $(1/6)(\rho_s/\rho - 1)g\pi d^3$. On comprend alors l'importance du paramètre de Shields (1936) qui est par définition proportionnel au rapport de ces deux effets :

$$S = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}.$$

Expérimentalement on mesure une valeur du paramètre de Shields critique (noté S_c) à partir duquel il peut y avoir mise en suspension et déplacement des particules. Comme $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ et que la vitesse de Stokes est $V_f = \frac{(\rho_s - \rho)gd^2}{18\mu}$, on a $S = \frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}{(\rho_s - \rho)gd} = \frac{d \frac{\partial u}{\partial y}}{18V_f}$, rapport de deux vitesses $d \frac{\partial u}{\partial y}$ et V_f .

Ce phénomène de mise en mouvement lorsqu'un seuil a été dépassé a déjà été remarqué par du Boys en 1879 " *un caillou posé au fond d'un courant liquide, peut être déplacé par l'impulsion des filets qui le rencontrent : le mouvement aura lieu si la vitesse est supérieure à une certaine limite (...) [qui] dépend de la densité, du volume et de la forme du caillou; elle dépend aussi de la densité du liquide.*"

La figure 83 présente la valeur du nombre de Shields critique pour différents grains en fonction du nombre de Reynolds construit ici sur le diamètre et la vitesse de frottement (définie pour les profils turbulents au paragraphe 6.8.2), rappelons que la valeur du frottement au fond τ_0 permet d'introduire une vitesse fictive u_* mais qui est quand même un bon ordre de grandeur de la fluctuation de vitesse telle que le frottement au fond $\tau_0 = \rho u_*^2$. Le Shields dépend du nombre de Reynolds du grain :

$$\text{dans le cas visqueux, on utilise } d \frac{\partial u}{\partial y} \text{ comme vitesse et } Re = \rho \frac{d^2 \frac{\partial u}{\partial y}}{\mu}, \text{ dans le cas turbulent } Re = \rho \frac{u_* d}{\mu}.$$

On remarque sur la figure 83 que $S \sim 0.04$ sur une grande plage. Le nombre de Shields critique est pris souvent constant en première approximation car il varie faiblement en Re .

On peut aussi définir un nombre de Rouse, rapport entre la vitesse de sédimentation et la vitesse u_* : par définition $R = V_f/(\kappa u_*)$. La définition historique y rajoute la constante de Kármán 0.41. (cf [50]).

Les hydrauliciens de rivières aiment utiliser le nombre de Galilée associé à la taille de Grain

$$d_* = \left(\frac{(\rho_s/\rho - 1)gd^3}{\nu^2} \right)^{1/3}$$

une approximation proposée par Guo, J. (1990)

$$S_c = \frac{0.23}{d_*} + 0.054(1 - \exp(-d_*^{0.85}/23))$$

En utilisant le nombre de Reynolds de Sédiment $Re_p = d_*^{1/2}$, (Garcia, 2008) Zgheib and S. Balachandar 2017 proposent eux

$$Re_p = \frac{1}{\nu} \sqrt{(\rho_s/\rho - 1)gd^3}$$

$$S_c = \frac{0.1}{Re_p^{0.6}} + 0.03(1 - \exp(-17.7Re_p^{0.6}))$$

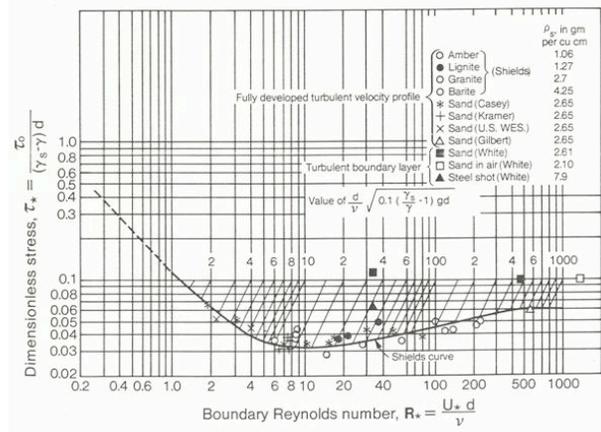


FIGURE 83 – Diagramme de Shields : valeur critique S_c du frottement adimensionné par le poids déjaugé ($S = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}$) à partir duquel les grains bougent en fonction de la taille de la particule exprimée en Reynolds de particule avec la vitesse de frottement. source <http://calm.geo.berkeley.edu/geomorph/wilcock/WilcockSTLecture3.pdf>

22.3 Effet de pente

La relation de valeur critique est modifiée si le sol présente une pente. Sur l'image 84 on intuite l'effet de pente : il est plus simple d'entraîner un sédiment sur un fond qui descend que sur un fond qui monte. On corrigera donc le seuil S_c d'un coefficient qui sera $\Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$. Le coefficient dépend de l'angle d'avalanche (il est relié au coefficient de friction). On aura mouvement que si : $S \geq S_c + \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$, la valeur efficace du cisaillement réduit sera :

$$S - S_c - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

c'est comme si la contrainte τ était corrigée en $\tau - \Delta \rho g d \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$.

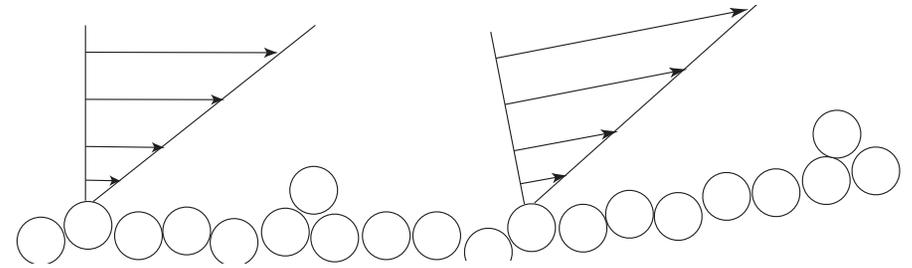


FIGURE 84 – Si la pente est contraire à l'écoulement, il faut imposer un frottement pariétal plus fort que S_c pour faire bouger les grains, en première approximation le surcoût est proportionnel à la pente $\Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$.

23 Déplacement des grains : flux saturé

23.1 Flux saturé dans l'eau (torrents, rivières & fleuves)

Ayant compris qu'il y a un seuil de mouvement, examinons maintenant le nombre de particules emportées lorsque le cisaillement dépasse le seuil. Près du fond il existe une couche très fine nommée "bed load" où les particules sont en mouvement. Pour la définition de cette "couche de charriage", il y a un problème : il n'y a pas de définition précise... Dans cette couche on a des particules qui se déplacent à une vitesse qui est encore *grosso modo* la vitesse V_f , soit $((\rho_s/\rho - 1)gd)^{1/2}$; le flux de particules (noté q_s) est environ cette vitesse fois l'épaisseur de l'écoulement qui est une couche de quelques diamètres (d). Les corrélations en régime turbulent sont donc faites en utilisant cette échelle de flux construite avec $V_f d = ((\rho_s/\rho - 1)gd^3)^{1/2}$. De plus comme on a vu, le mouvement ne se produit que si le Shields $\frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}$ dépasse un seuil.

La loi importante, obtenue à partir de mesurées expérimentales, est celle de Meyer Peter & Müller, donne le flux en fonction de l'écart au seuil du paramètre de Shields :

$$\boxed{\frac{q_s}{((\rho_s/\rho - 1)gd^3)^{1/2}} = 8 \left(\frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd} - 0.047 \right)_+^{3/2}}. \text{ La notation } x_+ \text{ veut dire } x \text{ si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ si négatif}$$

Mais il n'existe pas de vrai consensus, voir figure 85 avec la loi de Nielsen, $S = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}$

$$q_s = 12 ((\rho_s/\rho - 1)gd^3)^{1/2} \left(\sqrt{S}(S - 0.05) \right)_+$$

Meyer-Peter and Müller (1948) bedload relation of Wong and Parker (2006), Zgheib and S. Balachandar 2017 defined as $S = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}$

$$q_s = 4.93 ((\rho_s/\rho - 1)gd^3)^{1/2} ((S - 0.05)^{1.6})_+$$

Des lois de la forme suivante sont utilisées : on peut écrire le flux

soit en fonction du débit $q_s = A_Q(Q - Q_s)_+^B$
 ou en fonction de la vitesse moyenne $q_s = A_V(V - V_s)_+^B$
 ou en fonction du frottement $q_s = A_F(\tau - \tau_s)_+^B$
 voire en fonction d'une puissance $q_s = A_P(\tau V - \tau_s V_s)_+^B$
 (voir la figure 86 extraite du livre de Yang [52]).

Au final on retiendra que q_s est proportionnel à une vitesse et une longueur qui sont environ la vitesse caractéristique V_f et au diamètre du grain disons d et à l'écart entre le frottement réduit et le seuil critique élevé à une puissance β déterminée empiriquement, on écrira donc

$$\boxed{q_s = q_0((S - S_c)_+^\beta)} \quad q_0 = \alpha V_f d, \text{ avec deux coefficients numériques empiriques } \alpha, \beta.$$

Ce mode de transport en "charriage" "bed load" où les particules sont en mouvement dans une couche près du fond n'est pas le seul possible. Les particules peuvent monter et entrer en suspension dans l'eau. C'est le mode de transport en suspension, qui est celui des courants de turbidité. Ce mode de transport est évoqué au §27.

23.2 Flux saturé laminaire en milieu liquide en laboratoire

Dans le cas de mouvement lents, des modèles issus de la ressuspension visqueuse de Leighton et Acrivos ont été proposés, il conduisent à un flux (voir Charru [8] et [9])

$$q/(V_f d) = S^3 \text{ avec } V_f = \frac{\Delta \rho g d^2}{18\mu} \text{ avec le Shields } S = \frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}{\Delta \rho g d}$$

196 Sediment transport mechanisms: 1. Bed-load transport

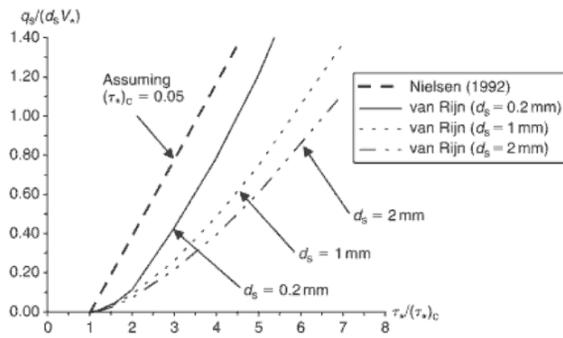


Fig. 10.5 Dimensionless bed-load transport rate $q_b/(d_s V_*^3)$ as a function of the dimensionless Shields parameter $\tau_* / (\tau_*)_c$; (Table 10.2).

FIGURE 85 – Diagramme loi de transport (Chanson), flux saturé en fonction du Shields avec la loi de Nielsen $q_s = 12 ((\rho_s/\rho - 1)gd^3)^{1/2} (\sqrt{S}(S - 0.05))_+$ et d'autres

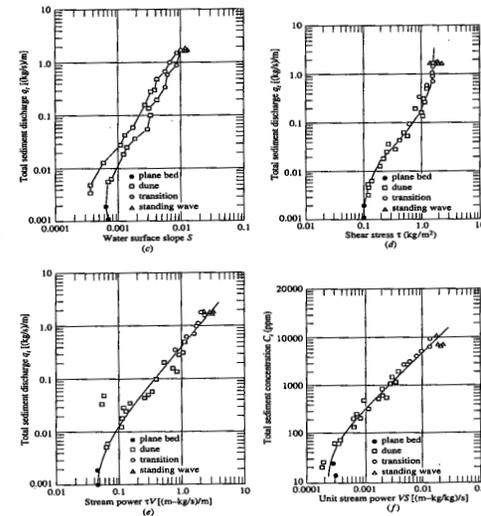


FIGURE 7.1 Relationships between total sediment discharge and (a) water discharge, (b) velocity, (c) slope, (d) shear stress, (e) stream power, and (f) unit stream power, for 0.93 mm sand in an 8 ft wide flume (Yang, 1983).

FIGURE 86 – Exemples de corrélations donnant le flux saturé en fonction d'une quantité de l'écoulement (frottement, vitesse, débit...), figure extraite du livre de Yang [52].

en pratique Charru Mouilleron-Arnould et Eiff proposent :

$$q/(V_f d) = 0.45S(S - 0.12)_+ \text{ avec } V_f = \frac{\Delta\rho g d^2}{18\mu} \text{ avec le Shields } S = \frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}{\Delta\rho g d}$$

Par la suite, il est plutôt envisagé de mesurer q avec $d^2 \frac{\partial u}{\partial y}$, ce qui se conçoit aussi car en laminaire $d \frac{\partial u}{\partial y} \sim V_f$.

23.3 Equation de conservation de sédiments

Les sédiments en quittant le fond f érodent celui ci. En se déposant, ils augment la hauteur du fond. Les sédiments se déplacent avec un flux q , tel que $q = q_s$. Les variations de q sont supposées dans un premier temps très rapides de sorte qu'elles sont exactement à tout instant l'érosion et la déposition. Dans un premier temps on n'évoque pas de terme source/ puits à cette équation. L' équation de l'évolution du fond s'écrit ainsi (équation d'Exner 1925) sous forme

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}.$$

C'est la relation pratique de conservation de la masse des sédiments. Le paramètre ϕ représente la compacité. C'est le rapport entre le volume des grains et le volume qu'il occupent. Ce coefficient est environ 0.6.

24 Premier problème couplé fluide-sédiment : charriage local

24.1 Démarche

Nous allons poser le problème couplé fluide-sédiment dans cette section. Nous allons utiliser les concepts précédents de flux de granulaire q_s dépendant de l'écart au seuil du Shields. Nous présentons les résultats en les compliquant petit à petit. Les équations finales sont ensuite rassemblées pour les différents problèmes de difficulté et de modélisation croissante forme "charriage local", "charriage avec effet d'établissement" puis "sédiments en suspension".

Nous proposons aussi à la fin un système couche limite

24.2 hypothèses

Il s'agit d'une interaction entre un écoulement et le fond érodable sur lequel il s'écoule : la forme du fond gouverne l'écoulement, ce dernier modifie la forme du fond par érosion et sédimentation.

Pour simplifier, on suppose que l'écoulement est quasistationnaire (la variation de la forme du fond en fonction du temps est supposée lente).

Se donnant une première forme de fond $f(x, t = 0)$, on doit suivre la démarche suivante :

- On travaille à l'échelle de temps lente, à chaque instant (dans cette échelle lente), la forme du fond est fixée, l'écoulement est calculé. Comme les phénomènes d'interaction fluide/sol se produisent par définition près de la paroi, le frottement pariétal est évalué par résolution des équations de Navier Stokes incompressibles stationnaires (en fait en pratique Saint-Venant), à viscosité constante. On obtient de τ le frottement au fond, donc la valeur du Shields S :

$$f \rightarrow S, \quad \text{par NS ou plutôt Saint-Venant}$$

- calcul du transport des sédiments par la relation intégrale simplifiée :

$$\frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd} \rightarrow q, \quad \text{par } q = q_s, \quad \text{où } q_s = q_0((S - S_c)_+)^{\beta}$$

- calcul du nouveau fond après érosion et sédimentation par actualisation du fond,

$$q \rightarrow f, \quad \text{par l'équation dite d'Exner : } \phi \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

C'est ce problème couplé qu'il faut résoudre.

24.3 forme charriage local complète

La forme finale à coder serait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right] = -gh \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \\ \tau = \frac{c_f}{2} \rho u^2, \quad S = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}, \quad q = q_0 \left((S - S_c - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x})_+ \right)^\beta, \\ \phi \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (32)$$

Point de vue adopté (sans terme de pente et avec Saint Venant) par :

S. Cordier, M.H. Le, T. Morales de Lun "Bedload transport in shallow water models : why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help"

M. J. Castro Díaz. D. Fernández-Nieto. M. Ferreiro " Sediment transport models in Shallow Water equations and numerical approach by high order finite volume methods" Computers & Fluids March 2008...

Point de vue adopté par :

Fowler "Dunes and Drumlins", mais il ne résout pas Saint-Venant mais une perturbation d'un écoulement cisailé

Kouakou Lagrée, avec une perturbation d'un écoulement cisailé (pas Saint-Venant)

25 Equation plus précise de conservation de sédiments

25.1 Equation intégrale simplifiée pour le milieu granulaire, point de vue Charriage

Revenons sur la loi de conservation de sédiment, pour mieux détailler les échanges entre une partie fixe et mobile. On va considérer une version intégrale ou globale de la loi de conservation. Soit la quantité n qui représente le nombre de particules en mouvement par unité de surface. Soit Q qui représente le flux total de grains. Soit \dot{n}_d le nombre de grains par unité de temps qui se déposent, et \dot{n}_e le nombre de grains par unité de temps qui entrent en mouvement par érosion. Le nombre de grains par unité de surface n varie aussi parce qu'un flux de sédiments entre et sort dans le volume élémentaire considéré. Voir la figure 25.1 qui traduit le bilan sur un petit volume de longueur Δx . L'érosion et la sédimentation font varier la forme f du fond, le fond descend par $\dot{n}_d - \dot{n}_e$, qui est l'opposé du terme source de la partie des grains en mouvement. Par bilans simples, on a comme variation du nombre de grains et de la forme du fond (avec le volume d'un grain de diamètre d qui est $(\frac{\pi d^3}{6})$) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\dot{n}_d + \dot{n}_e - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \text{et} \quad \phi \frac{\partial f}{\partial t} = (\dot{n}_d - \dot{n}_e) \left(\frac{\pi d^3}{6} \right)$$

où ϕ est la compaction.

Cette équation sert de base à la modélisation de ces quantités. Manifestement, on peut en première approximation dire que n et Q sont à peu près proportionnels, plus il y a de grains en mouvement, plus le flux est important. On pose $Q = \gamma d_1 n$, où γ est une constante certainement proportionnelle au cisaillement de vitesses

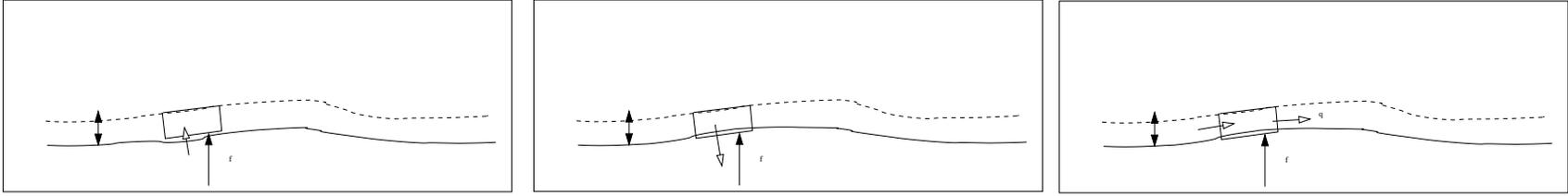


FIGURE 87 – Dans un écoulement avec érosion et sédimentation, considérons un petit volume de longueur Δx de grains. L'épaisseur est ici arbitraire, c'est en fait une hauteur de grains roulants (notée d_1 ensuite). Le nombre de grains en mouvement augmente par érosion $\dot{n}_e \Delta x$ (à gauche), il tombe par sédimentation $\dot{n}_d \Delta x$ (au centre). Pour les grains mobiles, le bilan de l'érosion sédimentation est $\dot{n}_e \Delta x - \dot{n}_d \Delta x$, ces grains en mouvement ont un flux noté q (à droite), le flux qui rentre $q(x)$ et sort $q(x + \Delta x)$ apporte $\partial_x q \Delta x$ grains au bilan. Pour les grains fixes, le bilan est l'opposé de l'érosion sédimentation $-\dot{n}_e \Delta x + \dot{n}_d \Delta x$. Les grains dans le sol sont fixes.

(car plus l'écoulement va aller vite plus q sera grand) et la hauteur d_1 est proportionnelle à la taille de grains (épaisseur caractéristique de la couche en mouvement). Cf Charru, Devauchelle 06 Lagrée. En première approximation, plus il y a de grains en mouvement, plus il s'en dépose. La déposition est donc proportionnelle à la concentration moyenne en solution ($\dot{n}_d = V_f n / d_2$, où d_2 est proportionnelle à la taille de grains), et donc au flux $\dot{n}_d = V_f Q / (d_1 d_2 \gamma)$.

L'érosion est choisie en supposant que l'érosion est proportionnelle à l'écart du frottement au seuil. Ce choix est tel qu'à l'équilibre stationnaire et invariant par translation (lorsque l'érosion est exactement compensée par la déposition $\dot{n}_d - \dot{n}_e = 0$) on obtienne que le flux qui circule est exactement le flux saturé que l'on a défini auparavant : $q_s = q_0 ((S - S_s)_+)^{\beta}$. Donc on prend :

$$\left(\frac{\pi d^3}{6}\right) \dot{n}_e = \left(\frac{V_f}{\gamma d_1 d_2}\right) q_0 ((S - S_s)_+)^{\beta},$$

L'équation de $q = Q / \left(\frac{\pi d^3}{6}\right)$ est alors

$$\left(\frac{d_2}{V_f}\right) \frac{\partial q}{\partial t} + \left(\frac{\gamma d_1 d_2}{V_f}\right) \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_0 ((S - S_s)_+)^{\beta}$$

En général, on admet que l'on est dans une sorte de régime permanent pour la conservation des particules en mouvement, et l'équation s'écrit :

$$l_s \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_0 ((S - S_s)_+)^{\beta}$$

L'interprétation de cette équation est qu'il faut une certaine distance $l_s = \frac{\gamma d_2 d_1}{V_f}$ avant que le flux saturé ne soit atteint. Plus la vitesse de chute est grande, plus l_s est petit, plus le cisaillement est grand (γ) plus l_s est grand. Ces résultats ont été établis pour un liquide.

D'autres auteurs (voir les travaux de Andreotti Claudin & Douady) estiment qu'en fait fait $l_s = \frac{\rho_{grain}}{\rho_{fluide}} d$, cette estimation tient plutôt pour l'air.

Cette formule peut se résumer par les phrases de du Boys, 1879. Commentant la vitesse limite d'entraînement évoquée par ces prédécesseurs, il évoque la notion de saturation de flux en ces termes " *une fois une certaine quantité de matières en mouvement sur le fond du lit, la vitesse des filets liquides devient trop faible pour entraîner davantage : le cours d'eau est alors saturé.* L'existence d'une longueur de saturation est traduite par : *un cours d'eau non saturé tend à le devenir en entraînant une partie des matériaux qui composent son lit, et en choisissant de préférence les plus petits.*"

On remarque incidemment que l'équation de l'évolution du fond s'écrit aussi (équation d'Exner 1925) en éliminant les taux d'érosion et de sédimentation :

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}.$$

C'est la relation pratique de conservation de la masse des sédiments. Le paramètre ϕ représente la compacité. C'est le rapport entre le volume des grains et le volume qu'il occupent. Ce coefficient est environ 0.6.

26 Second problème couplé fluide-sédiment : charriage avec effet d'établissement

26.1 Hypothèses

Il s'agit d'une interaction entre un écoulement et le fond érodable sur lequel il s'écoule : la forme du fond gouverne l'écoulement, ce dernier modifie la forme du fond par érosion et sédimentation.

Pour simplifier, on suppose que l'écoulement est quasistationnaire (la variation de la forme du fond en fonction du temps est supposée lente).

Se donnant une première forme de fond $f(x, t = 0)$, on doit suivre la démarche suivante :

- Donc, on travaille à l'échelle de temps lente, à chaque instant (dans cette échelle lente), la forme du fond est fixée, l'écoulement est calculé. Comme les phénomènes d'interaction fluide/sol se produisent par définition près de la paroi, le frottement pariétal est évalué par résolution des équations de Navier Stokes incompressibles stationnaires, à viscosité constante, obtention de τ le frottement au fond, donc la valeur du Shields S :

$$f \rightarrow S, \quad \text{par NS ou plutôt Saint-Venant}$$

- calcul du transport des sédiments par la relation intégrale simplifiée :

$$\frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd} \rightarrow q, \quad \text{par } l_s \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_s, \quad \& \quad q_s = q_0((S - S_c)_+)^{\beta}$$

- calcul du nouveau fond après érosion et sédimentation par actualisation du fond,

$$q \rightarrow f, \quad \text{par l'équation dite d'Exner : } \phi \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

26.2 forme charriage avec effet d'établissement

La forme finale à coder serait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{h} + g \frac{h^2}{2} \right] = -gh \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \\ \tau = \frac{c_f}{2} \rho u^2, \quad S = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}, \\ l_s \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_s \text{ avec } q_s = q_0((S - S_c)_+)^{\beta} \\ \phi \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \end{array} \right. , \quad (33)$$

Point de vue adopté par

Devauchelle Malverty Lajeunesse Lagrée Josserand KD Nguyen Thu Lam " Stability of bedforms in laminar flows with free-surface : from bars to ripples" JFM 2010 mais en linéarisant les équations de laminaires NS (pas Saint Venant)

Kouakou Lagrée, dans un écoulement laminaire cisailé

Lagrée avec un écoulement sans surface libre

Andreotti Claudin avec un écoulement sans surface libre

27 Transport en suspension

27.1 Notion de suspension

Nous venons de voir le cas où les grains sont assez lourds, ils restent près du fond, roulent et glissent les uns sur les autres en étant toujours en contact. Si les grains deviennent plus petits, tout petits, on parle de sédiments. Le courant sera assez fort pour les faire s'envoler dans l'eau. Ils perdent le contact et peuvent se trouver dans toute l'épaisseur du fluide. Ils sont en suspension. Bien entendu en pratique, on a un mélange des deux cas "charriage" et "suspension", et il faudra réadditionner les deux contributions. Ici nous décomposons pour mieux modéliser les phénomènes.

Pour l'instant nous avons parlé de l'eau, mais dans l'air c'est la même chose. Par exemple pour le déplacement des dunes éoliennes. Pour l'air on parle plutôt de "reptation" pour le mouvement des grains de sable près du sol, voir figure 89.

27.2 Déplacement des grains : flux saturé dans l'air

27.2.1 Profil logarithmique

Dans l'air, les choses semblent différentes, car les grains semblent voler dans l'air plus qu'ils ne sont charriés dans l'eau. Il est aussi plus visible que les grains en suspension modifient le profil de vitesse de l'air. Rappelons que pour un écoulement turbulent dans un tuyau on a

$$\frac{U_{moyen}}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{Ru_*}{\nu}\right) + 5.5$$

avec par définition u_* la vitesse de frottement, c'est à dire que par définition $\tau = \rho u_*^2$. on estime donc que pour une rivière à fond lisse ou pour une couche limite de vent, on est comme dans un tuyau et donc que la loi logarithmique est valable (c'est une approximation usuelle)

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{zu_*}{\nu}\right).$$

Pour un fond rugueux, on s'attend à la même forme, mais avec une autre échelle que ν/u_* pour dimensionner la profondeur, soit z_0 et alors $U = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$. Or, dans un tuyau rugueux de rugosité k_s (taille des rugosités ou mini bosses plus ou moins régulièrement réparties sur la paroi) Nikuradse a décomposé la vitesse du tuyau lisse en faisant apparaître k_s artificiellement (dans le cas lisse il n'y a pas de k_s !) :

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) + 5.5 = 2.5 \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + 5.5 + 2.5 \ln\left(\frac{k_s u_*}{\nu}\right)$$

et défini ainsi une fonction de rugosité B , cette fonction est exactement $5.5 + 2.5 \ln(k_s u_* / \nu)$ dans le cas lisse ($k_s \rightarrow 0$), et sinon elle a été mesurée expérimentalement et tabulée. Cette fonction B , est donc telle que pour un écoulement rugueux quelconque

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + B$$

avec les valeurs suivantes (voir la courbe 88 de *Roughness* de Nikuradse issue du Schlichting)

$$U = 2.5 \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + B \quad \text{avec cas lisse } Re_p < 5, \quad B = 5.5 + 2.5 \ln(k_s u_* / \nu) \quad \text{avec } Re_p > 70, \quad B = 8.5$$

pour les cas très rugueux, B est constante=8.5, et comme $e^{8.5/2.5} \simeq 30$ d'où en pratique $U = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 \sim d/30$.

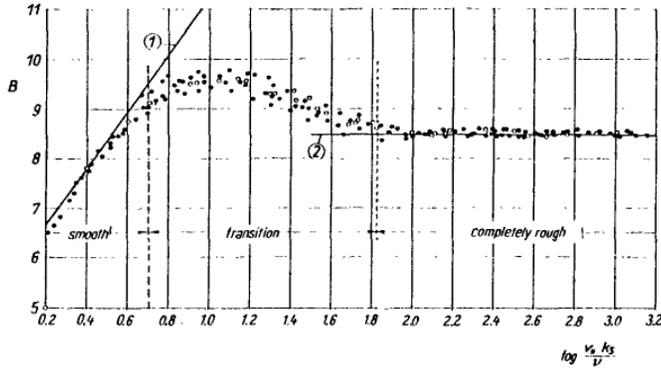


Fig. 20.21. Roughness function B in terms of $u_* k_s/\nu$, for Nikuradse's sand roughness
 Curve (1): hydraulically smooth, eqn. (20.33); curve (2): $B = 8.5$; completely rough

FIGURE 88 – Diagramme de la fonction *Roughness* (rugosité) B de Nikuradse (Schlichting), on voit bien le comportement lisse $B = 5.5 + 2.5 \ln(k_s u_* / \nu)$ et rugueux $B = 8.5$

27.2.2 Flux dans l'air turbulent (cas des des dunes éoliennes)

Cette analyse turbulente est valide pour tout fluide : eau ou air. Pour l'air, Bagnold a observé que la hauteur z_0 dépendait de la force du vent. Cette longueur est l'ordre de grandeur de la hauteur et longueur de saut des grains qui est environ $\ell = u_*^2/g$ en faisant un bilan de quantité de mouvement, avec u^- et u^+ vitesses de chute et de montée :

$$\tau \ell = q(u^- - u^+) \text{ ou si on intuite la possibilité d'un seuil } \tau_t \text{ threshold tel que } q = \frac{\ell}{(u^- - u^+)} (\tau - \tau_t)$$

ordre de grandeur u_* et $\ell \sim u_*^2/g$ et $\tau \sim \rho u_*^2$ le flux est donc en ordre de grandeur

$$q = \frac{\rho_f}{g} u_*^3$$

Les formules suivantes ont été alors proposées (avec la vitesse de frottement $\tau = \rho u_*^2$)

$$\text{Bagnold 1936 : } q = C_b \sqrt{d/D} \frac{\rho_f}{g} u_*^3 \text{ avec } C_b = 18, D = 0.25 \text{ mm, Lettau et Lettau 1978 : } q = C_L \frac{\rho_f}{g} u_*^2 (u_* - u_{*t})_+ \text{ avec } C_L = 4.1$$

Cependant, des campagnes de mesures plus récentes de Ho et al. ont constaté que le flux dépendait du sol, s'il est érodable ou non.

S'il est érodable ils n'ont pas observé la dépendance de ℓ ni de $(u^- - u^+)$ en u_* , ils pensent donc que $q \sim 27(\rho_f/g)(u_*^2 - u_{*t}^2)$ avec $u_{*t} = 0.15 \text{ m/s}$. Si le fond n'est pas érodable, ils ont observé que ℓ augmente en $(u_* - u_{*t})^2$ et $(u^- - u^+)$ en $(u_* - u_{*t})$ soit au final $q \sim (u_* - u_{*t})(u_*^2 - u_{*t}^2)_+$ avec $u_{*t} = 0.2 \text{ m/s}$:

27.3 cas liquide

Revenons au fluide "eau" et écrivons la modélisation usuelle de la suspension.

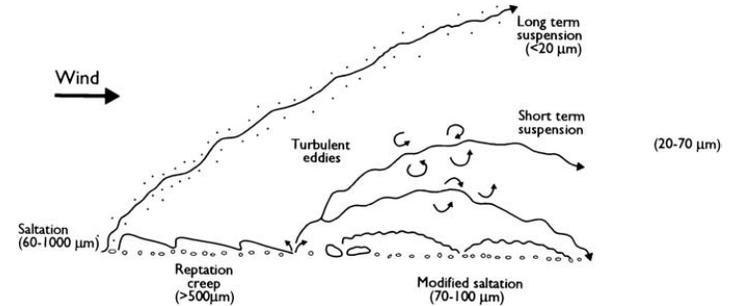


Figure 2.1 Modes of aeolian sediment transport (after Pye 1987).

FIGURE 89 – Transports d'un grain dans l'air [29]

CONTINUUM SALTATION MODEL FOR SAND DUNES

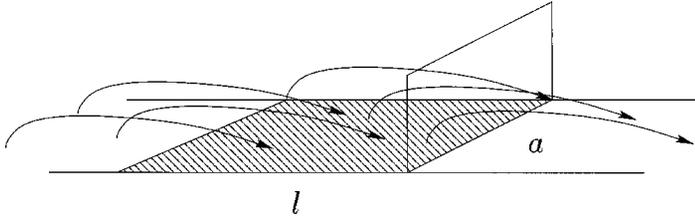


FIG. 1. Sketch of the horizontal sand flux q caused by saltating grains passing the vertical rectangle. The dashed rectangle shows the surface area l times a that is used to calculate the flux Φ of grains impacting onto the surface, where l is the length of the saltation trajectory.

FIGURE 90 – Flux issu de [41] et inspiré de Bagnold

Les sédiments sont maintenant supposés très légers et ils sont en suspension dans l'eau. Ils ne roulent plus au fond. Le mélange est constitué d'eau à la densité ρ et de solide à la densité ρ_s . La densité totale est $\rho = \rho_s c + (1 - c)\rho_f$, ou $\rho = \rho_f(1 + \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} c)$. On fait une approximation de type "Boussinesq" comme en thermique qui suppose toujours l'incompressibilité pour l'eau

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ qui donne } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Dans le cadre simplifié choisi, la conservation de la quantité de mouvement pour les particules est résolue de manière simplifiée en supposant que cette vitesse est la composition de deux phénomènes, une chute constante à la vitesse de chute V_f vers le bas et une diffusion aléatoire des sédiments autour de la vitesse d'entraînement $u, v + V_f$. La conservation de la masse des particules devient

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(cu)}{\partial x} + \frac{\partial(c(v - V_f))}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

Dire que les particules sont transportées à la vitesse d'entraînement $u, v + V_f$ et diffusent autour de cette trajectoire revient à avoir résolu l'équation de quantité de mouvement des particules.

Le problème de base, sans mouvement de fluide serait l'étude du profil de concentration transverse

$$-\frac{\partial(c(V_f))}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

A noter qu'en pratique on parle de phénomènes turbulents et donc que le D est un coefficient de diffusion turbulente. C'est l'équation de Rouse 1938. Ce coefficient est alors proportionnel à la viscosité turbulente, et avec V_f on construit le nombre de Rouse.

Dans le cas général, l'équation d'évolution du fond doit être écrite (Lagrée 2000 Lesshafft et al 2011, Hall et al 2006) Les particules vont tomber sur le sol, cela donne une contribution $\frac{\partial f}{\partial t} = V_f c$ Pour l'érosion, Soit la courbe $y = f(x, t)$ de la surface en 2D, la tangente est obtenue en dérivant pour avoir la pente et en normant, la normale est prise perpendiculaire :

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x}^2}} (\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_z) \text{ et } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x}^2}} (\vec{e}_y - \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x).$$

Soit V_n la vitesse d'érosion dans la direction de la normale, on l'écrit $|V_n|$

$$\text{la vitesse normale à la surface est } |V_n| = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}},$$

les deux contributions s'additionnent

$$\frac{\partial f}{\partial t} = V_f c - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} |V_n|$$

ou si on veut, un flux de chute plus un flux d'érosion

$$\frac{\partial f}{\partial t} = V_f c + D \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \right) \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)_{y=f}$$

à la paroi, le flux d'érosion est supposé "du genre" Peter-Meyer

$$-D \frac{\partial c}{\partial n}_{y=f} = \alpha (\tau - \tau_s)^\beta$$

à la paroi $u = 0$ et $v = \frac{\partial f}{\partial t}$, qui est en général négligeable

27.4

Reprenons l'équation complète. La conservation de la masse des particules va donner en hypothèse couche mince, et en intégrant sur l'épaisseur

$$\frac{\partial}{\partial t} \int c dy + \frac{\partial}{\partial x} \int c u dy = -V_f c(x, f) - D \frac{\partial c}{\partial y} |_f$$

on pourra ainsi définir $C = \frac{1}{h} \int c dy$ et réécrire cette équation en supposant que $\int c u dy = CQ$ (avec un facteur de forme pris égal à 1) et en posant $\mathcal{E} = -D \frac{\partial c}{\partial y} |_f$ et comme $c(x, f) \propto C$ on peut écrire $\mathcal{D} = V_f C$ (avec un facteur de forme encore pris égal à 1),

$$\frac{\partial C h}{\partial t} + \frac{\partial C Q}{\partial x} = (\mathcal{E} - \mathcal{D}), \text{ ou avec } Q = hu, \text{ on a aussi } \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{h} (\mathcal{E} - \mathcal{D}).$$

l'excès de masse (qui intervient par la concentration c , $c = 0$ pas d'excès, pas de solide, et attention $c \ll 1$) qui joue le rôle de l'excès de température (on sait que l'approximation de Boussinesq thermique est à $\alpha(T - T_0) \ll 1$) : l'analogie de la dilatabilité $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ est donc ici $\rho_f(1 + \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} c)$. On conserve donc l'incompressibilité pour l'eau. Et la contrepartie de l'équation de la chaleur est l'équation de conservation de la masse de sédiment...

Les équations dynamiques sont calculées sur Boussinesq. quantité de mouvement pour le fluide :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v \right) &= \left(-\frac{\partial p}{\rho_f \partial y} - g \right) - \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} c g + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

En première approximation, on n'en garde que l'équilibre hydrostatique, mais avec le surpoids des sédiments

$$0 \simeq \left(-\frac{\partial p}{\rho_f \partial y} - g \right) - \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} c g \quad \text{donc } p(x, y, t) = \rho_f g (h(x, t) - y) - \rho_f \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \int_y^h c dy$$

il va donc y avoir deux contributions dans la pression :

$$\text{avec } C = \int_0^h c dy \text{ on a donc deux termes de pression dans Saint-Venant } p(x, t) = \rho g h(x, t) \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} C\right)$$

La pression complète $p(x, y, t)$ poussant sur toute la hauteur, on calcule $\int_f^\eta p(x, y, t) dy$ cette intégration pour le calcul des forces de va nous donner $\rho g (1 + \alpha \frac{\Delta \rho}{\rho} C) \frac{h^2}{2}$ avec un coefficient de forme α que l'on prend égal à 1.

28 Troisième problème couplé fluide-sédiment : sédiments en suspension

Il s'agit d'une interaction entre un écoulement et le fond érodable sur lequel il s'écoule : la forme du fond gouverne l'écoulement, ce dernier modifie la forme du fond par érosion et sédimentation.

Pour simplifier, on suppose que l'écoulement est quasistationnaire (la variation de la forme du fond en fonction du temps est supposée lente).

Se donnant une première forme de fond $f(x, t = 0)$, on doit suivre la démarche suivante :

- On travaille à l'échelle de temps lente, à chaque instant (dans cette échelle lente), la forme du fond est fixée, l'écoulement est calculé. Comme les phénomènes d'interaction fluide/sol se produisent par définition près de la paroi, le frottement pariétal est évalué par résolution des équations de Navier Stokes incompressibles stationnaires, à viscosité constante, et résolution de l'équation de conservation de la masse des sédiments

$$f \rightarrow S, \quad \text{par NS + Conservation Sédiments ou plutôt Saint-Venant + equation intégrale des sédiments , } C$$

- besoin d'un modèle pour le flux au fond, les sédiments sont resuspendus par une érosion $\mathcal{E} = q_0((S - S_c)_+)^{\beta}$ et se déposent (\mathcal{D}) avec une vitesse de chute $-V_f$
- calcul du nouveau fond après érosion et sédimentation par actualisation du fond,

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} = -(\mathcal{E} - \mathcal{D})$$

28.1 forme suspension

La forme finale à coder serait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Q^2}{h} + g \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} C\right) \frac{h^2}{2} \right] = -gh \frac{\partial f}{\partial x} + \tau / \rho \\ \frac{\partial C h}{\partial t} + \frac{\partial C Q}{\partial x} = \mathcal{E} - \mathcal{D} \\ \mathcal{D} = V_f C, \\ \mathcal{E} = q_0((S - S_c)_+)^{\beta} \\ S = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}, \text{ avec } \tau = \rho \frac{c_f}{2} u^2 \\ \phi \frac{\partial f}{\partial t} = -(\mathcal{E} - \mathcal{D}). \end{array} \right. , \quad (34)$$

Sans intégrer en Saint-Venant, c'est le point de vue de Lagrée 00,

Sans intégrer en Saint-Venant, c'est le point de vue de Besio Blondeaux Vittori " on the formation of sand waves and sand bands" JFM 2006

C'est exactement le point de vue adopté par Emmet Moodie "Dam-break flows with resistance as agents of sediment transport" PHYSICS OF FLUIDS 2008

Capart et Young

On peut mélanger avec du charriage, Provenzale Balmforth "Pattern of Dirt" chapitre 15 p 377 :

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q_c}{\partial x} = \mathcal{D} - \mathcal{E}$$

en posant $q = q_c + \int cudy$, ou en supposant le facteur de forme égal à 1 : $q = q_c + CQ/h$ et en négligeant $-\frac{\partial C}{\partial t}$

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

28.2 Equations en couche mince/ couche limite

masse fluide

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0$$

quantité de mouvement pour le fluide :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv) \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

pression hydrostatique modifiée

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho_f g - \rho_f \frac{\Delta \rho}{\rho} cg$$

conservation des sédiments :

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (cu) + \frac{\partial}{\partial y} (c(v - V_f)) \right) = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

$$u(x, 0) = 0 \quad v(x, 0) = \dot{m}/\rho_f$$

$$-D \frac{\partial c}{\partial y} = \dot{m}/$$

Connaitre la relation entre V_f et c (constant en première approximation) et entre $D = -D \frac{\partial c}{\partial y}$ et $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$, par exemple $D = A(\tau - \tau_s)_+$

L'étape suivante serait de mettre un Savage Hutter pour la zone charriée.

29 Equations diphasiques de Jackson, ou équations bi fluides

29.1 Equations en couche mince/ couche limite en bi fluides

29.2 forme charriage avec effet d'établissement

La forme finale à coder serait :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ h_s \\ q \\ q_s \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q \\ q_s \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{q_s^2}{h} + \frac{gh_s^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha h_m \left(\frac{q_s}{h_q} - \frac{q}{h} \right) - C_\nu \frac{q}{h^2} \\ -\alpha h_m \frac{\rho_f}{\rho_s} \left(\frac{q_s}{h_q} - \frac{q}{h} \right) - \mu gh \end{pmatrix} \right\}, \quad (35)$$

Huitième partie

Exemples de résolution

29.3 Principe de la Résolution couplée simplifiée

Ce type de formulation permet le calcul du déplacement de dunes éoliennes ou sous marines. Pour fixer les idées nous proposons ici un mécanisme très simplifié de mouvement de dune sous marine.

Il s'agit d'une interaction entre un écoulement et le fond érodable sur lequel il s'écoule : la forme du fond gouverne l'écoulement, ce dernier modifie la forme du fond par érosion et sédimentation. Ce problème interactif couplé, très compliqué, est simplifié en supposant que l'écoulement est quasistationnaire (la variation de la forme du fond en fonction du temps est supposée lente). Donc, on travaille à l'échelle de temps lente, à chaque instant (dans cette échelle lente), la forme du fond est fixée, l'écoulement est calculé. Il faut ici distinguer deux types d'écoulements, le cas subcritique à nombre de Froude inférieur à 1, et le cas supercritique. Les deux cas produisent des structures différentes !

Comme les phénomènes d'interaction fluide/sol se produisent par définition près de la paroi, le frottement pariétal est évalué à partir de l'expression de la vitesse. C'est le frottement pariétal qui provoque l'érosion, les sédiments sont emportés par l'écoulement dans la couche limite. Ils se redéposent ensuite plus loin, modifiant ainsi la forme du fond... et à l'instant suivant, le fond est donc différent... on continue...

En pratique, c'est lorsque l'écoulement est accéléré qu'il érode et lorsqu'il est freiné qu'il sédimente. Pour la dune, il y a accélération puis décélération, donc érosion puis déposition : la dune se déplace dans le sens de l'écoulement. Pour l'antidune, c'est l'inverse, il y a freinage, donc déposition, puis accélération donc érosion. L'anti-dune se déplace donc en remontant l'écoulement.

29.4 Dunes et antidunes

Ici, nous donnons une théorie simplifiée pour comprendre le mouvement de la dune. On a vu que le frottement au fond est (en supposant une dépendance faible en la profondeur)

$$\tau_f = c_f \rho u^2 / 2$$

on en déduit le nombre de Shields, et on a besoin de $(S - S_c)^\beta$. Plaçons nous autour d'un écoulement dont le Shields est S_0 pour une vitesse u_0 , par développement limité autour de u_0

$$\tau_f = (1/2)c_f \rho u_0^2 \left(1 + 2 \frac{u - u_0}{u_0} + \dots\right)$$

de même

$$(S - S_c)^\beta = (S_0 + (S - S_0) - S_c)^\beta = ((S_0 - S_c)^\beta) \left(1 + \beta \left(\frac{S - S_0}{S_0 - S_c}\right) + \dots\right)$$

on suppose ici négligeable l'influence de l_s et le flux est toujours à la valeur staurée. Ce qui veut dire que le flux sera à peu près, puisque $q_{s0} = q_0((S_0 - S_c)^\beta)$

$$q = q_{s0} \left(1 + \beta \left(\frac{S - S_0}{S_0 - S_c}\right) + \dots\right)$$

par la suite on va avoir besoin de $\frac{\partial q}{\partial x}$, on constate donc que $\frac{\partial q}{\partial x} = \left(\frac{\beta q_{s0}}{S_0 - S_c}\right) \frac{\partial S}{\partial x}$ mais S est relié u , par $\frac{c_f \rho u_0^2}{u_0(\rho_s - \rho)gd} \frac{\partial u}{\partial x}$ les variations de S seront proportionnelles aux variations de u , soit K la constante de proportionalité entre les variations

$$K = q_{s0} \beta \left(\frac{1}{S_0 - S_c}\right) \frac{c_f \rho u_0^2}{u_0(\rho_s - \rho)gd}$$

En pratique nous proposons un calcul de l'écoulement sur une topographie de faible amplitude "f" par l'approximation de "Saint-Venant" La forme du fond "f" donne la vitesse puis le frottement.



FIGURE 91 – Train d'antidunes remontant le courant de gauche à droite (le ruisseau se jette dans la mer visible au second plan) à Belle Ile, Port Andro, Morbihan, 23 avril 2005, photo PYL, voir le film sur <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/SEDIM/DUNES/L1020655antidune.mov>

FIGURE 92 – Antidunes remontant l'écoulement d'eau descendante de marée basse, le Pissot Dahouët, 22 . La photo est prise face à la mer (on voit la vague en haut à gauche), dos à l'arrivée d'eau. photo PYL 2009, [click to launch the movie, Adobe Reader required]

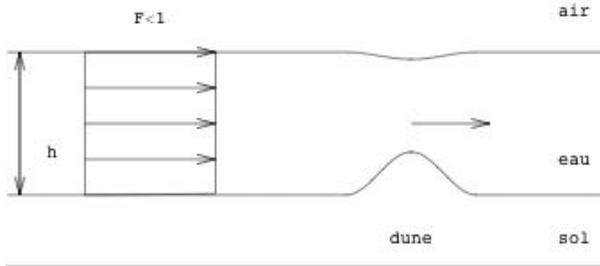


FIGURE 93 – Dune qui descend un courant

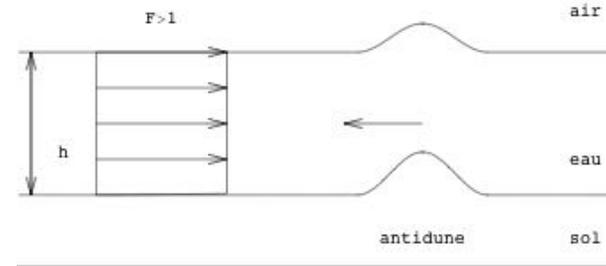


FIGURE 94 – AntiDune qui remonte le courant

Nous avons déjà vu que l'on peut calculer la vitesse par la conservation du flux d'eau, et par Bernoulli (on suppose le fluide faiblement visqueux) la pression hydrostatique (hypothèse de couche mince, soit

$$u(h_0 + f - \eta) = u_0 h_0, \quad u^2 + g\eta = u_0^2.$$

On en déduit ainsi en linéarisant au premier ordre (en supposant que la hauteur du fond est faible par rapport à la hauteur d'eau) :

$$u = u_0(1 + (-1/(F^2 - 1))f) + \dots \quad \text{et} \quad \eta = (F^2/(F^2 - 1))f + \dots \quad \text{où} \quad F^2 = u_0^2/(gh_0)$$

On se souvient qu'un écoulement subcritique ($F < 1$) provoque un creux de la surface libre et une accélération de la vitesse. En revanche, un écoulement supercritique provoque un bourrelet, et la vitesse diminue.

Puis, on calcule le flux de matière dont les variations sont proportionnelles à celles de τ en première approximation, et comme les variations de τ sont proportionnelles à celles de la vitesse, on a au final que les variations de q sont proportionnelles aux variations de u . Soit K la constante de proportionnalité qui englobe tous les paramètres. La conservation de la masse de sédiments (Relation d'Exner) : par perte par sédimentation et par gain par érosion,

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

compte tenu de l'expression de q en fonction de u et en fonction de η cela nous donne l'équation d'évolution du fond sous la forme d'une équation d'advection :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x}.$$

avec pour la vitesse de déplacement du fond : $v = K(-1/(F^2 - 1))/\phi$ Dans ce cadre simplifié, la forme de f ne varie pas !

Interprétation :

si $F < 1$, la vitesse du fluide augmente quand la bosse croît puis diminue quand elle décroît, donc q fait de même. Donc, avant le sommet, il y a érosion ($\partial q/\partial x$ est positif) ; après, il y a sédimentation ($\partial q/\partial x$ est négatif). Donc, la bosse diminue avant le sommet, augmente après, le résultat global est un déplacement vers la droite. Pour un écoulement subcritique $F < 1$, les dunes ont une vitesse positive,

C'est la conclusion inverse si $F > 1$: la vitesse diminue avant le sommet, il y a donc déposition du sable provenant de l'amont, après le sommet, la vitesse réaugmente et provoque donc une érosion. Le sable se déposera plus loin, on a alors un train d'antidunes qui remontent le courant d'eau ($F > 1$, elles ont une vitesse négative).

Films d'antidunes :

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/SEDIM/DUNES/L1020655antidune.mov>

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/SEDIM/DUNES/L1020656antidune.mov>

29.5 Vitesse d'une dune

Nous allons montrer qu'une petite dune va plus vite qu'une grande dune. Le raisonnement est fondé sur l'observation que toutes les dunes ont à peu près la même forme (Il s'agit de chercher une forme invariante). Soit φ la fonction telle que $f(x) = h\varphi(x/L)$ avec h hauteur de la dune et L sa longueur, et on a $0 < \varphi(\xi) < 1$ pour $0 < \xi < 1$. Il s'agit de la forme réduite de la dune. La masse de la dune $m = \int \rho\phi f dx = \rho\phi hL \int \varphi d\xi$, avec $\int \varphi d\xi = cste = O(1)$. D'autre part, on se doute que la dune va se déplacer à la vitesse constante v :

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \text{ s'écrit aussi } \phi v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial x} \text{ soit aussi } \phi v f = q.$$

La forme de la bosse est proportionnelle au flux qui y circule. On peut alors penser avancer l'argument suivant, le flux reste proche du flux saturé, et le frottement reste proche de la valeur du seuil. les avalanches qui se produisent en tête de dune fixent le rapport h/L à une valeur proche de l'angle d'avalanche. La vitesse est donc inversement proportionnelle à la hauteur de la bosse, par la relation $v \sim 1/(\phi h q)$, et comme $hL \sim m$ et $h/L \sim cste$, cela donne $h^2 \sim m$ donc $v \sim 1/\sqrt{m}$. Une petite dune de masse petite va plus vite qu'une grande dune de grande masse.

29.6 instabilités de ride

Dans tout ce qui a précédé on a estimé que le frottement au fond était en phase avec la vitesse $\tau = c_f \rho u^2/2$ et donc avec la hauteur d'eau. En réalité, la couche limite près de la paroi provoque des phénomènes plus subtils : l'amincissement de la couche limite fait que le frottement augmente sur le flanc amont d'une bosse, mais comme la vitesse commence à décélérer pour être extrême au sommet, la couche limite augmente moins, le résultat est que le frottement est extrême avant le sommet de la bosse.

On a besoin de cette influence de l'avance de τ pour expliquer l'instabilité des rides. La description complète étant un peu complexe, on va écrire simplement dans un premier temps que le cisaillement est en avance d'une quantité ℓ par rapport à la vitesse, donc τ en x est en fait proportionnel à $u(x + \ell)$, donc :

$$\tau/(\Delta\rho g d) = K u(x + \ell), \quad l_s \partial_x q + q = K u(x + \ell), \quad \phi \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \text{et enfin } u = u_0 \left(1 + \frac{1}{1 - F^2} f\right)$$

comme on cherche des solutions en $f_k e^{\sigma t + i k x}$, le déphasage est donc inférieur à la longueur d'onde on trouve alors $\sigma(k)$. Le fond est instable lorsque la partie réelle de σ est positive

$$\sigma f_k = -i k K e^{i k \ell} f_k / (i k l_s + 1) \quad \text{donc } \sigma = \frac{-i k K e^{i k \ell}}{i k l_s + 1}$$

Pour $0 < k < k_c$ le fond est donc instable car $Re(\sigma) > 0$. L'instabilité vient de l'existence du déphasage entre le frottement et la vitesse. On a ensuite atténuation. L'atténuation est causée par l_s , l'effet de pente $\Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$ donnerait le même résultat d'atténuation. Ce modèle est un peu simple mais donne une idée de ce qui se passe dans la réalité.

30 Conclusion

Nous avons vu de manière sommaire les différents concepts utiles pour comprendre le déplacement d'un fond érodable : le nombre de Shields permet de mettre en mouvement les particules, il y a alors un flux de matériaux, la loi de conservation d'Exner permet de modifier le fond. La mécanique des fluides par les approximations de type Saint-Venant permet de calculer l'écoulement. Les modèles sont ici un peu simplifiés mais il semble que dans la Nature, les outils proposés permettent de commencer à comprendre les phénomènes.

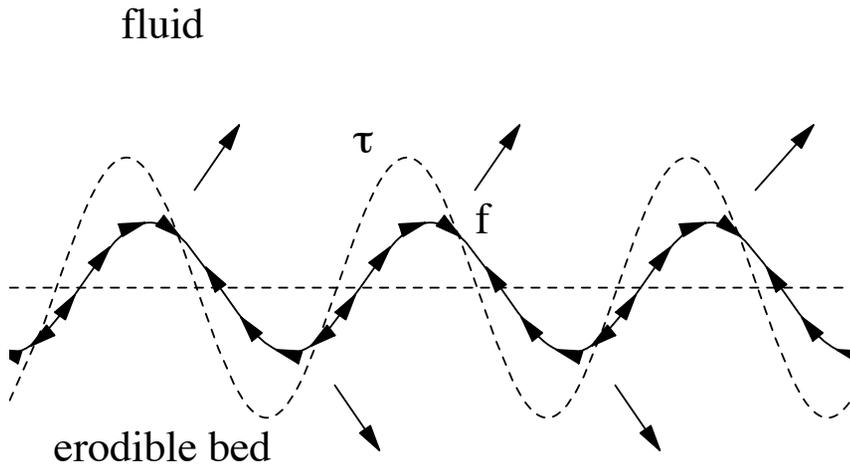


FIGURE 95 – Sur un fond de rides, le fluide va de gauche à droite, le frottement est en avance par rapport au sommet de la bosse. C'est ce qui produit le flux représenté par les flèches sur les rides. On voit qu'il y a un apport de matière au sommet de la ride venant de sa face gauche, et que la face droite est en revanche creusée. La ride augmente en avançant.

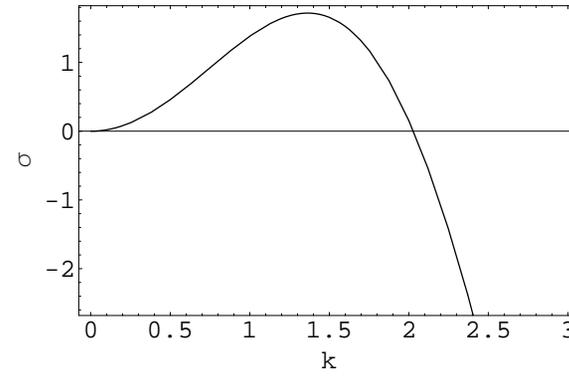


FIGURE 96 – taux d'amplification (partie réelle de $\sigma = \frac{-ikKe^{ik\ell}}{ikl_s+1}$) des rides en fonction de la longueur d'onde. Dans le cas du sable dans l'eau k_{max} correspond à environ 10cm.

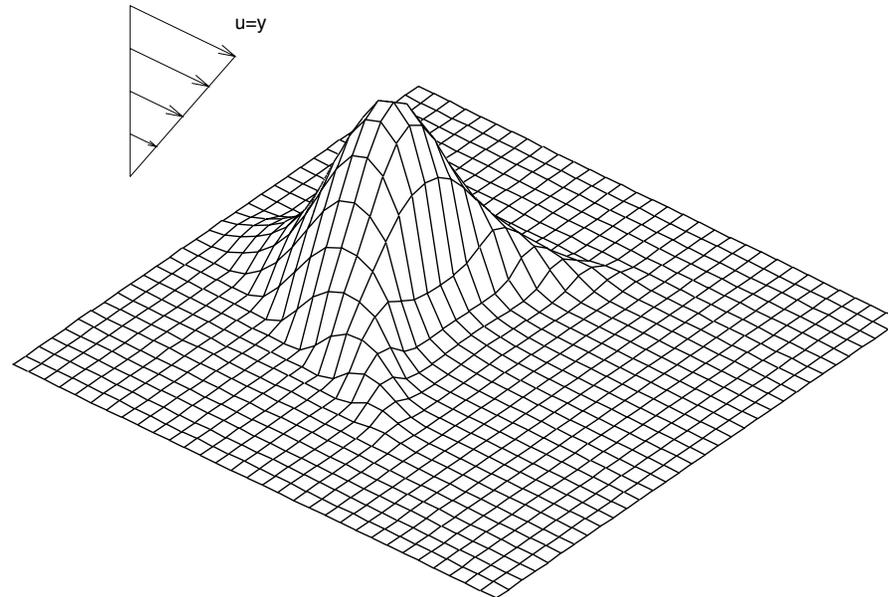


FIGURE 97 – Un exemple de "dune" numérique. Solution 3D des équations simplifiées dans le cas d'un écoulement cisailé. On observe la formation des cornes caractéristique des barkhanes.

31 Annexe 1 Rappel, dérivées d'intégrales

En première lecture, on peut sauter ce paragraphe

31.0.1 Dérivées d'intégrales

Dans cette section nous rappelons la dérivée particulière d'intégrale de volume pour une quantité C (voir Germain [19] II.4.6. p67). Il s'agit de la formule la plus générale Pour un volume V de surface S , sachant que $\frac{d}{dt}dv = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dv$, on dérive l'intégrale de volume en tenant compte du fait que V et sa frontière se déplacent.

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv = \int_V \frac{d}{dt} (C dv) = \int_V \left(\left(\frac{d}{dt} C \right) dv + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} C dv \right)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv = \int_V \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} C + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C \right) dv + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u} C) dv \right)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} C \right) dv + \int_V \vec{\nabla} \cdot (C \vec{u}) dv$$

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} C \right) dv + \int_S C \vec{u} \cdot \vec{dS}$$

Cette expression est une autre forme de la règle de Leibniz

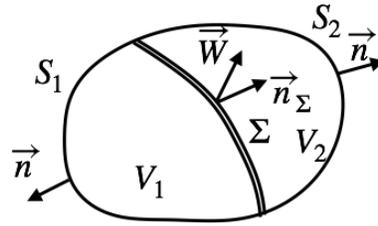


FIGURE 98 – Discontinuité traversant un volume, notations pour la dérivation d'intégrales, ne pas confondre V le volume et v la vitesse relative.

31.0.2 Dérivées d'intégrales avec discontinuité

Jusqu'ici C est implicitement supposée continue, ici, nous allons supposer que non. Une discontinuité traverse le domaine. Les équations de conservation ont la forme

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv + \int_S K \vec{dS} = 0$$

Soit un volume V traversé par une surface de discontinuité Σ , cette surface se déplace à la vitesse \vec{W} et partage V en deux parties V_1 et V_2 , $S_1 + S_2 = S$ la surface totale

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv = \frac{d}{dt} \int_{V_1} C dv + \frac{d}{dt} \int_{V_2} C dv$$

avec pour expression de la dérivée, pour 1, par exemple, la variation à l'intérieur du domaine plus les flux sur la surface totale, S_1 et Σ :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_1} C dv = \int_{V_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} C \right) dv + \int_{S_1} C \vec{u} \cdot \vec{dS} + \int_{\Sigma} C_1 \vec{W} \cdot \vec{dS}_{\Sigma}$$

S_1 et Σ entourent V_1 , le flux est pris sur la surface S_1 et sur Σ , on note C_1 la valeurs prises sur σ en venant de l'intérieur de V_1 . On obtient la même expression pour V_2 , mais on va faire apparaître $d\vec{S}_\Sigma = \vec{n}_\Sigma dS_\Sigma$ car la normale à Σ en venant de 1 est opposée à celle venant de 2 :

$$\int_{\Sigma} C_2 \vec{W} \cdot (-d\vec{S}_\Sigma)$$

car on garde la normale précédente et que l'on suppose que le choix est tel que $\vec{W} \cdot d\vec{S}_\Sigma > 0$, la normale est dirigée de l'extérieur de 1 vers 2. On regroupe

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv = \frac{d}{dt} \int_{V_1} C dv + \frac{d}{dt} \int_{V_2} C dv = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} C \right) dv + \int_S C \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{\Sigma} (C_1 - C_2) \vec{W} \cdot d\vec{S}_\Sigma$$

on utilise souvent la notation de saut $[[C]] = C_2 - C_1$ et $W = \vec{W} \cdot \vec{n}_\Sigma$, et la vitesse relative, la relation fondamentale de saut est donc :

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} C \right) dv + \int_S C \vec{u} \cdot d\vec{S} - \int_{\Sigma} [[C]] W dS_\Sigma$$

il y a trois contributions ; les variations locales à l'intérieur du volume figé, le flux lié à la convection à la surface S et les variations dues à la discontinuité.

On peut réécrire cette dernière relation, en faisant intervenir la vitesse relative $\vec{v} = \vec{u} - \vec{W}$, et en réécrivant la divergence : en évaluant $\int_{\Sigma} C \vec{u} \cdot d\vec{S}$ avant la discontinuité, cela permet d'écrire un flux pour 1 (puis pour 2), avec les vitesses matérielles et

$$\int_{V_1} \vec{\nabla} \cdot (C \vec{u}) dv = \int_{S_1} C \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{\Sigma} (C \vec{u})_1 \cdot d\vec{S}_\Sigma$$

idem avec 2, une autre forme utile de dérivation des intégrales est donc ($\vec{v} = \vec{u} - \vec{W}$) au final

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv = \int_V \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} C \right) + \vec{\nabla} \cdot (C \vec{u}) \right) dv + \int_{\Sigma} [[Cv]] dS_\Sigma$$

Cette forme fait intervenir la vitesse relative, et les équations sous forme locale dans le volume (ce qui va nous servir par la suite).

On a besoin aussi d'un terme sur la périphérie,

$$\frac{d}{dt} \int_V C dv + \int_S K dS = 0$$

Le second terme $\int_S K d\vec{S}$ va se décomposer en $\int_{S_1} K d\vec{S} + \int_{S_2} K d\vec{S}$, on va ajouter et soustraire de part et d'autre de la discontinuité :

$$\int_{S_1} K d\vec{S} + \int_{\Sigma} K_1 d\vec{S}_\Sigma + \int_{S_2} K d\vec{S} - \int_{\Sigma} K_2 d\vec{S}_\Sigma + \int_{\Sigma} (K_2 - K_1) d\vec{S}_\Sigma$$

ce qui donne deux intégrales sur les contours et le saut à la discontinuité

$$\int_S K d\vec{S} = \int_{\partial D_1} K d\vec{S} + \int_{\partial D_2} K d\vec{S} + \int_{\Sigma} [[K]] d\vec{S}_\Sigma$$

Si on met bout à bout

$$[[Cv]] + [[K]] = 0.$$

Ce sont les équations de Rankine Hugoniot.

32 Annexe 2

Le premier à avoir fait l'analogie entre les équations de la dynamique des gaz *gasdynamischer Methoden* régis par les équations d'Euler compressibles et les écoulements à surface libre *Wasserströmungen mit freier Oberfläche* régis par les équations de Saint-Venant est Ernst Preiswerk 1938 <https://www.research-collection.ethz.ch/bitstream/handle/20.500.11850/134893/eth-21334-01.pdf?sequence=1&isAllowed=y> *Anwendung gasdynamischer Methoden auf Wasserströmungen mit freier Oberfläche*

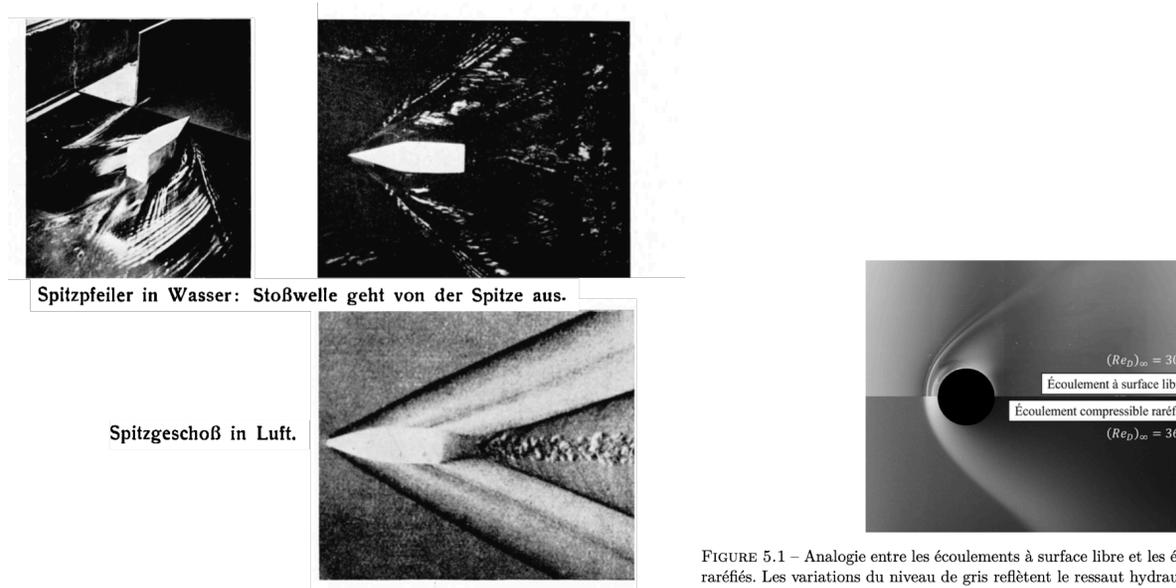


FIGURE 5.1 – Analogie entre les écoulements à surface libre et les écoulements supersoniques raréfiés. Les variations du niveau de gris reflètent le ressaut hydraulique et l'onde de choc.

FIGURE 99 – Analogie aéro/hydro : "pilier pointu" *spitzpfeiler* et balle pointue *spitzgeschoß*, à gauche analogie développée dans la thèse de Léo Kovacs, https://theses.univ-orleans.fr/public/2023ORLE1032_va.pdf

- [24] J.-M. Hervouet (1991) "Présentation du Système TELEMAC" document technique EDF HE 43/96/039/1p
- [25] Huppert "The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface" *J. Fluid Mech.* (1982), vol. 121, p p . 43-58
<http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper47.pdf>
- [26] Huppert "Flow and instability of a viscous current along a slope" *Nature* volume 30 1982 p427
<http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper49.pdf>
- [27] Ho Valance Dupont Ould El Moctar Sacling laws in eolian transport *PRL* 106, 094501 (2011)
- [28] G. B. Whitham-Linear and Nonlinear Waves-Wiley-Interscience (1999)
- [29] Lancaster Nicholas (2005) *Geomorphology of Desert Dunes*
- [30] James Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge Univ Press 1978
- [31] M. J. Lighthill and G. B. Whitham On Kinematic Waves. I. Flood Movement in Long Rivers *Proc. R. Soc. Lond. A* 1955 229, doi : 10.1098/rspa.1955.0088, published 10 May 1955.
- [32] . Miller 1983 USGS "Basic Concepts of Kinematic-Wave Models" <https://pubs.usgs.gov/pp/1302/report.pdf>
- [33] A. Monavon 2009 "Cours de Mécanique des Fluides M1" UPMC.
- [34] Cunge 1968 : Muskingum's method <https://ton.sdsu.edu/cunge205.html>
- [35] Nielsen "Coastal bottom boundary layers and sediment transport" sur googb
- [36] Sir Horace Lamb *Hydrodynamics* Cambridge Mathematical Library, Russ Caffisch-Hydrodynamics-Cambridge University Press(1975)
- [37] R.R. Long "Stratified flows" <http://web.mit.edu/hml/ncfmf/18SF.pdf> et le film en streaming ou en <http://www.youtube.com/watch?v=9hmjcIfy8wE> youtube
- [38] Paterson A.R. (1983) : "A first course in fluid dynamics", Cambridge, 528p (voir chapitre XV)
- [39] S. Popinet A vertically-Lagrangian, non-hydrostatic, multilayer model for multiscale free-surface flows
- [40] A. Petitjean (1998) Recent Progresses in Dam-Break Modelling in France, <http://kfki.baw.de/conferences/ICHE/1998-Cottbus/274.pdf> Case Studies : Dam Break, Dam Break Modelling
- [41] Gerd Sauermann Klaus Kroy, and Hans J. Herrmann Continuum saltation model for sand dunes *PHYSICAL REVIEW E*, Vol 64, 031305
- [42] Service hydrographique et océanographique de la marine Le Service, "Table des marées des grands ports du monde" 1984 - 186 pages
- [43] Pineau-Guillou Lucia (2013). PREVIMER Validation des atlas de composantes harmoniques de hauteurs et courants de marée. Rapport Ifremer, 89p. <http://archimer.ifremer.fr/doc/00157/26801/>
- [44] Frédérique Plantevin Les intégrateurs mécaniques à la prédiction des marées. Jean-Pierre Escofier, Géeard Hamon. Actes de la Rencontre des IREM du Grand Ouest et de la réunion de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques., IREM de Rennes, pp. 129-144, 2009, 2-85728-073-4. hal-04317855 <https://hal.science/hal-04317855/document>
- [45] Simon, B., Gonella, J., 2007. La marée océanique côtière. Institut océanographique, 443 p
- [46] O. Thual <http://thual.perso.enseeiht.fr/xsee/2010/00main.pdf>
- [47] E. Toro "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics A Practical Introduction" 3rd edition, Springer
- [48] Leo C. van Rijn Analytical and numerical analysis of tides and salinities in estuaries; part I : tidal wave propagation in convergent estuaries ISSN 1616-7341 Volume 61 Number 11 *Ocean Dynamics* (2011) 61 :1719-1741 DOI 10.1007/s10236-011-0453-0 <https://www.leovanrijn-sediment.com/papers/P8-2011A.pdf>
- [49] Whitham "Linear and Nonlinear Waves" google book
- [50] K. Whipple https://ocw.mit.edu/courses/earth-atmospheric-and-planetary-sciences/12-163-surface-processes-and-landscape-evolution-fall-2004/lecture-notes/4_sediment_transport_edited.pdf
- [51] Wikhydro <http://wikhydro.developpement-durable.gouv.fr/index.php/Cat\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{e\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19e\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\orgorie:ANSWER>
- [52] C.T. Yang, *Sediment Transport : Theory and Practice* McGraw-Hill, NewYork, 1995, p. 480.

The web page of this text is :

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/>

The last version of this file is on :

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MFEnv/MFEnv.pdf>

