Systèmes Minces

Dans ce chapitre nous faisons un bilan d'énergie pour établir l'équation de la chaleur dans le cas où la température reste quasi constante dans le corps. Il s'agit d'une approximation qui peut être grossière dans certains cas. Cependant, elle est très utile et servira pour dimensionner rapidement des dispositifs de chauffage ou de refroidissement. Nous verrons dans un chapitre ultérieur les limites de cette approximation.

On parle de Systèmes Minces ou encore d'Analyse Globale.

1 Généralités

1.1 Problème

Connaissant une géométrie d'un objet, des conditions aux limites et toutes les caractéristiques physiques de cet objet, il nous faut en déduire l'élévation de température, le flux à fournir pour chauffer ou à évacuer pour refroidir...

1.2 Exemples

- bonhommes dans la pièce (chacun est une source de 70W)
- chauffage central/ centrale nucléaire
- navette spatiale
- réacteurs chimiques: chauffer pour apporter l'énergie de la réaction chimique, ou au contraire refroidir une réaction exothermique.
- moteurs thermiques (voitures avions...)... car pour faire fonctionner un moteur, il faut une source chaude et une source froide...
- la cuisine, de la cuisson à la décongélation...
- les processeurs, les composants électroniques
- la météo
- ...
- tout!

Tous ces transferts mettent en jeux des équations de conservation d'énergie. D'où l'intérêt d'avoir défini l'énergie interne et sa variation avec la température par l'intermédiaire de la capacité calorifique.

2 Différents mécanismes

On distingue différents mécanismes de transferts de chaleur. Dans chacun des cas on écrira le taux de chaleur qui s'échappe par unité de temps en fonction de l'écart de température entre le corps et l'extérieur.

$$\boxed{\dot{Q} \propto -(T - T_e),}$$

Pour ce qui est du signe, (compte tenu du second principe), $\dot{Q} > 0$ si $T < T_e$, la chaleur reçue par le système est positive si l'extérieur est plus chaud.

• Le premier est la **conduction**, c'est celui que nous allons étudier dans le chapitre suivant. La chaleur fournie à un endroit du corps est propagée de proche en proche dans le corps. Dans le cas du gaz, nous avons vu qu'il s'agissait de chocs entre molécules, dans le cas du solide, de vibrations des atomes. La conduction est un mode local de transport de la chaleur qui égalise les températures, la conduction est toujours présente dans les corps.

• le second est la **convection**, la chaleur est cette fois transportée par le mouvement du milieu: le fluide "convecte" la température. Nous distinguerons deux cas particuliers, la **convection forcée** et la **convection naturelle** ou convection libre. Dans le premier cas, la température est simplement transportée par le fluide, dans le second cas, il n'y a pas d'écoulement imposé mais la densité varie avec la température. C'est la poussée d'Archimède qui intervient, donc c'est l'existence de la gravité la variation de densité produit le mouvement. Il est alors bien connu que l'air chaud monte et l'air froid descend. En réalité, quand il y a convection il y a toujours un peu de conduction, mais elle est négligeable.

• Il y a aussi le rayonnement. Le corps rayonne de l'énergie sous forme de lumière. Chaque élément de surface rayonne de l'énergie proportionnellement à la loi de Stephan-Boltzman du corps noir en σT^4 (avec $\sigma = 5.67\ 10^{-8} W/(m^2 K^4)$).

3 Lois de conservation, forme générale

Les équations fondamentales de la mécanique des "milieux continus" expriment les lois générales de la physique indépendamment des propriétés "spéciales" des matériaux. Les lois de conservations pour un domaine donné peuvent être en toute généralité écrites sous la forme:

variation temporelle = terme de flux + création intérieure

Le bilan de n'importe quelle quantité de la physique, la masse, la quantité de mouvement, l'énergie....

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint a dv = -\iint \overrightarrow{J}\cdot d\overrightarrow{s} + \iiint \varphi_a dv}$$

• a est la quantité qui est conservée.
• $\overrightarrow{J}$ est le flux associé, le signe moins est une convention de définition, on choisit d'orienter les normales des surfaces vers l'extérieur, donc le produit scalaire $\overrightarrow{J}\cdot d\overrightarrow{s}$ est positif si le flux est dans le sens de la normale. Ce qui veut bien dire que le flux est sortant.
• φ_a est le terme source volumique.

Dans le cas de la chaleur, on utilise la notation $\overrightarrow{q}$ (pour $\overrightarrow{J}$) et a est l'énergie volumique ρe.

Le problème de la Thermique est d'évaluer le flux d'énergie qui s'échappe.

4 Analyse globale: systèmes minces

4.1 Bilans, flux

Dans certains cas on peut rester sur une description globale.
Il s'agit de cas où le corps se refroidit lentement, la conduction égalise rapidement la température intérieure: la température du corps est en équilibre continuel (il n'y a pas de fortes variation de températures dans le corps). Le flux de chaleur provient de l'échange avec l'extérieur du corps, ce flux est faible.

Nous nous concentrons donc pour l'instant sur ces exemples où il y a une variation pas très forte de la température dans l'objet. Cette approximation sera d'autant meilleure que l'échange est faible, que la taille ou l'épaisseur du système est faible (et que la conduction qui existe à l'intérieur du corps est forte, de manière à égaliser la température dans le corps).

Pour fixer les idées, on commence par ce cas dit "d'analyse globale". Les lois de conservations pour un domaine donné invariant par translation en y et z peuvent être écrites sous la forme:

variation temporelle totale =

= (ce qui rentre - ce qui sort) des surfaces +

+ création intérieure volumique

où les variations sont prises par unité de longueur en y et z. Faisons un petit dessin pour calculer ce bilan. On suppose que le corps ne bouge pas.

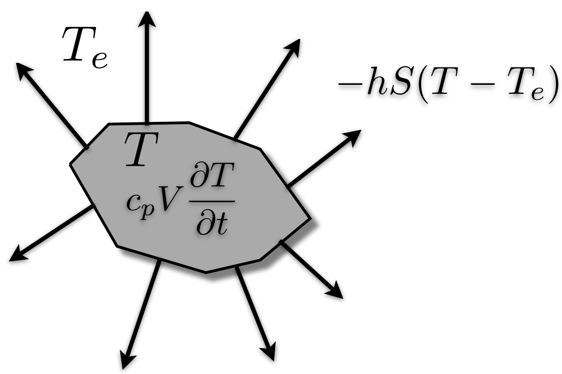


Figure 1: Bilan sur le corps considéré de température T (la paroi est à la température $T_w = T$).

On veut évaluer le flux de chaleur provoquant l'apport de chaleur par unité de temps:

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint \overrightarrow{q} \cdot d\overrightarrow{s} = ?$$

Par définition $\overrightarrow{q}$ est le vecteur courant de chaleur. Il est tel que le taux de chaleur reçu par la surface considérée du D est égal par définition à:

$$\dot{Q} = \int_{\partial D} -\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{n} ds$$

le signe $-$ résulte de la convention adoptée: car $\overrightarrow{n}$ est la normale extérieure. Le flux de chaleur est compté positif dans le sans des températures décroissantes, le produit scalaire est alors positif, et $\dot{Q} < 0$ si le système cède de la chaleur à l'extérieur.

4.2 flux: coefficient d'échange

Le flux à la paroi s'écrit par définition du facteur d'échange:

$$\boxed{\overrightarrow{q}_w = h(T_w - T_e)\overrightarrow{n}} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{q}_w = -h(T_e - T_w)\overrightarrow{n},$$

T_w est la température à la paroi "le mur" *wall*, on la note aussi des fois T_s la température de la surface. Comme dans le cas des systèmes minces, la température du corps est uniforme, on a $T = T_w$. Enfin, T_e est la température du fluide au loin (température à l'extérieur). $\overrightarrow{n}$ est la normale au corps orientée vers l'extérieur. C'est la loi de Newton (1643-1727). L'unité de h est ($\mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$)

On se place bien ici dans le cadre d'une simplication qui permet de résoudre beaucoup de problèmes de manière simple, on va supposer que la température est quasi constante dans le corps étudié. Il s'agit des"systèmes minces", nous verrons plus loin pourquoi on parle de ce terme. En anglais: le terme *lumped analysis*, analyse globale, est employé, ce qui est plus clair.

On va donc travailler sur la température moyenne du solide T, donc

(ce qui rentre - ce qui sort) des surfaces

s'écrit

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint \overrightarrow{q} \cdot d\overrightarrow{s} = -h(T - T_e)S.$$

On retiendra donc:

$$\boxed{\dot{Q} = -h(T - T_e)S,}$$

On a bien $\dot{Q} > 0$ si $T < T_e$, la chaleur reçue par le système est positive si l'extérieur est plus chaud.

Si le corps est composé de plusieurs surfaces S_1 S_2 etc, soumises à des températures T_{e1}, T_{e2} etc, avec des phénomènes d'évacuation de la chaleur différents h_1 h_2 etc, on écrira le bilan pour chaque surface:

$$-\iint \overrightarrow{q} \cdot d\overrightarrow{s} = -h_1(T - T_{e1})S_1 - h_2(T - T_{e2})S_2 + etc$$

4.3 Cas particulier du rayonnement

Chaque élément de surface rayonne de l'énergie selon la loi de Stephan-Boltzman du corps noir en $\varepsilon\sigma T^4$ (avec $\sigma = 5.67\ 10^{-8} W/(m^2K^4)$), ε est l'émissivité. (elle vaut environ ε =0.1 à 0.2 pour les métaux polis, de 0.2 à 0.4 pour les métaux et $\varepsilon = 0.9$ pour les rocs, les briques, l'eau et la peau...)

$T = 2900K$ est maximum pour la longueur d'onde = 1 μm (loi de déplacemen de Wien : $\lambda_m T = 2900 \mu m K$). Un corps à $300K$ rayonne entre 5 et $50\mu m$, c'est l'infrarouge. Un métal chauffé devient rouge vers 800K. Les fils des ampoules est à environ 2700. Le soleil est à 5800K.

Comme l'objet à la température T_s est en face d'autres objets T_e, ceux ci émettent aussi ers l'objet étudié, on a donc un bilan de flux par unité de surface:

$$\overrightarrow{q}_{rayonnement} = \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_e^4)\overrightarrow{n}$$

Si les écarts de températures ne sont pas trop grands, on a par développement limité: $(T_s^4 - T_e^4) \simeq 4T_e^3(T_s - T_e)$, ce qui donne un facteur h linéarisé de rayonnement:

$$\overrightarrow{q}_{rayonnement} = h_r(T_s - T_e)\overrightarrow{n} \text{ avec } h_r = 4\varepsilon\sigma T_e^3.$$

4.4 Exemples de valeurs

(pour la lecture des tables de coefficients h il faudra faire très attention aux températures de référence, car h dépend de la température!).

La "gamme des valeurs" de h ($\mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$) est:

rayonnement	
(linéarisé a 300K)	1
convection libre (air)	5-25
convection libre (eau)	100-900
convection forcée (air)	10-500
convection forcée (eau)	100-15000
convection forcée (huile)	50-2000
conv. f. (métaux fondus)	6000-120000
eau bouillante	2500-25000
vapeur d'eau se condensant	50000-100000

4.5 Bilan d'énergie

Pour l'énergie, le terme de

$$\textbf{variation temporelle} \text{ est } \rho c_p V \frac{\partial T}{\partial t}$$

il est égal au terme de flux que l'on vient d'écrire, et on suppose ici qu'il n'y a pas de création volumique.

4.6 Bilan final

Donc, pour un objet de surface totale S et de volume V, la température est T, la température extérieure est T_e.

$$\boxed{\rho c_p V \frac{\partial T}{\partial t} = -h(T - T_e)S}$$

soit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{h}{(V/S)\rho c_p}(T - T_e)$$

Donc par intégration

$$T = T_e + \Theta e^{-\frac{hS}{\rho c_p V}t}$$

où Θ est une constante d'intégration que l'on détermine en écrivant qu'au temps initial $t = 0$ la température du corps était égale à T_0. Donc la solution qui vérifie la condition initiale en temps est

$$\boxed{T = T_e + (T_0 - T_e)e^{-\frac{hS}{\rho c_p V}t}}$$

la température décroît exponentiellement en temps, on définit τ:

$$\boxed{\tau = \frac{\rho c_p V}{hS}}$$

la constante de temps de la décroissance exponentielle. La température relaxe vers la température extérieure qu'elle atteint en un temps de l'ordre de grandeur de la constante de temps. Plus la surface est grande ou plus le coefficient d'échange est grand ou plus le volume est faible ou plus la capacité calorifique est faible ou plus la densité est faible plus le temps de variation de température est faible et plus la mise à l'équilibre à la température extérieure est rapide.

Conclusion, dans le cas des systèmes "minces", la température est constante au premier ordre en espace dans le domaine considéré et la décroissance en temps est exponentielle, le temps caractéristique est $\frac{\rho c_p V}{hS}$.

5 Exemples

5.1 Refroidir une tasse de café

• Énoncé
D'après H This, S. Hawking s'est posé la question de refroidir son café en trempant un sucre au bon moment. Mais, l'effet semble faible. En revanche, This (page 54) se pose la question de refroidir une tasse de 20cℓ de café bouillant avec 7,5 cℓ de lait à température ambiante.

Premièrement, on fait l'expérience initiale: une tasse de 20cℓ de café bouillant on met tout de suite le lait, on suppose que le mélange s'établit à une température T_0 très vite et que le mélange se refroidit à l'air libre lentement ensuite. Il mesure qu'il faut 10 minutes pour franchir la température de 55°C (qui est supportable pour boire un café d'après This). En déduire la constante de temps du système.
Ensuite, on fait une deuxième expérience. On part des 20cℓ de café bouillant, sans mettre de lait, on laisse refroidir. On admet que la constante de temps reste la même. On ajoute le lait quand la température passe à 75°C. Montrer que l'on atteint la température de 55°C plus rapidement que dans le cas précédent.
• Correction
1) le bilan commence par un mélange rapide du lait et du café. Pendant ce mélange, on suppose qu'il n'y a pas d'échanges avec l'extérieur $c_p v_c(T_0 - T_{100}) + c_p v_l(T_0 - T_{air}) = 0$ donc $T_0 = (v_c T_{100} + v_l T_{air})/(v_c + v_l)$ la température est de 78.2 °C. Ensuite, on a le bilan

$$\rho c_p V \frac{\partial T}{\partial t} = -hS(T - T_{air}).$$

de solution $T = (T_0 - T_{air})e^{-t/\tau} + T_{air}$, avec $T_0 = 100$, $T_{air} = 20$ et à $t_{55} = 600s$ $T_{55} = 55$ donne $\tau = -t_{55}/(ln((T_{55} - T_{air})/(T_0 - T_{air}))$ soit une constante de temps de 1180s (19min).
2) La température de 75°C est obtenue pour un temps de 442s, on mélange ensuite le lait. La température devient (20 *75 + 7.5 *20)/(27.5)=60°C. L'ensemble se refroidit et passe à 55°C en 158s. Le temps total est de 600s. C'est exactement le même temps.
Conclusion, This dans son livre donne un temps plus court pour la seconde configuration... Il est possible que la constante de temps est plus courte dasn le cas non mélangé (car la dimension est plus faible $(27.5/20)^{1/3} \sim 1.1$). On atteint donc 75°C en 398s. On gagne donc environ 42 secondes.

5.2 L'assiette de soupe

• Énoncé

Un exemple important que l'on peut maintenant traiter est celui du refroidissement de l'assiette de soupe (question posée par Feynman, et partiellement reprise dans This):

$$\rho c_p V \frac{\partial T_s}{\partial t} = -hS(T_s - T_{air}).$$

On voit que le coefficient d'échange dû au rayonnement est faible (~1) de même la convection naturelle au dessus de l'assiette ne la refroidit pas facilement (5-25). En revanche si on souffle c'est mieux (10-500)!!! Si maintenant on met en mouvement la soupe et avec la cuillère on prend et on verse, on égalise mieux la température dans la soupe et on augmente la surface S.

5.3 Voiture au Soleil

• Énoncé

Faire un bilan thermique sur une voiture exposée au soleil en été mais refroidie par convection naturelle $h = 2.4(T - T_e)^{1/4}$ avec $T_e = 30$°C. on se donne $\rho = 8000$ $c_p = 480$ $e = 5mm$ (épaisseur de la tôle). La température initiale est T_e.

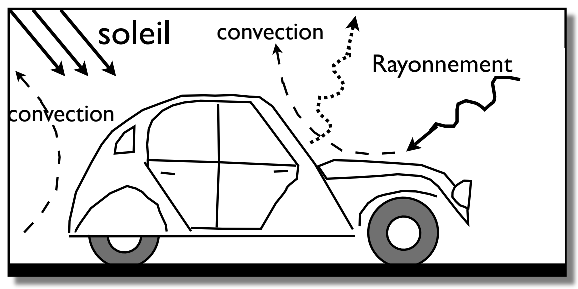


Figure 2: Bilan sur une voiture

• Correction

La voiture reçoit à la fois le rayonnement du soleil ($700W/m^2$) et de l'atmosphère.

la voiture se refroidit par convection naturelle, on a mis un coefficient 1.5 à la louche pour estimer le fait que la surface exposée au soleil est plus petite que celle qui dissipe

$$\rho c_p e S_t \frac{dT}{dt} = P_{recue} S_r - Sh(T - T_e) - S h_r T^4$$

S_t surface totale, S_r surface exposée au soleil, S surface totale. En régime stationnaire, on obtient la température finale comme étant T_f

$$700 + 5.6710^{-8}(273+30)^4 - 1.5*2.4(T_f - 273 - 30)^{1.25} - 1.5*5.6710^{-8}T_f^4 = 0$$

pour résoudre on peut travailler par essai erreur et encadrement de la solution, on trouve $T = 273 + 54.7K$.
La voiture est portée à 55°C.

La résolution numérique directe en fonction du temps est impossible, il faut passer par une méthode numérique comme celle expliquée en annexe, la constante de temps est environ (grossière estimation à peaufiner) $480 * 8000 * 510^{-3} = 5.3h$, on voit sur la courbe que la température d'équilibre est atteinte en à peine une heure.

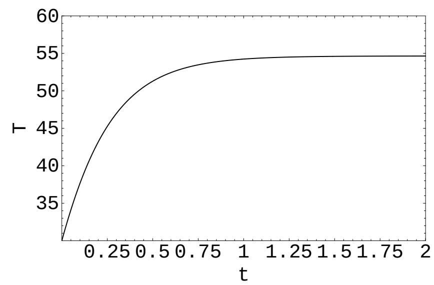


Figure 3: Tracé de la solution numérique approchée, temps en heures.

5.4 exemple de NCIS

• Énoncé

Un corps à été trouvé à 17h dans une pièce à 20°C, sa température corporelle est de $25°C$ on estime $h = 8W/m^2/°C$. En supposant qu'un corps humain est comme un cylindre de 30 cm de diamètre, quelle est l'heure de la mort? ($\rho = 996kg/m^3$ et $c_p = 4178J/kg/°C$

• Correction

L'échelle caractéristique est

$$V/S = \pi 0.15^2 * 1.7/(2\pi 0.15 * 1.7 + 2\pi * 0.15^2) = 0.0689m$$

on a donc $L = 0.07m$, la constante de temps est :

$$t_c = \frac{\rho c_p V}{hS} = 35842s = 9.95heure$$

la formule est donc

$$T = T_e + (T_0 - T_e)e^{-(t/(t_c)}$$

ici, $T_e = 20°C$ et $T_0 = 37°C$ soit -ln((25 - 20.)/(37 - 20)/1.12)*9.96=12.2h, l'heure du crime est donc vers 5h du matin.

5.5 Dimensionnement d'un fusible électrique.

• Énoncé

Un fusible électrique est un dispositif qui fond lorsque l'intensité dépasse une intensité critique I_c. On veut dimensionner un tel fusible. Le fusible est constitué d'un fil métallique de longueur L tendu dans de l'air à la température ambiante T_a. On note h le coefficient d'échange global entre le fil et l'air, T_f la température de fusion du métal et ρ_e sa résistivité électrique (la résistance est $R_e = \rho_e$longueur/section). On fixe les données suivantes : $T_a = 25°C$, $T_f = 300°C$, $\rho_e = 10^{-7}\Omega.m$, $I_c = 30A$, $h = 40W.m^2.K^{-1}$, $L = 4cm$, $\rho = 8000kg.m^{-3}$,$c = 500J.kg^{-1}.K^{-1}$.

1- Déterminer le diamètre du fusible.

2- Calculer le temps de réaction en fonction du rapport I/I_c.

• Correction

Figure 4: Fusible

La résistance électrique du tube est $R_e = \rho_e L/(\pi R^2)$, la puissance électrique est $R_e I^2$, le bilan d'Energie

$$\rho c_p V \frac{\partial T}{\partial t} = -hS(T - T_a) + R_e I^2.$$

avec $S = 2\pi RL$ la surface du tour du fil. La température d'équilibre est telle que $T_e = T_a + (R_e I^2)/(hS)$. On veut que cette température soit juste à peine inférieure à T_f pour $I = I_c$, ce qui donne $R^3 = (\rho_e I_c^2)/(2\pi^2 h(T_f - T_a))$ soit $2R = 1.5mm$. C'est indépendant de la longueur car h et R_e sont proportionnels à L.

$$\tau = \rho c_p V/(hS), \ \ \tau \frac{\partial T}{\partial t} = -(T - T_a) + (R_e I^2/hS), \quad T(0) = T_a$$

donc $T(t) = (R_e I^2/hS)(1 - e^{-t/\tau}) + T_a$ Si $I \leq I_c$, la température de fonctionnement est $(R_e I^2/hS) + T_a \leq T_f$, même si $I = I_c$ on a T_f au bout d'un temps infini. Si I est légèrement supérieur I_c, le temps caractéristique est environ $\tau = \rho c_p R/(2h) = 37s$. Soit t_c le temps au bout duquel on atteint T_f, donc $T_f = (R_e I^2/hS)(1 - e^{-t_c/\tau}) + T_a$, mais comme par définition de I_c on a $T_f = T_a + (R_e I_c^2)/(hS)$ donc $I_c^2 - I^2 = -I^2 e^{-t_c/\tau}$ donc $t_c/\tau = \ln(1/(1 - (I_c/I)^2))$. par exemple pour $I = 2I_c$, $t_c = 10.6s$

5.6 Temps de réponse d'un thermocouple

• **Énoncé**
Le thermocouple fait partie des capteurs de température les plus utilisés. Il est constitué de deux fils métalliques soudés à leurs extrémités. Chacune des extrémités est portée à une température différente. Ce déséquilibre de température provoque un léger champ éléctrique. On forme ainsi un générateur (par effet Seebek), dont la force électromotrice dépend de la température des deux soudures. Connaissant la température d'une des soudures (par exemple plongée dans de la glace en fusion) et la fem débitée par la boucle thermoélectrique, il est alors possible de déterminer la température de la deuxième soudure.
Supposons que cette soudure, initialement à la température T_0, soit immergée à l'instant $t = 0$ dans un fluide à la température T_f. Au bout de combien de temps peut-on assimiler la température de la soudure à celle du fluide ?

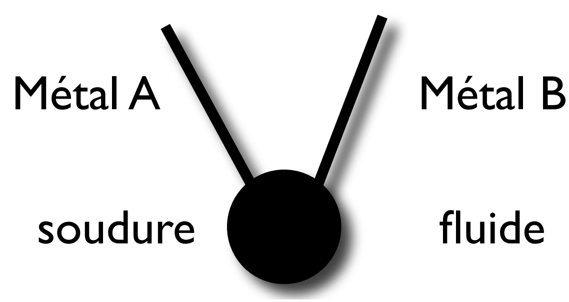


Figure 5: soudure de thermocouple immergée dans un fluide

Données :
- diamètre de la soudure (supposée sphérique) : $D = 100\mu m$
- masse volumique de la soudure : $\rho = 8000 kg.m^{-3}$
- capacité calorifique massique de la soudure : $c = 1000 J.kg^{-1}.K^{-1}$
- coefficient d'échange global : $h = 100 W.m^{-2}.K^{-1}$

• **Correction**
Prenons comme système la soudure, sans les fils qui s'y rattachent. On néglige les transferts de chaleur par conduction dans les fils (supposés de petit diamètre), et le travail électrique apporté au système (la fem débitée par le thermocouple est de l'ordre du millivolt ; de plus, on insère un voltmètre dans la boucle thermoélectrique, ce qui rend l'intensité électrique dans le

circuit vraiment très faible). Commençons par vérifier si les variations spatiales du champ de température peuvent se négliger. Le travail électrique étant négligeable, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\tau\frac{dT}{dt} = -(T_f - T) \text{ avec } \tau = \frac{\rho V c}{hS} = \frac{\rho D c}{h} = \frac{8000.10^{-4}.1000}{6.100} = 1,3s$$

La résolution de l'équation différentielle ci-dessus nous donne l'évolution temporelle de la température du thermocouple :

$$T(t) = (T_0 - T_f)exp(-t/\tau) + T_f$$

Le temps de réponse à 99% d'un thermocouple est par définition le temps t_r tel que la variation de température de la soudure est égal à 99% de sa variation en régime stationnaire : $\frac{T(t_r - T_0}{T_f - T_0} = 0,99$ Au-delà de ce temps, on peut supposer que la température donnée par le capteur est celle du fluide. En utilisant l'expression trouvée pour $T(t)$ et la définition du temps de réponse, il vient : $\frac{T(t_r) - T_0}{T_f - T_0} = 1 - exp(-t_r/\tau) = 0,99$ soit $t_r = -ln(0.01)\tau$. L'application numérique donne : $t_r \approx 6,0s$. On pourra donc assimiler la température du capteur à celle de fluide au bout de 6 s environ.

5.7 Ordinateur

• Énoncé
On se donne un ordinateur qui dissipe une certaine puissance.

Une des cartes informatique fait $L_m = 20cm$ par $W_m = 15cm$, la carte à un c_p moyen, une densité ρ moyenne et une épaisseur $e = 5mm$ moyenne très faible ($e << W_m$). Elle dissipe une puissance totale de P =10W, sachant que le coefficient de convection naturelle dans ce cas particulier peut être estimé par la formule suivante,

$$h_{conv} = 1.4(\frac{T_c - T_{air}}{W_m})^{1/4}$$

On va déterminer sa température en fonction de la température de l'air qui la contourne.
On fait ici une analyse globale de la carte, on suppose que sa température est la même dans tout son volume. On suppose que la température dépend du temps, on la note $T_c(t)$.

1) Quelle est la surface totale approchée de la carte? Son Volume?
2) Quel est le flux total de convection à la surface de la carte?

3) Ecrire la variation par rapport au temps de l'énergie interne moyenne de la carte supposée à température uniforme dans la carte $T_c(t)$.
4) Faire le bilan d'énergie complet en introduisant la puissance dissipée par la carte et le refroidissement par convection naturelle. Obtenir l'équation de variation de l'énergie interne par rapport au temps de la carte.
5) En régime permanent la température ne varie plus, en déduire l'écart de température entre la carte et l'air qui l'entoure en fonction de la puissance P fournie continuellement.
6) Quelle est la valeur numérique de l'écart de température?
7) On coupe l'alimentation électrique, montrer que l'équation de variation de l'énergie est de la forme (identifier B):

$$\frac{dT_c}{dt} = -B(T_c - T_{air})^{5/4}$$

8) Vérifier que la solution pour la température en fonction du temps est :

$$T_c(t) = T_{air} + 4^4 B^{-4}(t + t_0)^{-4}$$

si $\rho = 1300 kg/m^3$; $c_p = 1500 J/kg/°C$ et $T_{air} = 20°C$, valeur de B?

- **Correction**

1) L'aire de la carte $A = 2 * (0.15 * .2) = 0.06 m^2$ (on néglige la surface lattérale), attention au facteur 2 le volume est eA 0.15e-3

2) La densité de flux est $h_{conv}(T_c - T_{air})$, le flux total est obtenu en multipliant par l'aire totale, donc $\dot{Q} = -h_c A\left(\frac{T_c - T_{air}}{W_m}\right)^{1/4}$ avec ($h_c = 1.4$)

3) la variation d'énergie interne est $\rho c_p e A \frac{dT}{dt}$

4) La variation d'énergie interne est égale au flux perdu à la surface plus la puissance fournie par le courant électrique par effet Joule dans les circuits. $\rho c_p e A \frac{dT}{dt} = \dot{Q} + P$

5) A l'équilibre on a $P = -\dot{Q}$, donc
$A h_c (T_c - T_{air})\left(\frac{T_c - T_{air}}{W_m}\right)^{1/4} = P$, soit $(T_c - T_{air}) = \frac{P^{4/5}\sqrt[5]{W}}{A^{4/5} {h_c}^{4/5}}$

6) Avec 10W on trouve 31.3°C
7 et 8) On coupe la puissance fournie P, il ne reste alors que le bilan de

refroidissement de la carte:

$$\rho c_p e A \frac{dT}{dt} = -2W_m L_m h_c (T_c - T_{air}) \left(\frac{T_c - T_{air}}{W_m}\right)^{1/4}$$

ce qui donne $B = 2h_c W_m^{-1/4}/(\rho c_p e)$ et donc $\frac{dT_c}{dt} = -B(T_c - T_{air})^{5/4}$ on vérifie que si $T_c = T_{air} + 4^4 B^{-4}(t+t_0)^{-4}$, alors

$$dT_c/dt = -4^5 B^{-4}(t+t_0)^{-5} = -B(4^{-1}B(t+t_0))^{-5} = -B(T_c - T_{air})^{5/4}$$

c'est la bonne dépendance en temps. Il faut ensuite ne pas oublier que pour $t = 0$, la température est connue: $T_c(0) = T_a + \frac{P^{4/5}\sqrt[5]{W}}{A^{4/5}{h_c}^{4/5}}$ On évalue numériquement $B = 0.000462$ et comme pour $t = 0$ on $T_c = 20 + 31.3°C$ on a $t_0 = 3664.7$. On peut ensuite tracer le refroidissement de la carte en fonction du temps. En 1 heure, la carte se refroidit de 51.3°C à 20°C.

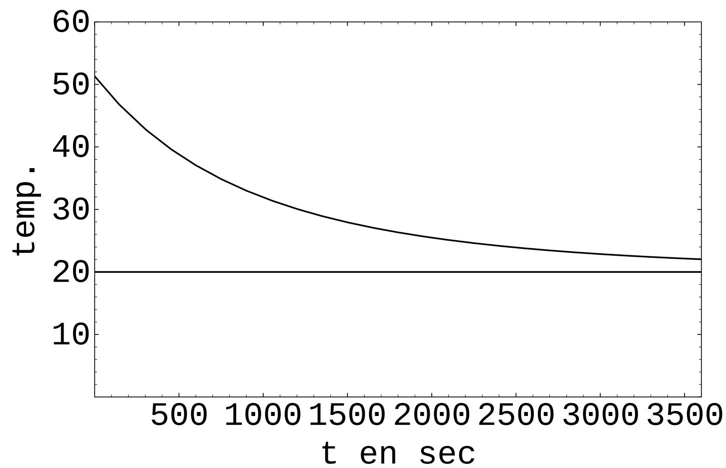


Figure 6: refroidissement de la carte en fonction du temps

5.8 Capteur dans l'échappement

• Énoncé

Les voitures actuelles sont truffées de capteurs de température de manière à mieux contrôler la consommation. Par exemple, il y a (au moins) un capteur de température placé dans le pot d'échappement du moteur. Il s'agit d'un thermocouple qui mesure la température des gaz produits par la combustion. Un thermocouple est constitué de deux fils métalliques soudés ensemble (aux deux extrémités). Une des soudures est plongée dans le tuyau, l'autre côté est à la température extérieure (T_a la température ambiante). le thermocouple mesure l'écart de température sous forme d'un voltage induit par "effet Seebeck".

La soudure plongée dans l'écoulement est assimilable à une petite sphère de rayon R, de masse volumique ρ et de capacité calorifique massique c_p. Sa température est notée T_c. La température des gaz, notée T_g, évolue dans le temps (suivant le régime...). Dans un but de simplification, on suppose une évolution sinusoïdale :

$$T_g = T_0 + \Delta T_g sin(\omega t)$$

Le flux thermique échangé entre les gaz et le capteur est donné par la loi de Newton, dans laquelle h est le coefficient d'échange thermique, supposé constant et connu, et S la surface d'échange, qui est ici la surface de l'élément sensible du capteur, en contact avec les gaz :

$$\dot{Q} = -hS(T_c - T_g)$$

T_c est la température mesurée par le capteur, mais en fait, on souhaite mesurer celle des gaz T_g. On définit l'erreur de mesure $e(t)$ comme la différence entre ces deux valeurs : $e(t) = T_c(t) - T_g(t)$. On désire évaluer cette erreur de mesure en fonction des différents paramètres du problème.
1°) En effectuant un bilan énergétique sur le système constitué de l'élément sensible du capteur, trouver une équation différentielle dont la fonction inconnue est la température du capteur. Donner l'expression de τ la constante de temps du système.

2°) Résoudre l'équation trouvée à la question précédente. On suppose qu'à l'instant où le capteur est introduit dans la ligne d'échappement, sa température est égale à la température ambiante T_a.

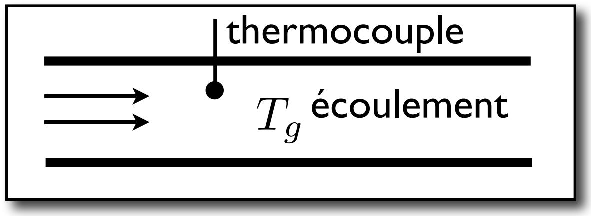


Figure 7: Le capteur dans le pot

3°) Montrer qu'il existe un régime périodique établi. L'erreur de mesure s'annule-t-elle au bout d'un temps infini ? Comment le capteur modifie-t-il alors la grandeur à mesurer ?

4°) Application numérique : trouver le rayon de la soudure correspondant à un amortissement de 0,9. Calculer le déphasage correspondant.
$f = \omega/(2\pi) = 100Hz,\ h = 1000Wm^{-2}K^{-1},\ \rho = 8000kgm^{-3},\ c = 1000Jkg^{-1}K^{-1}$

• **Correction**
1°) Le premier principe

$$\underbrace{\rho c_p V \frac{dT_c}{dt}}_{} = \underbrace{-hS(T_c - T_g)}_{}$$
$$\textbf{variation d'énergie} = \textbf{terme de flux}$$

On fait apparaître le rapport $\rho c_p V/h/S$ Le rapport de la surface par le volume de la sphère est $4\pi R^2/(4\pi R^3/3) = 3/R$ on pose $\tau = \dfrac{\rho R c_p}{3h}$ qui est homogène à un temps:

$$\tau \frac{dT_c}{dt} = -h(T_c - T_g)$$

2°) Il est d'usage de simplifier les notations on écrivant la solution sous forme sans dimension: T_c sera la somme d'une température de référence plus un écart de température que multiplie une fonction qui n'a pas d'unités. Il est ici judicieux de choisir comme référence T_0 et une bonne idée est de prendre comme écart ΔT_g. Donc on cherche une fonction θ qui n'a pas d'unité (pas de dimension) telle que :

$$T_c = T_0 + (\Delta T_g)\,\theta$$

l'équation de la température devient alors

$$\tau\frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta(t) + sin(\omega t)$$

Solution de l'équation sans second membre $\tau\frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta(t)$, soit $\theta = \theta_0 e^{-t/\tau}$

On cherche ensuite une solution par variation de la constante $\theta = \theta_0(t)e^{-t/\tau}$, donc $\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\theta_0(t)}{dt}e^{-t/\tau} - \tau\theta_0(t)e^{-t/\tau}$, d'où

$$\tau\frac{d\theta_0(t)}{dt}e^{-t/\tau} = sin(\omega t) \text{ donc } \frac{d\theta_0(t)}{dt} = e^{t/\tau}sin(\omega t)/\tau$$

on intègre par parties $\int vdu = [uv] - \int udv$ donc

$$\theta_0(t) = -\frac{e^{t/\tau}}{\omega\tau}cos(\omega t) + \int \frac{e^{t/\tau}}{\omega\tau^2}cos(\omega t)dt$$

$$\theta_0(t) = -\frac{e^{t/\tau}}{\omega\tau}cos(\omega t) + \frac{e^{t/\tau}}{\omega^2\tau^2}sin(\omega t) - \int \frac{e^{t/\tau}}{\omega^2\tau^3}sin(\omega t)dt$$

on reconnaît $\theta_0(t)$ dans le dernier terme, donc

$$\theta_0(t)(1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}) = -e^{t/\tau}(\frac{cos(\omega t)}{\omega\tau} - \frac{sin(\omega t)}{\omega^2\tau^2})$$

la solution particulière est donc

$$\theta(t) = -\frac{(\omega\tau cos(\omega t) - sin(\omega t)}{1 + (\omega\tau)^2}$$

une astuce consiste à regrouper le cosinus et le sinus en utilisant la relation classique

$$sin(a + b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$$

donc en posant $tan(\phi) = \omega\tau$ regroupant

$$\theta(t) = \frac{sin(\omega t - \phi)}{cos(\phi)(1 + (\omega\tau)^2)}$$

et comme $cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = 1$ soit $1/cos^2(\phi) = 1 + tan^2(\phi) = 1 + (\omega\tau)^2$ donc

$$\theta(t) = \frac{sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

On a ainsi trouvé la solution particulière. La solution générale est la somme de cette solution plus la solution de l'équation sans second membre Comme au temps initial, la température est T_a, on a a pour θ la valeur θ_0 telle que

$$T_a = T_0 + (\Delta T_g)\theta_0$$

On en déduit alors la valeur de la constante et on trouve l'expression finale de la variation de la température en fonction du temps:

$$\theta(t) = [\theta_0 - \frac{sin(\phi)}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}]e^{-t/\tau} + \frac{sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \ \ tan(\phi) = \omega\tau$$

C'est la somme d'un régime transitoire qui disparaît aux temsp longs et d'un régime périodique établi.
3°) Examinons maintenant le régime établi, on aurait pu directement retrouver la solution du régime établi en disant qu'en régime sinusoïdal forcé, la solution suit le forçage à la même fréquence. On serait passé par la méthode des variables complexes $\theta = Re[\Theta e^{i\omega t}]$, dans ce cas on a $\frac{d\theta(t)}{dt} = Re[\Theta i\omega e^{i\omega t}]$. Dériver revient à multiplier par $i\omega$. Dans cette représentation, $\sin(\omega t) = Re[-ie^{i\omega t}]$, donc l'équation à résoudre en complexes est ient alors

$$\tau i\omega\Theta = -\Theta - i$$

soit $\Theta = \frac{-i}{1+i\omega\tau}$ ou encore $\Theta = \frac{-i(1-i\omega\tau)}{1+\omega^2\tau^2}$ ou encore si on remarque que l'on a un nombre complexe, on pose $cos(\phi) + isin(\phi) = e^{i\phi} = \frac{(1-i\omega\tau)}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ avec toujours $tan(\phi) = \omega\tau$ et donc $\theta(t) = Re[\frac{-ie^{i\omega t}]}{1+i\omega\tau}]$ devient:

$$\theta = Re[\frac{-i(e^{i\omega t - i\phi})}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}] \text{ donc } \theta(t) = \frac{sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}.$$

Le capteur induit donc un amortissement $\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$ et un déphasage de $\phi = arctg(\omega\tau)$; dojnc plus la frésuence de variation est élevée plus il faut prendre un capteur "rapide', c'est à dire de faible constante de temps τ

4°) <u>A.N.</u> $\omega = 2\pi f = 628 rad/s$, $\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$=0.9 soit $\omega\tau = 0.48$, $\tau = .77ms$ donc le rayon de la soudure est $R = 3h\tau\rho c_p = 2.9\ 10^{-7} = 0.3\mu m$ et $\phi = 26°$. Il faut un tout petit capteur pour déceler les variations

5.9 exemple de la saucisse

• **Énoncé**

Exemple d'une saucisse que l'on jette dans l'eau bouillante.
Faire un bilan sur un cylindre placé dans de l'eau bouillante.

5.10 exemple de la décongélation

• **Énoncé**

Exemple d'un steack que l'on laisse se décongeler à l'air libre.
Faire un bilan sur un le steack (attention seule la surface supérieure est réchauffée par convection naturelle). Estimer le temps pour passer de -20°C à 0°C. Que se passe-t-il alors?

5.11 Bonhommes dans la pièce

• **Énoncé**

Dans la salle de TD il y a 15 élèves, initialement la température est de 15°C, les déperditions de chaleur se font par les fenêtres de combien augmente la température au fur et à mesure du cours de thermique?

6 Conclusion

Une variété incroyable de problème d'ingénieurs peut se résoudre avec ces formules simplifiées issues des milieux minces.

On retiendra que dans les système minces, la température est quasi constante dans le corps, elle ne dépend que du temps. Le flux qui s'échappe par convection de la surface du corps est

$$\boxed{\dot{Q} = -h(T - T_e)S,}$$

h est appelé le facteur d'échange, il dépend du régime, son unité est en $Wm^{-2}K^{-1}$. On construit un temps caractéristique $\tau = (\rho c V)/(hS)$. La solution est en exponentielle pour la température.

7 Références

Y. Çengel (1998) "Heat transfert, a practical approach", Mc Graw Hill.
J. Crabrol (89) "Transferts de chaleur, tome 1 les principes", collection technologies, Masson
Incropera, DeWitt: Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 5th Edition, Wiley
P.-Y. Lagrée, Systèmes minces, Cours MECAVENIR/EPU 2009
J.F. Sacadura (1993) "Initiation aux tranferts thermiques", Lavoisier Tec & Doc.
H. This (2002) Casseroles & éprouvettes, Belin, John H. Lienhard IV and V (2008): "A Heat Transfer Textbook"
http://www.pathguy.com/TimeDead.htm
http://fr.wikipedia.org/wiki/Datation_des_cadavres#Mod.C3.A9lisation_du_refroidissement

Tous les ouvrages 536.2 dans une bibliothèque.

Consulter aussi `http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/MECAVENIR` le cours complet de thermique de P.-Y. Lagrée,

Annexe:
première introduction aux méthodes numériques

Pour ceux qui ont des calculatrices, on va étudier un cas numérique à la main. On cherche à résoudre l'équation de la température:

$$\rho c_p V \frac{dT}{dt} = -h(T - T_e)S.$$

On sait résoudre cette équation, on l'a vu plus haut, la solution est une exponentielle. Jouons le jeux, supposons que nous ne connaissons pas la solution. Ceci peut arriver si $c_p(T)$ et si $h(T)$, cas qui peuvent se produire dans la nature.

Pour résoudre, on emploie une méthode numérique, on change le problème en une série d'étape à des temps discrets. Par convention on pose $T^n = T(t = n * \Delta t)$, l'exposant n est un indice de temps, ce n'est pas l'exposant d'une puissance! Si on met du rayonnement, on évitera de confondre la puissance quatrième au temps $4\Delta t$!

On discrétise en temps, on revient à la définition de la dérivée (ou formule de Taylor...):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t}$$

et l'équation devient:

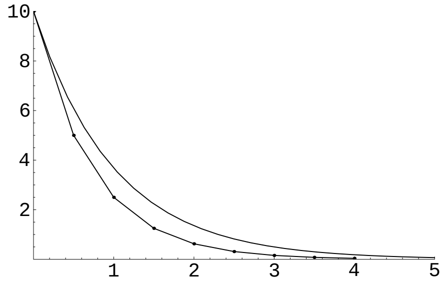
$$T^{n+1} = T^n - (hS/c_p/V/\rho)\Delta t(T^n - T_e).$$

On peut donc construire la suite des valeurs de température aux temps. En effet, si on se donne au temps initial $t = 0$ la température T^0, on peut calculer T^1 la température au bout de Δt, puis T^2 au bout de $2\Delta t$ etc:

$$T^1 = T^0 - (hS/c_p/V/\rho)\Delta t(T^0 - T_e), \;\; T^2 = T^1 - (hS/c_p/V/\rho)\Delta t(T^1 - T_e) \;\; etc$$

Prenons un exemple pour fixer les idées, si on a un corps tel que $hS/(\rho c_p V) = 1/1heure$, et qu'il est plongé dans un environnement à la température $T_e = 0°$, et si la température initiale de ce corps est de $T = 10°$, alors, si nous prenons le pas de temps $\Delta t = 0.5heure$, la suite des températures, de demi heure en demi heure est:

$$(t = 0, T = 10), (t = 0.5, T = 5.), (t = 1., T = 2.5), (t = 1.5, T = 1.25),$$



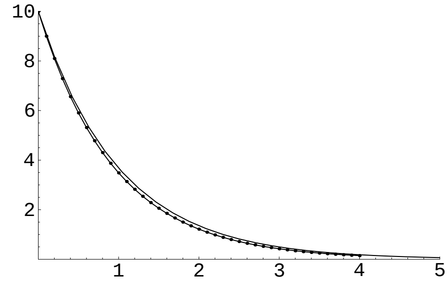


Figure 8: Tracé de la solution exponentielle exacte en trait continu et de la solution numérique approchée (points et lignes brisée), à gauche le pas de temps est trop grossier, à droite il est presque assez fin.

$$(t = 2., T = 0.625), (t = 2.5, T = 0.3125), (t = 3., T = 0.15625) \;\; etc$$

En diminuant le pas de temps Δt et en augmentant le nombre de calculs on peut approximer le mieux possible la courbe de la vraie solution. Diminuer un pas de temps s'appelle "raffiner" en langage de numéricien. En effet on peut vérifier que l'écart entre la solution numérique et la solution exacte est d'ordre Δt.

Dans ce cas simple, la solution exacte peut être obtenue à la main, mais parfois, on ne peut pas (par exemple lorsque les variations des coefficients ne sont plus négligeables avec la température $h(T)$ et $c_p(T)$), d'où l'intérêt des méthodes numériques.