

# Résolution de l'Équation de la chaleur Instationnaire

Ce chapitre présente les solutions analytiques dans les cas simples de l'équation de la chaleur en 1D. Les enseignements que l'on obtient sont cependant fondamentaux pour la compréhension finale de la thermique, en effet les ordres de grandeurs et les paramètres sont généraux et seront applicables à des situations 3D.

## 1 Conduction instationnaire

### 1.1 Equations

Nous rappelons les équations à résoudre:

- équation de la chaleur dans un milieu immobile isotrope homogène, avec des coefficients thermodynamiques constants et terme source:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + r$$

- conditions aux limites (sur chaque portion de paroi) - température pariétale imposée:

$$T = T_p$$

**OU** - flux pariétal imposé:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = \phi_p$$

**OU** - flux pariétal relié à la température pariétale et à la température extérieure par le coefficient d'échange:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = h(T_p - T_{ext}).$$

La résolution numérique en ce nouveau siècle n'est guère plus compliquée (CAST3M, ABAQUS, FreeFEM...). Il faut néanmoins savoir le faire à la main dans le cas 1D pour comprendre.

On rappelle quelques valeurs de  $k/(\rho c_p)$ , pour l'eau  $k/(\rho c_p) = 1.410^{-7}$  air ( $210^{-5}$ ) aluminium ( $910^{-5}$ ).... et  $h$  varie de 5 à 10000 suivant la convection appliquée.

## 1.2 Échelon de température

Pour mémoire, examinons un cas simple: la lamelle 1D soumise à un choc thermique (sans source de chaleur volumique  $r = 0$ ). Cet exemple est la base: il est à connaître. Il s'agit d'étudier maintenant un système épais. Par opposition aux systèmes minces où la température est quasi constante, on comprend mieux le sens: "épais", veut donc dire que la température varie spatialement).

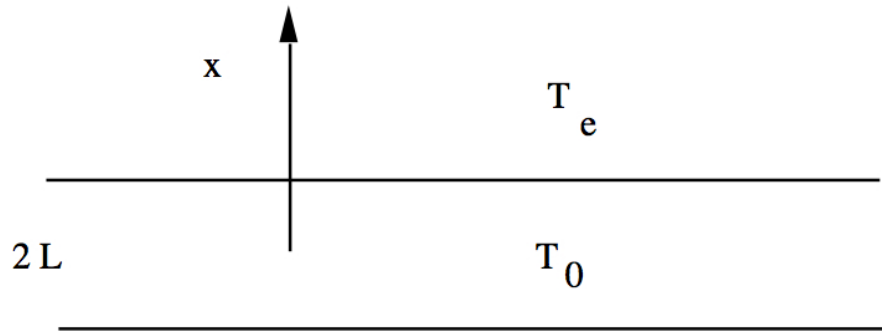


Figure 1: une lamelle infinie de température uniforme au temps initial. On donne un coefficient d'échange  $h$  aux surfaces.

Le problème à résoudre est:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$$

à  $t = 0$  on a  $T(x, t = 0) = T_0$

et pour  $t > 0$  on a  $-k\left(\frac{\partial T(x=\pm L, t)}{\partial x}\right) = \pm h(T(x = \pm L, t) - T_{ext})$

Ce problème est écrit avec des dimensions, en fait, il est subtil de faire disparaître la taille de la lamelle et ses propriétés physiques et d'écrire un problème sans dimension.

### adimensionnement

Posons,  $t = \tau \bar{t}$  et  $x = L \bar{x}$  et  $T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext}) \bar{T}$ . La jauge de temps  $\tau$  est obtenue en s'arrangeant pour qu'il n'y ait plus de coefficients dans les équations on voit de manière simple:

$$\frac{\rho c_p (T_0 - T_{ext})}{\tau} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{k (T_0 - T_{ext})}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2}\right)$$

donc si on prend pour échelle de température  $\tau = L^2/a$  avec  $a = k/\rho c_p$  (diffusivité thermique ne dépend que du matériau) on obtient la forme de l'équation de la chaleur sans dimension:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} \right)$$

L'écriture de la condition de flux à la paroi permet de faire surgir le nombre de Biot. On va supposer ici qu'il est d'ordre 1 pour garder le maximum de termes.

$$-k \left( \frac{\partial T(x = \pm L, t)}{\partial x} \right) = \pm h(T(x = \pm L, t) - T_{ext})$$

devient

$$-\frac{k(T_0 - T_{ext})}{L} \left( \frac{\partial \bar{T}(\bar{x} = \pm 1, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \right) = \pm h(T_0 - T_{ext})(\bar{T}(\bar{x} = \pm 1, \bar{t}))$$

c'est à dire comme  $Bi = hL/k$

$$-\left( \frac{\partial \bar{T}(\bar{x} = \pm 1, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \right) = \pm Bi(\bar{T}(\bar{x} = \pm 1, \bar{t}))$$

• Le problème sans dimension est le plus général possible. (à Biot quelconque), c'est donc:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} \right)$$

avec  $\bar{T} = 1$  en  $\bar{t} = 0$  et  $-\left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \right) = \pm Bi \bar{T}$  en  $\bar{t} > 0$  et  $\bar{x} = \pm 1$ .

• Le problème sans dimension dans le cas où la température est imposée, elle vaut donc 0, et c'est le cas où le nombre de Biot est infini est donc:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} \right)$$

avec  $\bar{T} = 1$  en  $\bar{t} = 0$  et  $\bar{T} = 0$  en  $\bar{t} > 0$  et  $\bar{x} = \pm 1$ . Le problème sans dimension est le plus général possible.

### Résolution

On cherche la solution sous forme de variables séparées  $\bar{T}_k = f(\bar{t})g(\bar{x})$ . L'équation de la chaleur s'écrit si on substitue:

$$f'(\bar{t})g(\bar{x}) = f(\bar{t})g''(\bar{x})$$

et astuce, on divise les deux membres par  $f(\bar{t})g(\bar{x})$  ce qui donne

$$f'(\bar{t})/f(\bar{t}) = g''(\bar{x})/g(\bar{x})$$

On en déduit que à gauche on a une fonction qui ne dépend que du temps et à droite une fonction qui ne dépend que de  $x$ . C'est donc que l'on a une constante.

$$f'(\bar{t})/f(\bar{t}) = K \text{ et } g''(\bar{x})/g(\bar{x}) = K.$$

L'équation de  $f$  est du type:

$$f' = Kf \text{ la solution est donc de la forme } e^{K\bar{t}}.$$

La solution n'est physique que si  $K < 0$ , on pose donc  $K = -k^2$ . L'équation de  $g$  est du type:

$$g'' = -k^2g \text{ la solution est donc de la forme } \cos(k\bar{x} + \phi_k).$$

On obtient très simplement des fonctions trigonométriques en espace (c'est en fait une série de Fourier que l'on construit) et des exponentielles en temps pour la température. Par symétrie par rapport au centre du milieu étudié la phase est nulle  $\phi_k = 0$ . On conserve une constante  $A_k$  multiplicative. Donc toutes les fonctions de la forme:

$$T_k = A_k \exp(-k^2\bar{t}) \cos(k\bar{x} + \phi_k),$$

vérifient l'équation de la chaleur. Nous devons maintenant trouver les valeurs de  $k$  puis les valeurs de  $A_k$ ...

Il faut écrire dans un premier temps les conditions de bord. La condition de bord s'écrit:

$-\left(\frac{\partial T_k}{\partial \bar{x}}\right) = \pm Bi T_k$  en  $\bar{x} = \pm 1$ , donc cela donne:  $-k \sin(\pm k) = \pm Bi \cos(\pm k)$  soit:

$$k \operatorname{tg}(k) = Bi.$$

Il faut calculer toutes les valeurs possibles de  $k$  en fonction de  $Bi$ . On note  $k_i$  les valeurs propres croissantes avec  $i$ , par exemple si  $Bi = \infty$ , il faut résoudre  $\operatorname{tg}(k) = \infty$ , c'est à dire il faut résoudre  $\cos(k) = 0$ , donc les valeurs de  $k_i$  sont  $(2i - 1)\pi/2$ . Il y a une infinité de valeurs de  $k$ . Pour les autres valeurs de  $Bi$ , il faut résoudre numériquement l'équation par une méthode appropriée (Newton, dichotomie...). On trouve alors encore une suite de valeurs  $k_i$ .

- Si  $Bi = 0$ ,  $k_i = (i - 1)\pi$ .  
 Si  $Bi = 0.1$ ,  $k_1 = 0.311$ ,  $k_2 = 3.173$ ,  $k_3 = 6.300$ ,  $k_4 = 9.435...$   
 Si  $Bi = 1$ ,  $k_1 = 0.863$ ,  $k_2 = 3.4256$ ,  $k_3 = 6.4373$ ,  $k_4 = 9.5293...$   
 Si  $Bi = 10$ ,  $k_1 = 1.430$ ,  $k_2 = 4.306$ ,  $k_3 = 7.223$ ,  $k_4 = 10.2...$   
 Si  $Bi = 100$ ,  $k_1 = 1.555$ ,  $k_2 = 4.666$ ,  $k_3 = 7.777$ ,  $k_4 = 10.88...$   
 Si  $Bi = \infty$ ,  $k_1 = 1.57$ ,  $k_2 = 4.72$ ,  $k_3 = 7.854$ ,  $k_4 = 10.99$ ,  $k_i = (2i - 1)\pi/2$ .

En fait, la température s'écrit sous forme d'une somme de toutes ces solutions élémentaires (à  $Bi$  fixé):

$$\sum_{i>0} A_i \exp(-k_i^2 t) \cos(k_i \bar{x})$$

Il faut déterminer les coefficients  $A_i$ .

Cette dernière détermination se fait compte tenu de la condition initiale en temps :

$$1 = \sum_{i>0} A_i \cos(k_i \bar{x})$$

c'est à dire au temps initial, la température est constante et vaut 1. Par les propriétés de l'analyse de Fourier, on multiplie membre à membre cette égalité par  $\cos(k_j \bar{x})$  et on intègre sur l'épaisseur de -1 à 1. On a

$$\int \cos(k_i \bar{x}) \cos(k_j \bar{x}) d\bar{x} = \frac{\sin((k_i - k_j)\bar{x})}{2(k_i - k_j)} + \frac{\sin((k_i + k_j)\bar{x})}{2(k_i + k_j)}$$

donc on a

$$\int_{-1}^1 \cos(k_i \bar{x}) \cos(k_j \bar{x}) d\bar{x} = 1 \text{ si } i = j \quad \text{sinon} = 0$$

Compte tenu du fait que si les indices sont égaux, l'intégrale suivante vaut 1, et si ils sont différents l'intégrale vaut 0:

$$\int_{-1}^1 \cos(k_i \bar{x}) \cos(k_j \bar{x}) d\bar{x} = \delta_{ij}$$

et compte tenu de l'intégrale de cos:

$$\int_{-1}^1 \cos(k_i \bar{x}) d\bar{x} = \frac{4(-1)^{i+1}}{\pi(2i - 1)}$$

les  $A_i$  s'écrivent:

$$A_i = \frac{2 \sin(k_i)}{k_i + \sin(k_i) \cos(k_i)}$$

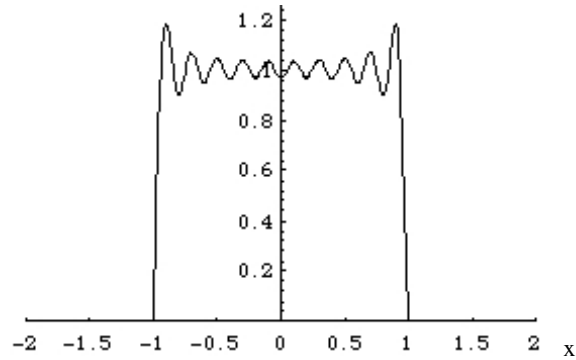


Figure 2: La valeur "1" reconstruite avec 10 modes. En cliquant sur l'image on obtient l'animation (QuickTime) de la reconstruction mode à mode.

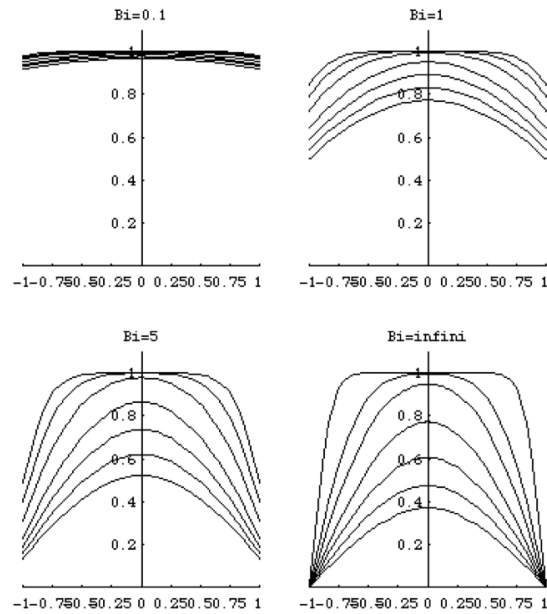


Figure 3:  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t})$  pour  $\bar{t}=0.025$  0.05 0.1 0.2 0.3 0.4 et 0.5  
 . En cliquant sur l'image on obtient l'animation (QuickTime) pour le cas  $Bi = 1$  de la température en fonction du temps

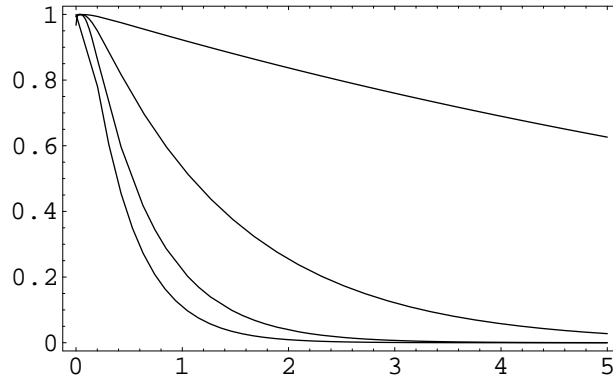


Figure 4: Température en  $\bar{x} = 0$  en fonction du temps pour  $Bi = \infty, 5, 1$  et  $0.1$

Il serait aussi intéressant de tracer la température au centre en fonction du temps pour plusieurs  $Bi$ . On voit alors (figure 4) que plus  $Bi$  est grand, moins la décroissance est rapide.

Le problème est alors résolu, des exemples d'évolution de températures dans différents cas sont présentés sur la figure . L'influence du nombre de Biot sur la solution est clairement mis en évidence.

### 1.2.1 Remarques

i) remarque

- si  $Bi = \infty$ , il s'agit du cas de la température imposée:

$$\bar{T} = \frac{4}{\pi} \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \exp\left(- (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \bar{t}\right) \cos\left((2n-1)\pi\bar{x}/2\right).$$

- si  $Bi = 0$ ,  $k_1 = 0$ , et  $A_1 = 1$ , les autres  $A_i$  sont 0. La température reste constante! C'est normal, le système est isolé (paroi "adiabatique", ou on dit aussi paroi "athermane").

- si  $Bi$  tend vers 0,  $k_1$  tend vers 0, et plus exactement  $k_1 \operatorname{tg}(k_1) = Bi$  donne  $k_1 \sim Bi^{1/2}$  et :

$$\bar{T} \sim \exp(-Bi\bar{t}) \cos(Bi^{1/2}\bar{x}),$$

on retrouve ce que nous avons vu auparavant, dans le cas des systèmes "minces", d'une part le temps n'est plus  $L^2/a = \rho c_p L^2/k$  mais bien  $(L^2/a)/Bi$ , d'autre part

$$\cos(Bi^{1/2}\bar{x}) \sim 1 - Bi\bar{x}^2/2 + \dots$$

la température est presque constante en espace (à l'ordre  $Bi$  près).

ii) remarque

En pratique, il est usuel d'évaluer le nombre de Biot et de dire que si  $Bi > 0.1$ , on utilise la solution complète (milieu dit "thermiquement épais") et que si  $Bi < 0.1$  on utilise l'analyse du milieu dit "thermiquement mince").

iii) remarque

On voit que rapidement (critère empirique usuel (appelé nombre de Fourier)  $\bar{t} > 0.2$ ), il ne reste plus que le premier terme de la série:

$$\bar{T} = A_1 \exp(-k_1^2 \bar{t}) \cos(k_1 \bar{x}) + \dots,$$

le coefficient  $A_1$  varie peu avec  $Bi$ , de 1 ( $Bi = 0$ ) à 1.27 ( $Bi = \infty$ ,  $A_1 = 4/\pi$ ).  
Le coefficient  $k_1$  varie un peu plus: pour  $Bi = 0.1$  on a  $k_1 = 0.3$  et pour  $Bi = \infty$  on a  $k_1 = 1.57$  ( $\pi/2$ ),

$$\text{pour } Bi = \infty \text{ on a } \bar{T} = \frac{4e^{-\frac{\pi^2 \bar{t}}{4}} \cos\left(\frac{\pi \bar{x}}{2}\right)}{\pi}$$

$$\text{pour } Bi = \infty \text{ on a } \bar{T} = 1.27324e^{-(1.5708)^2 \bar{t}} \cos(1.5708 \bar{x})$$

$$\text{pour } Bi = 5 \text{ on a } \bar{T} = 1.2402e^{-(1.3138)^2 \bar{t}} \cos(1.3138 \bar{x})$$

$$\text{pour } Bi = 1 \text{ on a } \bar{T} = 1.1192e^{-(0.8603)^2 \bar{t}} \cos(0.8603 \bar{x})$$

$$\text{pour } Bi = .1 \text{ on a } \bar{T} = 1.0160e^{-(0.3111)^2 \bar{t}} \cos(0.3111 \bar{x})$$

cette formule est utile pour avoir une bonne approximation du champ des températures. On voit que plus  $Bi$  est petit plus  $k_1$  est petit: un système qui échange peu de chaleur se refroidit lentement ( $1/k_1$  est grand). Sur la figure on voit la température au centre, c'est quasi l'exponentielle ci dessus. Pour  $Bi < .1$  on a

$$\bar{T} = e^{-Bi \bar{t}}$$

### 1.2.2 Autres cas

En sphériques, la dérivée est  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T}{\partial r}$ . la solution est de la forme

$$T = \sum_j \frac{2 \sin(k_j) - k_j \cos(k_j)}{k_j - \sin(k_j) \cos(k_j)} \left( \frac{\sin(k_j \frac{r}{R})}{k_j \frac{r}{R}} \right) e^{-k_j^2 \frac{\alpha t}{R^2}}$$

En cylindrique, l'équation est  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r}$ , la solution s'écrit avec des fonctions spéciales, les fonctions de Bessel.



## 2 Résolution numérique directe

On peut résoudre en direct par un calcul en différences finies l'équation de la chaleur. On change à la volée les conditions aux limites.

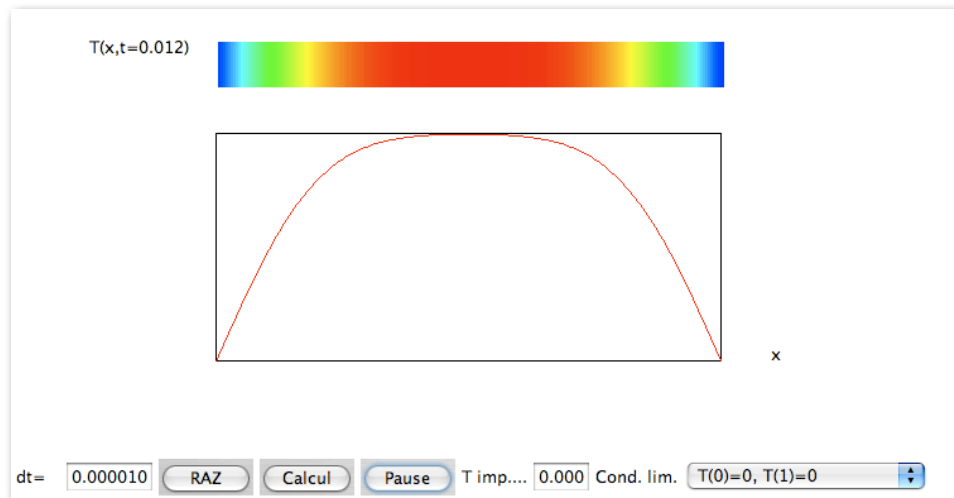


Figure 5: Résolution en direct par différences finies de l'équation de la chaleur. En cliquant sur l'image (en étant connecté) on lance une applet Java qui résout l'équation de la chaleur, on peut modifier les paramètres au vol.

### 3 Cas Instationnaire Milieu semi infini

L'équation de la chaleur pour un milieu semi infini est toujours toujours la même, on voit qu'ici on a pas de longueur spéciale pour mesurer les longueurs. Si on choisit n'importe quelle longueur  $L$ , et que l'on pose  $x = L\bar{x}$ , on a  $t = \bar{t}L^2/a$  avec  $a = k/\rho c_p$  (diffusivité thermique ne dépend que du matériau), l'équation sans dimension:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} \right)$$

En revanche les conditions aux limites sont différentes  $\bar{T} = 1$  en  $\bar{t} = 0$  pour tout  $\bar{x}$  et avec  $\bar{T} = 0$  en  $\bar{x} = 0$  pour tout  $\bar{t} > 0$

La démonstration de la solution est un peu compliquée, mais est liée au fait que la longueur  $L$  est quelconque puisqu'il n'y a pas de longueur dans le problème, or  $L$  apparaît dans  $x$  et  $L^2$  apparaît lui dans le temps  $t$ . On se voit alors que  $x$  divisé par  $\sqrt{t}$  ne dépend pas de  $L$ . Le rapport  $x/\sqrt{t} = \bar{x}/\sqrt{\bar{t}}$  est indépendant du choix de l'échelle de longueur  $L$  et de temps  $L^2/a$ .

Vérifions que la forme suivante, dans laquelle les variables sont liées par le rapport  $\bar{x}/\sqrt{\bar{t}}$  indépendant de  $L$ .

$$\bar{T} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\bar{x}/(2\sqrt{\bar{t}})} \exp(-\xi^2) d\xi$$

convient en substituant dans l'équation de la chaleur.

On appelle "fonction erreur" la fonction  $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi$

Le calcul est encore un peu difficile. Pour simplifier, on pose:

$$\eta = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{t}}} \quad \text{et} \quad \bar{T} = \theta(\eta) \quad \text{avec} \quad \theta(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta/2} \exp(-\xi^2) d\xi$$

On remarque que  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}}$ , donc:

Lorsque l'on dérive  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \theta'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}}$ , or  $\frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} = \frac{-\bar{x}}{2\bar{t}^{3/2}} = -\frac{\eta}{2\bar{t}}$

Lorsque l'on dérive  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \theta'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}}$ , or  $\frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\bar{t}^{1/2}}$

donc  $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} = \theta''(\eta) \bar{t}^{-1}/2$ , et  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = -\eta \theta'(\eta) \bar{t}^{-1}$  on constate donc que:

$$\theta''(\eta) = -\frac{\eta}{2} \theta'(\eta).$$

Vérifions maintenant, avec :

$\theta(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta/2} \exp(-\xi^2) d\xi$  on a

$\theta'(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-(\eta/2)^2)/2$  et aussi

$\theta''(\eta) = -2(\eta/2) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-(\eta/2)^2)/2$  et ça marche:  $\theta''(\eta) = -\frac{\eta}{2} \theta'(\eta)$ .

Ensuite, on vérifie que pour  $\bar{x} = 0$  la température est toujours nulle (ça marche) et pour  $\bar{t} = 0$ , la température vaut 1, ça marche aussi car il est Bien connu que:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = 1$$

En 0,  $\theta'(0) = 1/\sqrt{\pi} = 0.57$

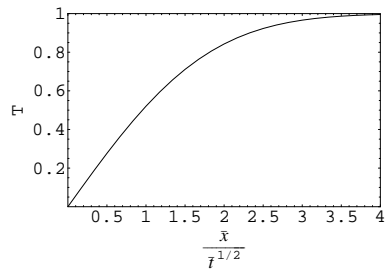


Figure 6: Température en fonction de la variable de similitude

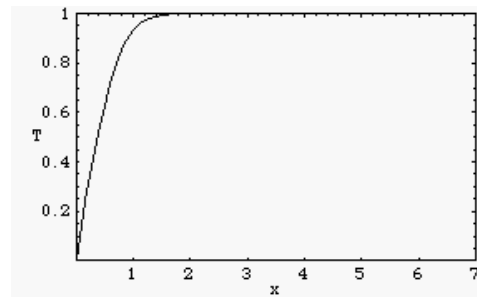


Figure 7: Régime instationnaire dans un milieu semi infini, évolution de la température en fonction de la profondeur à différents temps, [cliquer pour lancer l'animation QuickTime].

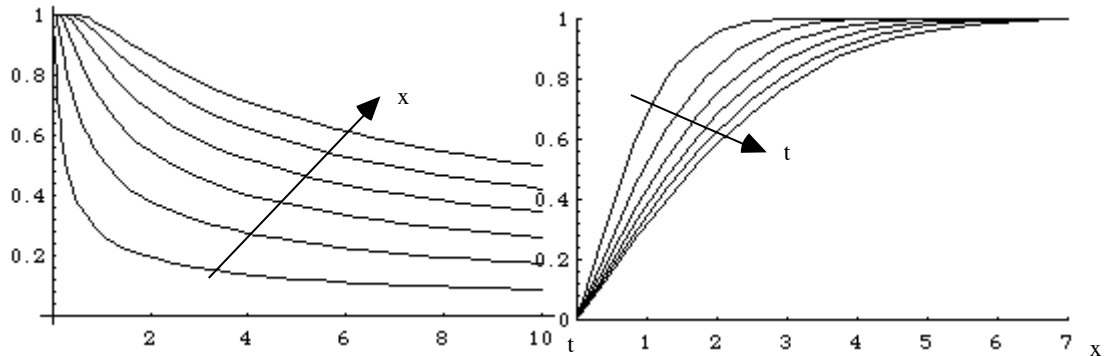


Figure 8: Tracé de  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t}) = \text{erf}(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{\bar{t}}})$  pour  $\bar{x} = 0.5 \ 1.0 \ 1.5 \ 2.0 \ 2.5$  et  $3.0$

Figure 9: Tracé de  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t}) = \text{erf}(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{\bar{t}}})$  pour  $\bar{t} = 0.5 \ 1.0 \ 1.5 \ 2.0 \ 2.5$  et  $3.0$

## 4 Cas à flux imposé

La solution s'écrit...

## 5 Cas avec deux milieux

On se donne une barre infinie, pour  $x < 0$ , initialement  $T = T_1$ , pour  $x > 0$ ,  $T = T_2$ . (ce qui revient à mettre en contact au temps  $t = 0$  deux corps de température  $T_1$  et  $T_2$ , de caractéristiques  $k_1\rho_1c_1$ ,  $a_1 = k_1/(\rho_1c_1)$  et  $k_2\rho_2c_2$ ,  $a_2 = k_2/(\rho_2c_2)$ ).

Instantanément, le plan de contact est porté à une température  $T_p$ , pour  $x > 0$  la température varie de  $T_p$  à  $T_2$ ; pour  $x < 0$ , la température varie de  $T_p$  à  $T_1$  au loin en  $x \rightarrow \infty$ .

Pour  $x > 0$  on a donc  $T - T_p = (T_2 - T_p)erf(x/\sqrt{4a_2t})$

Pour  $x < 0$  on a donc  $T - T_p = (T_1 - T_p)erf(-x/\sqrt{4a_1t})$

L'égalité des flux en  $x = 0$

$$\sqrt{k_1\rho_1c_1}\left(\frac{(T_1 - T_p)}{\sqrt{\pi t}}\right) = \sqrt{k_2\rho_2c_2}\left(\frac{(T_2 - T_p)}{\sqrt{\pi t}}\right)$$

donc

$$T_p = \frac{b_1T_1 + b_2T_2}{b_1 + b_2}$$

avec  $b_1 = \sqrt{k_1\rho_1c_1}$  et  $b_2 = \sqrt{k_2\rho_2c_2}$  l'effusivité du matériau.

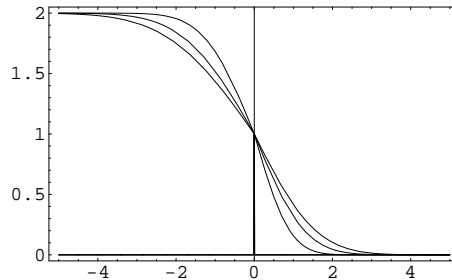


Figure 10: deux barres réunies au centre.

## 6 Cas Instationnaire Forcé

Que se passe-t-il si la température est donnée en  $x = 0$  sous forme d'une oscillation? On cherche des solutions sous la forme:

$$T = \Delta T e^{i(\omega t - kx)} + T_0$$

l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ devient } -k^2 = i\omega/a.$$

ce qui donne, en remarquant  $(-i)^{1/2} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$ :

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1-i) = k_r - ik_i$$

il y a donc un amortissement exponentiel de la température en fonction de la profondeur, il y a une vitesse de propagation  $(2a\omega)^{1/2}$ . Le déphasage en temps entre la surface  $x = 0$  et la position  $x = L$  est donc  $L/(2a\omega)^{1/2}/\omega$

La température s'écrit donc au final:

$$T = T_0 + \Delta T e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)$$

Une caractéristique remarquable de cette solution est le filtrage des fréquences, plus la fréquence est grande  $\omega$ , moins la profondeur est grande de pénétration de la température est grande ( $\sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ )

• A.N. soit un mur de béton soumis à l'alternance journalière de température.  $\rho = 400$  (kg/m<sup>3</sup>)  $c_p = 0.28$  (Wh/kg.K)  $k = 0.13$  (W/m.K), donc la diffusivité est  $a = k/(\rho c_p) = 0.00116$  en  $m^2/h$

Si on désire que ce mur atténue d'un facteur 10 les variations quotidiennes de température extérieures (sur 24h):  $e^{-k_i L} = 0.1$  donc puisque  $\ln(10) = 2.3$ ,  $L = 2.3(2a/\omega)^{1/2}$

Remarque si on passe à 1 an, on passe de environ 50cm à 8 m.

A.N. cylindre en fonte d'un moteur à explosion.

$k = 50$  W/m/°C  $c_p = 440$  J/kg/K  $\rho = 8000$  kg/m<sup>3</sup>  $k/(\rho c_p) = 14 \cdot 10^{-6}$  pour un moteur qui tourne à 3000tr/min, 50tr/s, soit une explosion tous les 2 tours, soit 25 Hz  $L = 2.3(2a/\omega)^{1/2}$  on trouve 1mm.

Valeurs en construction 1Wh=86.4kJ

Matériau	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_p$ (Wh/kg.K)	$k$ (W/m.K)	$k/(\rho c_p)$ (m <sup>2</sup> /h)	$L_1$ en m
Béton cellulaire	400	0.28	0.13	0.0012	0.47
plâtre	900	0.26	0.35	0.0015	
plaque plâtre BA10	790	0.22	0.33		
laine de roche	25	0.26	0.03		
Polystyrène expansé	18	0.38	0.039		
brique creuse	650	0.25	0.45	0.003	0.66

Table 1: matériaux de construction pour  $\omega = 2\pi/86400$  Valeurs issues de <http://www.ideesmaison.com>.

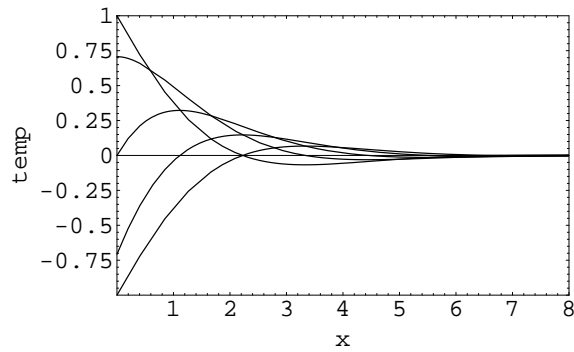


Figure 11: Régime sinusoïdal forcé, évolution de la température en fonction de la profondeur à différents temps, cliquer pour lancer l'animation [Quick-Time].

- Dans le cas où on impose un coefficient d'échange, on trouve après calcul:

$$T = T_m + \frac{\Delta T}{\sqrt{1 + \frac{2}{Bi} + \frac{2}{Bi^2}}} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta - \phi)$$

avec  $Bi = h\delta/k$  et  $\delta = \sqrt{2a/\omega}$  et  $\tan(\phi) = \frac{1}{1+Bi}$ .

## 6.1 Systèmes Minces

On comprend maintenant mieux les approximations qui ont été faites pour les systèmes minces.

Le flux à la paroi s'écrit par définition du facteur d'échange:

$$\underline{q}_w = h(T_w - T_f)\underline{n}.$$

or, la composante normale du flux est  $-k\frac{\partial T}{\partial \bar{n}}$ , adimensionnons  $n$  avec  $L$  la taille caractéristique de l'objet (ne pas confondre  $n$ , la coordonnée normale,  $\bar{n}$ , la coordonnée normale sans dimension et  $\underline{n}$  la normale!!!) et soit  $T_0$  la température au temps  $t = 0$  (ou une autre température pertinente du solide), et soit  $T_f$  la température du fluide extérieur:

$$n = L \quad \text{et} \quad T = T_f + (T_0 - T_f).$$

d'où:

$$-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = \frac{hL}{k}\bar{T}$$

On pose  $Bi$ , le nombre de Biot (ses travaux sur la propagation de la chaleur datent de 1804) (Biot est aussi associé à Savart):

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad \text{tel que:} \quad -\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = Bi\bar{T}$$

Si  $Bi$  est infini, on retrouve le cas de la plaque de température imposée  $\bar{T} = 0$ .

Si  $1/Bi$  est infini, la paroi est adiabatique  $-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = 0$ .

Lorsque le nombre de Biot est petit, on peut faire une simplification qui permet de résoudre beaucoup de problèmes de manière simple, on va voir que la température est quasi constante dans le corps étudié dont la dimension caractéristique est disons  $L$ . Il s'agit des "systèmes minces" (en anglais: le terme *lumped analysis*, analyse globale, est employé, ce qui est plus clair).

On va donc montrer que l'on peut travailler sur la température moyenne du solide.

Pour fixer les idées, reprenons plus simplement. Pour une lamelle d'épaisseur  $2L$ , pour une surface  $S$

$$\rho c_p 2LS \frac{\partial T}{\partial t} = -h(T - T_e)2S$$

soit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{h}{L\rho c_p}(T - T_e)$$



Donc

$$T = T_e + (T_0 - T_e)e^{-\frac{h}{L\rho c_p}t}$$

et comme  $Bi = hL/k$  on a  $\frac{h}{L\rho c_p} = Bi \frac{k}{\rho c_p L^2}$

$$T = T_e + (T_0 - T_e)e^{-Bi \frac{k}{\rho c_p L^2}t}$$

Conclusion, dans le cas des systèmes "minces" *i.e.* caractérisés par un faible nombre de Biot, la température est constante au premier ordre en espace dans le domaine considéré et la décroissance en temps est exponentielle, le temps caractéristique est  $Bi^{-1}$  fois plus long que celui de la diffusion.

*A contrario* un système est dit "épais" si  $Bi$  est d'ordre un et on ne peut plus simplifier.

## 7 Exemples

### 7.1 exemple de l'oeuf

Un oeuf de de 1 cm de rayon à la température de 8°C est mis dans de l'eau à 95°C, on donne  $h = 1200W/m^2/^\circ C$  et  $k = 0.6W/m/^\circ C$ . En combien de temps le centre de l'oeuf est à 65°C?

on prend  $\rho = 1000kg/m^3$  et  $c_p = 4200J/kg/K$

La constante de temps  $\rho c_p L^2/k = 1000 \cdot 4200 \cdot 0.01^2 / 0.62 = 677s = 11.3min$

On calcule  $Bi = hR_0/k = 1200 \cdot 0.01 / 0.6 = 20$  qui est donc assez grand, on utilise la formule pour Biot infini, normalement on devrait utiliser l'équivalent de cette formule mais en sphérique:

$$T = T_e + (T_0 - T_e)1.27324e^{-(1.5708)^2 t / (\rho c_p R_0^2 / k)} \cos(1.5708x/R_0)$$

le centre de l'oeuf est à 65°C au bout de 6min, il est cuit dur.

### 7.2 exemple de NCIS

Un corps à été trouvé à 17h dans une pièce à 20°C, sa température corporelle est de 25°C on estime  $h = 8W/m^2/^\circ C$ . En supposant qu'un corps humain est comme un cylindre de 7cm de rayon, quelle est l'heure de la mort? ( $k = 0.62W/m/K$   $\rho = 996kg/m^3$  et  $C_p = 4178J/kg/^\circ C$ )

on a donc  $L = 0.07m$ ,  $Bi = hL/k$  donne  $Bi = 0.9$  est presque 1;

la constante de temps  $\rho c_p L^2/k = 32888s = 9.1heures$

la formule est donc pour  $Bi = .1$

$$T = T_e + (T_0 - T_e)1.1192e^{-(0.8603)^2 t / (\rho c_p L^2 / k)} \cos(0.8603x/L)$$

ici,  $T_e = 20^\circ C$  et  $T_0 = 37^\circ C$  soit  $\ln((25 - 20.) / (37 - 20) / 1.12) / .86 / .86 * 9.1 = 16.5h$ ,  
l'heure du crime est donc vers minuit 1h du matin. (meilleur que lors de  
l'analyse systèmes minces)

## 8 Conclusion

Ce chapitre était en fait un survol très rapide des différents problèmes de "conduction thermique" (*conduction*) dans leur forme la plus simple et en essayant de mettre en relief les nombres sans dimension.

Retenons l'équation de la chaleur (dans un milieu immobile isotrope homogène, avec des coefficients thermodynamiques constants, sans source volumique):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

et la variété de possibilités de ses conditions aux limites:

- soit  $T$  est donnée sur la paroi,

$$T = T_w$$

- soit le flux normal est donné sur la paroi,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = \phi_p$$

- soit une combinaison des deux est donné sur la paroi,

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \underline{n} = h(T_p - T_{ext}) \underline{n}.$$

L'important facteur d'échange  $h$  est une simplification de TOUT l'extérieur,  $h$  est obtenu expérimentalement ou par l'analyse qui est présentée dans les chapitres suivants.

Retenons l'expression du nombre de Biot  $Bi = hL/k$ , et que:

- si  $Bi \ll 1$ , la température varie peu dans le domaine (milieu "mince"), l'échange est faible et

- si  $Bi \gg 1$ ,  $h$  est très grand, l'échange est très fort, la température est imposée aux bords.

On peut ensuite (dans le cas d'un solide), ayant le champ de température en déduire la déformation de l'objet chauffé (thermoélasticité)...

L'étape suivante dans l'analyse pour un solide, consiste à tenir compte des déformations induites par le chauffage: il s'agit de la "thermoélasticité".

## 9 Bibliographie

- Y. Çengel (1998) "Heat transfert, a practical approach", Mc Graw Hill.  
J. Dhombres J.-B. Robert (1998) "Fourier créateur de la physique-mathématique", coll un savant une époque,  
P.-Y. Lagrée, cours Ensta, Conduction.  
L. Landau & E. Lifshitz (1989) "Mécanique des fluides" ed MIR.  
A. Leontiev (1985) "Théorie des échanges de chaleur et de masse" ed. MIR.  
B. Lucquin & O. Pironneau (1996) "Introduction au calcul scientifique", Masson.  
J.F. Sacadura (1993) "Initiation aux transferts thermiques", Lavoisier Tec & Doc.  
M. Soutif (1991) "Vibration propagation et diffusion", Dunod Université  
[http://ltp2.epfl.ch/Cours/Ph\\_trans\\_chapitre\\_5.pdf](http://ltp2.epfl.ch/Cours/Ph_trans_chapitre_5.pdf)

Consulter aussi <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MECAVENIR>  
le cours complet de thermique de P.-Y. Lagrée,