

# Equation de la Chaleur en Axisymétrique & en 3D

Dans ce chapitre nous faisons un bilan d'énergie pour établir l'équation de la chaleur en axisymétrique. On pourrait faire de même en sphérique. On présente aussi l'équation de la chaleur en 3D finale avec ses conditions aux limites.

## 1 Equation de la chaleur pour un milieu axi symétrique

### 1.1 Bilan pour un milieu axi symétrique

Un milieu axi symétrique possède une symétrie de révolution autour d'un axe privilégié. On utilise les coordonnées polaires  $(r, \theta, z)$ , mais seule la variable  $r$  est utile. L'invariance par rotation fait que la température ne dépend pas de  $\theta$  et l'invariance par translation le long de l'axe fait que  $z$  n'est pas utile.

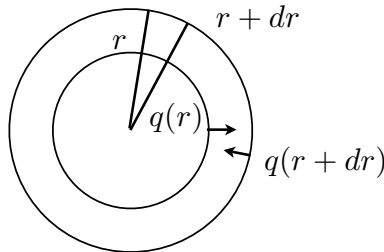


Figure 1: Bilan sur une tranche cylindrique élémentaire.

Sur l'anneau fixe représenté sur la figure ici, par unité de longueur en  $z$ , on a:

- pour la conservation de l'énergie, une quantité  $\rho e(r, t)2\pi r dr$  dans l'anneau d'épaisseur  $dr$  de rayon  $r$  et de surface  $2\pi r dr$ .
- Il y a un flux rentrant en  $r$  qui est  $q(r, t)$ , ce flux rentre à gauche, donc il contribue pour  $q(r, t)(2\pi r dr)$  à l'augmentation de  $e$
- Il y a un flux sortant en  $r + dr$  qui est  $q(r + dr, t)2\pi(r + dr)dr$ , il est

sur une surface plus grande, ce flux sort à droite, donc il contribue pour  $-q(r + dr, t)2\pi(r + dr)dr$  et diminue l'énergie

• s'il y a création de  $e$ , avec un taux disons  $r_c(r)$ , il faut compter  $r_c(r)2\pi r dr$  en plus.

Au total, et par définition de la dérivée en  $r$  :  $(r + dr)q(r + dr, t) = rq(r) - dr \frac{\partial}{\partial r}(rq(r, t)) + \dots$ , donc

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(r, t) (2\pi r dr) = - \frac{\partial}{\partial r} (rq) dr (2\pi dr) + r_c(r, t) (2\pi r dr)$$

soit

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(r, t) = - \frac{\partial}{r \partial r} (rq) + r_c(r, t)$$

Puis en mettant la loi de Fourier:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial r}$$

## 1.2 Equation de la chaleur pour un milieu axi symétrique

L'équation de la chaleur devient:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(r, t) = \frac{\partial}{r \partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + r_c(r, t)$$

Nous allons voir quelques exemples en stationnaire.

## 1.3 Exemples de résolution stationnaire

### 1.3.1 Tuyau à températures imposées

#### i) cas standard

Soit un tuyau de rayon intérieure  $r_1$  et de rayon extérieur  $r_2$ , à l'intérieur il y a un fluide qui impose sa température  $T_1$ , l'extérieur impose sa température  $T_2$ , il n'y a bien sûr pas de source de chaleur dans la paroi.

$$0 = \frac{d}{dr} \left( k \frac{dT}{dr} \right)$$

donc  $dT/dr = A$ , et  $T = A \ln r + B$

$$T = (T_2 - T_1) \frac{\ln r}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$$

ou encore

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

on calcule le flux

$$q = -k(T_2 - T_1) \frac{1}{r \ln(r_2/r_1)}$$

Le problème est résolu.

**ii) cas standard**

Le flux total en  $r$  pour un tronçon de longueur  $L$  est puisque la surface est  $2\pi rL$ :

$$qS = q2\pi rL$$

soit, pour tout  $r$ :

$$qS = 2\pi Lk(T_1 - T_2) \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Le flux est bien conservé. La résistance thermique est donc par définition

$$R_t = \frac{(T_1 - T_2)}{qS} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}.$$

La résistance thermique axisymétrique est donc différente du cas 2D plan

$$\boxed{R_t = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}}.$$

**iii) cas d'une paroi très mince**

On vérifie ensuite que si  $r_2 - r_1$  est petit par rapport à  $r_1$ , le tuyau se comporte comme un mur. Posons,  $r = r_1 + x$  avec  $x \ll r_1$  et  $r_2 - r_1 = e$ ,  $0 < x < e$ . On a alors:

$$\ln(r) = \ln r_1 + x/r_1 + \dots \text{ et } \ln(r_2/r_1) = e/r_1 + \dots$$

donc la température devient:

$$T = \frac{r_1}{e} [(T_2 - T_1)(\ln r_1 + x/r_1 + \dots) + T_1 \ln r_1 + eT_1/r_1 - T_2 \ln r_1] + \dots$$

soit

$$T = \frac{r_1}{e} [(T_2 - T_1)x/r_1 + eT_1/r_1] + \dots$$

on retrouve bien la dépendance linéaire en température au travers de la paroi fine:

$$T = (T_2 - T_1) \frac{x}{e} + T_1 + \dots \text{ de même } q = -k \frac{(T_2 - T_1)}{e}.$$

De même, la résistance thermique est donc

$$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk} = \frac{\ln(1 + (r_2 - r_1)/r_1)}{2\pi Lk} = \frac{\ln(1 + e/r_1)}{2\pi Lk}$$

donc si l'épaisseur est petite, comme  $\ln(1 + \varepsilon) \sim \varepsilon$ , la résistance devient à peu près:

$$\frac{e}{k(2\pi r_1 L)}$$

soit la résistance d'un mur plan de même surface.

Retenons que si le rayon de courbure d'une paroi est bien plus grand que son épaisseur, la paroi se comporte comme un mur plan.

### 1.3.2 Tuyau température imposée/ flux imposé

On peut aussi imaginer les conditions suivantes:  $T = T_1$  en  $r_1$  et un flux  $q = q_2$  en  $r_2$ .

$$0 = \frac{d}{dr} \left( k \frac{dT}{dr} \right)$$

donc  $dT/dr = A$ , et  $T = Alnr + B$ , soit  $T_1 = Alnr_1 + B$ , calcul du flux  $q_2 = -kA/r_2$ .

$$T = T_1 - q_2 r_2 \frac{\ln(r/r_1)}{k}.$$

### 1.3.3 Tuyau température imposée/ coefficient d'échange

On peut aussi imaginer les conditions suivantes:  $T = T_1$  en  $r_1$  et un flux de convection  $q = h(T_2 - T_\infty)$  sur le rayon externe en  $r_2$ .

$$0 = \frac{d}{dr} \left( k \frac{dT}{dr} \right)$$

donc  $dT/dr = A$ , et  $T = Alnr + B$ , soit  $T_1 = Alnr_1 + B$ , la température en  $r_2$  sera telle que  $T_2 = Alnr_2 + B$ , mais en plus, le  $q_2 = -kA/r_2 = h(T_2 - T_\infty)$ . Donc l'égalité des flux (en fait conservation de  $q2\pi r$ ) donne

$$-k(T_1 - T_2)/(ln(r_1/r_2)) = (hr_2)(T_2 - T_\infty)$$

donc  $T_2 = \frac{T_1 + (hr_2 \ln(r_1/r_2)/k)T_\infty}{1 + hr_2 \ln(r_1/r_2)/k}$  et  $q_2 = -\frac{k(T_1 - T_\infty) \left( 1 - \frac{1}{1 + hr_2/k(\ln(r_2/r_1))} \right)}{r_2(\ln(r_1/r_2))}$  et

$$T = T_1 - q_2 r_2 \frac{\ln(r/r_1)}{k}.$$

### 1.3.4 Assemblages Résistances Axi

On se donne un tuyau, en son centre circule un fluide à la température  $T_{int}$  à l'extérieur il est baigné par un autre fluide de température  $T_{ext}$ . Soient  $h_{int}$  et  $h_{ext}$  le coefficients d'échange à l'intérieur et à l'extérieur. Ce tuyau de rayon intérieur  $r_1$  et extérieur  $r_5$  est constitué 4 matériaux différents de conductivité  $k_1$   $k_2$   $k_3$  et  $k_4$ . Nous allons calculer les température  $T_i$  aux rayons  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

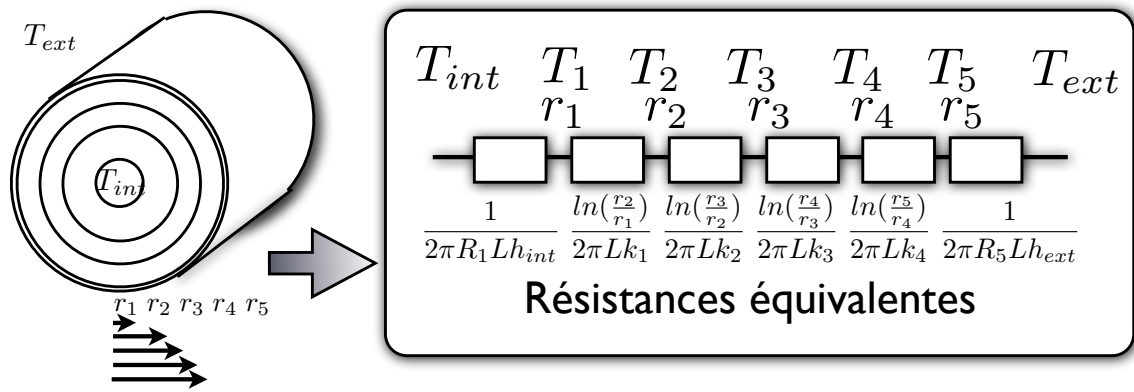


Figure 2: Tuyau constitué de plusieurs pelures de matériaux différents modélisé par des résistances...

Nous venons de voir que le flux est conservé, et qu'entre deux points  $i$  et  $i + 1$  de température  $T_i$  et  $T_{i+1}$  le flux est conservé  $q_i S_i = q_{i+1} S_{i+1}$  (on note  $qS$  le flux qui circule).

Soit  $R_i$  la résistance entre ces deux points, on a donc

$$q_i S_i = \frac{T_i - T_{i+1}}{R_i} \text{ et } R_i = \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{2\pi L k}$$

Nous pouvons donc assembler les résistances thermiques. Sur le dessin, on en a mis 6! Il y a d'abord la résistance (1/inductance) de convection à l'intérieur du cylindre  $R_{int} = \frac{1}{2\pi R_1 L h_{int}}$  puis de  $r_1$  de température  $T_1$  au rayon  $r_2$  à la température  $T_2$  on a la résistance  $R_1 = \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi L k_1}$  puis *etc* on a une suite des résistances des différentes pelures,  $R_2$ ,  $R_3$  qui se termine par

$R_4$  et par le rayon extérieur  $r_5$ , de température  $T_5$  et enfin par la convection extérieure, on a une résistance  $R_{ext} = \frac{1}{2\pi R_5 L h_{ext}}$  qui passe ensuite à la température  $T_{ext}$  au loin. La résistance totale est:

$$R_{tot} = \frac{1}{2\pi R_1 L h_{int}} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(\frac{r_3}{r_2})}{2\pi L k_2} + \frac{\ln(\frac{r_4}{r_3})}{2\pi L k_3} + \frac{\ln(\frac{r_5}{r_4})}{2\pi L k_4} + \frac{1}{2\pi R_5 L h_{ext}}$$

Comme on connaît  $T_{ext}$  et  $T_{int}$  on a le flux total

$$qS = (T_{ext} - T_{int})/R_{tot}$$

on peut ensuite calculer la suite des températures

$$T_1 = T_{int} + \frac{R_{int}}{R_{tot}}(T_{ext} - T_{int})$$

$$T_2 = T_1 + \frac{R_1}{R_{tot}}(T_{ext} - T_{int})$$

$$T_3 = T_2 + \frac{R_2}{R_{tot}}(T_{ext} - T_{int})$$

$$T_4 = T_3 + \frac{R_3}{R_{tot}}(T_{ext} - T_{int})$$

$$T_5 = T_4 + \frac{R_4}{R_{tot}}(T_{ext} - T_{int})$$

### 1.3.5 Création volumique

On pourrait examiner le cas du fil électrique avec production de chaleur par effet Joule, soit  $r_J$  le tau de création de chaleur par effet Joule...

$$\frac{d}{r dr} \left( k \frac{dT}{dr} \right) + r_J$$

donc la température est maximale au centre  $T = T_s - \frac{r_J r^3}{6k}$ . Il s'agit aussi du problème du crayon de matériau radioactif dans le coeur de la centrale.

### 1.4 Rayon critique d'isolation

On se doute que si on rajoute de plus en plus d'isolant contre un mur, moins on aura de transfert thermique. En fait, pour les cylindres ce n'est pas vrai! Prenons un cylindre de rayon extérieur  $r_1$  maintenu à la température  $T_1$ , on

met un isolant ensuite jusqu'à un rayon  $r_2$ , l'ensemble est ensuite refroidi par convection. Soit  $T_\infty$  la température au loin. Le flux qui sort est :

$$qS = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{isol} + R_{conv}} \text{ avec } R_{isol} = \frac{\text{Log}(r_2/r_1)}{2\pi Lk}, \quad R_{conv} = \frac{1}{2\pi hr_2L}$$

Si on cherche le maximum, on voit que  $qS$  passe par un maximum (soit  $d(qS)/dr_2 = 0$ ) pour  $\frac{1}{2r_2\pi Lk} - \frac{1}{2\pi hr_2^2L} = 0$ , soit pour  $r_2 = r_c$  avec:

$$r_c = \frac{k}{h}$$

pour les rayons inférieurs à cette valeur, isoler le tuyau augmente le transfert thermique!

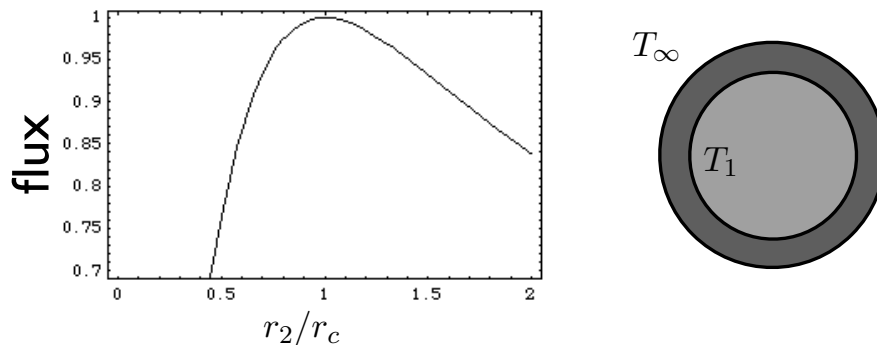


Figure 3: Le flux passe par un maximum  $\left(\frac{T_1 - T_\infty}{\frac{\text{Log}(k/r_1/h)}{2\pi Lk} + \frac{1}{2\pi kL}}\right)$  en fonction de l'épaisseur  $r_2h/k$

En pratique, pour de l'eau chaude dans un tuyau avec un refroidissement par convection naturelle par de l'air, on a  $h \simeq 5W/m^2K$ , pour un matériau isolant dont  $k \simeq 0.05W/mK$ , cela donne un rayon critique de 1cm. En convection forcée, le rayon serait plus petit. On peut donc isoler sans se poser de questions les tuyaux d'eau chaude.

En revanche, pour un fil électrique, le rayon du plastique est plus petit que l'épaisseur critique. L'isolant augmente donc le transfert thermique du fil.

## 2 Forme 3D

### 2.1 Forme générale globale

Les équations fondamentales peuvent être en toute généralité écrites sous la forme:

**variation temporelle = terme de flux + création intérieure**

$$\frac{d}{dt} \iiint e \rho dv = - \iint \vec{q} \cdot d\vec{s} + \iiint r dv$$

$e$  est la quantité qui est conservée, ici l'énergie massique.

$\vec{q}$  est le flux de chaleur

$r$  est le terme source volumique de création d'énergie.

Nous allons écrire cette équation sous forme locale, pour cela examinons l'intégrale de flux:

$$\iint \vec{q} \cdot d\vec{s}$$

Si on s'intéresse à un petit volume  $dx dy dz$ , cette quantité est en fait:

$$\begin{aligned} & -q_x(x, y, z) dy dz + q_x(x + dx, y, z) dy dz - \\ & -q_y(x, y, z) dx dz + q_y(x, y + dy, z) dx dz - \\ & -q_z(x, y, z) dy dx + q_z(x, y, z + dz) dy dx. \end{aligned}$$

or, par développement limité

$$\begin{aligned} & -q_x(x, y, z) dy dz + q_x(x + dx, y, z) dy dz = dx \frac{\partial q_x}{\partial x} dy dz + \dots \\ & -q_y(x, y, z) dx dz + q_y(x, y + dy, z) dx dz = dy \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dz + \dots \\ & -q_z(x, y, z) dy dx + q_z(x, y, z + dz) dy dx = dz \frac{\partial q_z}{\partial z} dy dx + \dots \end{aligned}$$

Soit  $dv = dx dy dz$ , l'intégrale du flux devient

$$\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz + \dots$$

qui est aussi

$$\text{div}(\vec{q}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right)$$

On en déduit que

$$- \iint \vec{q} \cdot d\vec{s} = \iiint (-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) dx dy dz$$

c'est le théorème de Green Ostrogradski.



## 2.2 Forme locale

L'expression du flux de chaleur par la loi de Fourier en 3D:

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T$$

on écrit aussi

$$\vec{q} = -k \overrightarrow{\text{grad}T}$$

L'équation de la chaleur en 3D s'écrit donc:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + r$$

compte tenu de la loi de Fourier:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + r.$$

soit lorsque le milieu est homogène:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = k \vec{\nabla}^2 T + r.$$

soit sous forme développée:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} T + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T \right) + r$$

• on écrit aussi l'équation de la chaleur avec le Laplacien que l'on note  $\Delta$

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T = k \Delta T + r.$$

• conditions aux limites (sur chaque portion de paroi) :

**OU** - température pariétale imposée ("Conditions de première espèce"):

$$T = T_p$$

**OU** - flux pariétal imposé ("Conditions de seconde espèce"):

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = \phi_p$$

**OU** - flux pariétal relié à la température pariétale et à la température extérieure par le coefficient d'échange ("Conditions de troisième espèce"):

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_p = h(T_p - T_{ext}).$$

### 3 Conclusion

Nous avons établi l'équation locale de la chaleur 1D ( $x$ ), en axi ( $x, r$ ) et en 3D ( $x, y, z$ ) (on pourrait le faire en sphérique).

Nous avons présenté des solutions stationnaires à température ou flux imposé ou coefficient d'échange.

### 4 Références

Y. Çengel (1998) "Heat transfert, a practical approach", Mc Graw Hill.

J. Crabrol (89) "Transferts de chaleur, tome 1 les principes", collection technologies, Masson

P.-Y. Lagrée, Equation de la chaleur en Axi & en 3D, Cours MECAVENIR/EPU 2008

J.F. Sacadura (1993) "Initiation aux tranferts thermiques", Lavoisier Tec & Doc.

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Conduction\\_thermique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Conduction_thermique)

<http://www.grasp.ulg.ac.be/cours/2cm/thermo13.pdf>

Tous les ouvrages 536.2 dans une bibliothèque.

Consulter aussi <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MECAVENIR>  
le cours complet de thermique de P.-Y. Lagrée.