

Transferts Thermiques dans les Fluides

MF 204

durée 3h heures, tout document personnel autorisé

Étude d'une coulée de lave.

L'objet de ce problème est l'étude très simplifiée d'une coulée de lave le long d'une pente de volcan (figure 1, haut gauche). Le magma sort à la température T_0 , il se refroidit tout seul dans l'air ambiant (en $x > 0$), l'air est à la température ambiante T_{ext} . La figure 1 (bas gauche) représente cette coulée d'épaisseur $h \ll L$, le front avance en fonction du temps (voir question 4. et figure 2 gauche), dans la question 1, on regarde un détail (d'où la loupe en bas à gauche de la figure 1) et on oublie le front et la source (figure 1 droite). On note h l'épaisseur à la position donnée, et h_0 son ordre de grandeur, répétons qu'à la fin du problème h varie avec x et t , mais au début du problème h est supposé constant. La pente du volcan est supposée constante d'inclinaison $-\theta$ (avec $\theta > 0$, la pente penche à droite). Pour ne pas confondre h , h_0 et le coefficient d'échange, on note h_e le coefficient d'échange par convection forcée entre la lave qui coule et l'air extérieur. On suppose que l'on est en 2D plan, x le long de la pente, y perpendiculaire (invariance en z) : $\vec{g} = g(\sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y)$. En $y = h$, la dérivée normale de la vitesse est nulle (pas de contrainte imposée par l'air sur la lave), de plus, en $y = h$ la pression est nulle (pression de référence : l'air). On va montrer que l'écoulement est un demi Poiseuille dans tout le problème.

Les parties sont assez indépendantes.

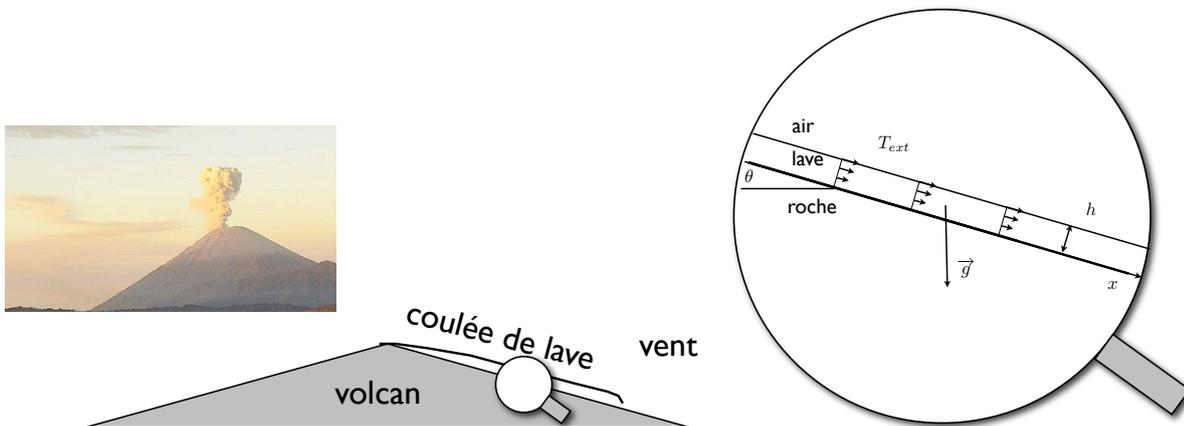


FIGURE 1 – A gauche en haut le volcan Bromo à Java en Indonésie (source wiki media). Une coulée de lave est un fluide incompressible Newtonien très visqueux chaud refroidi par l'air extérieur, k ρ et μ sont supposés constants (on néglige la dépendance avec la température, et le changement de phase de la lave) en première approximation. Le fluide initialement à la température T_0 sort pour $x > 0$ dans un domaine à la température T_{ext} . L'épaisseur caractéristique de la coulée est h_0 , elle est très faible comparée à L .

Problème établi loin du cratère et loin du front, vitesse

- 1.1 La coulée est invariante par translation loin de son origine et loin de son front, la hauteur h est constante, elle est stationnaire, montrer que la vitesse transverse est nulle.
- 1.2 Montrer que la pression ne dépend que de y .
- 1.3 Montrer que le champ des vitesses est un "demi Poiseuille".
- 1.4 Montrer que l'on peut écrire la vitesse sous la forme $u = Kh^2F(y/h)$, écrire judicieusement la fonction sans dimension F , identifier K .
- 1.5 Intégrer sur l'épaisseur pour obtenir le débit Q , quelle est son échelle ?
- 1.6 Ecrire la vitesse sous la forme $u = \frac{Q}{h}f(\frac{y}{h})$ où f est proportionnelle à F de 1.4.
- 1.7 Ecrire u sans dimension : $u = U_0\bar{u}$.
- 1.8 Interpréter l'échelle de u comme un équilibre entre la force de pesanteur qui fait bouger le fluide et une autre force que l'on interprétera.
- 1.9 Ecrire le nombre de Reynolds construit sur h_0 .

Le nombre de Reynolds est en fait petit car la lave est très visqueuse, mais comme la couche est mince on aura toujours, comme $h_0 \ll L$, le terme longitudinal du Laplacien qui va disparaître.

Problème loin du cratère, température

On suppose que la vitesse s'établit sur une distance assez courte à la vitesse précédente. On va estimer L_T la longueur caractéristique de refroidissement.

- 2.1 Ecrire l'équation de la chaleur générale pour un fluide incompressible.
- 2.2 On pose $T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})\bar{T}$, le nombre d'Eckert sera supposé petit, et l'épaisseur caractéristique h_0 de la coulée de lave est plus faible que la longueur caractéristique de refroidissement de la coulée, commentez ces hypothèses.
- 2.3 Montrer que l'on peut alors écrire (identifier α) :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$$

- 2.4 Le haut de la coulée est refroidi par l'air, soit h_e le coefficient d'échange (avec l'air en convection forcée), le bas de la couche est supposé adiabatique. Commentez ces hypothèses.
- 2.5 En déduire $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}$ en $\bar{y} = 0$
- 2.6 En déduire $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}$ en $\bar{y} = 1$
- 2.7 En déduire l'ordre de grandeur de la distance de réchauffement par moindre dégénérescence.
- 2.8 En première approximation on suppose que \bar{T} varie peu sur l'épaisseur : $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \simeq \bar{\theta}(\bar{x}, \bar{t})$; Intégrer 2.3 compte tenu de cette hypothèse et de 2.5 et 2.6. en déduire (compte tenu de 2.7) le problème sans dimension (identifier β).

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} = -\beta \bar{\theta}$$

Evolution de la coulée en espace et en temps sur toute la longueur

Dans cette section, on va supposer que la hauteur h de la coulée varie en x et t et on va établir sa forme en fonction du temps. On repasse au problème complet pour la vitesse, la pente du volcan est assez forte, donc $\sin \theta = O(1)$

3.1 Ecrire Navier Stokes sans dimension en utilisant les échelles L , h_0 et U_0 des questions précédentes

3.2 Quelle est l'échelle de la vitesse transversale ?

3.3 Montrer que l'équation suivant \bar{x} s'écrit :

$$r\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\pi\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\sin \theta + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}) + \gamma\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}$$

3.4 Montrer que les termes dominants de l'équation transverse sont

$$0 = \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \cos \theta\right)$$

3.5 Identifier r , γ et π .

3.6 La lave est très visqueuse, r est très petit, simplifier à $h_0 \ll L$. En déduire que les termes dominants de Naviers Stokes sont simplement

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ et } 0 = \left(\sin \theta + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \text{ et } 0 = \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \cos \theta\right)$$

Evolution de la coulée en espace et en temps, sur toute la longueur, solution approchée similaire

Nous allons utiliser les ordres de grandeur précédents pour simplifier les équations comme en 3. Nous allons proposer une solution du système 3. Pour faire comme les géophysiciens, nous repassons en dimension sur le système 3 (en fait cela n'a aucune importance car nous ne gardons que les termes principaux par Moindre Dégénérescence).

Une éruption relâche une quantité finie de matière au voisinage de $x = 0$. La coulée de lave s'effectue sur la pente θ et soit $h(x, t)$ son épaisseur. Soit $x_f(t)$ la position de son front. La quantité de lave qui a coulé est telle que $\int_0^{x_f} h(x, t) dx$ est constant. En prenant l'incompressibilité, la règle de dérivation des intégrales dont les bornes varient en x (règle de Leibnitz) et le fait que la vitesse en haut de la couche vérifie

$$v(x, y = h(x, t), t) = \frac{\partial h}{\partial t} + u(x, y = h(x, t), t)\frac{\partial h}{\partial x}$$

on peut montrer que l'incompressibilité devient

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0, \text{ avec } Q = \int_0^{h(x,t)} u(x, y, t) dt$$

en négligeant l'inertie, l'équation de Navier Stokes se réduit à (c'est ce que nous avons montré plus haut)

$$0 = \rho g \sin \theta + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

4.1 En supposant que u est toujours de la forme de la question 1.6, $u = \frac{Q}{h} f(\frac{y}{h})$, même si h dépend de x et de t montrer que l'on peut trouver une équation pour $h(x, t)$ de la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} + kh^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

4.2 Montrer que cette équation associée à la conservation de la quantité de lave qui a coulé admet une solution auto semblable de la forme $h(x, t) = t^{-\alpha} \mathcal{H}(x/t^\alpha)$.

4.3 Résoudre, montrer que l'on a la forme implicite

$$\eta = k(\mathcal{H}(\eta))^2 - \frac{\mathcal{H}(\eta)^3}{\mathcal{H}(\eta)}$$

4.4 Comme $\mathcal{H}(0) = 0$ en déduire $h(x, t)$ et $x_f(t)$.

4.5 Tracer $h(x, t)$ en fonction de x pour différents temps t

4.6 Compte tenu de 2.8 et des approximations, montrer que l'équation de la chaleur est de la forme approchée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Q}{h} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h_e}{\rho c_p h} (T - T_{ext})$$

4.7 Résoudre aux temps grands l'équation de la chaleur.

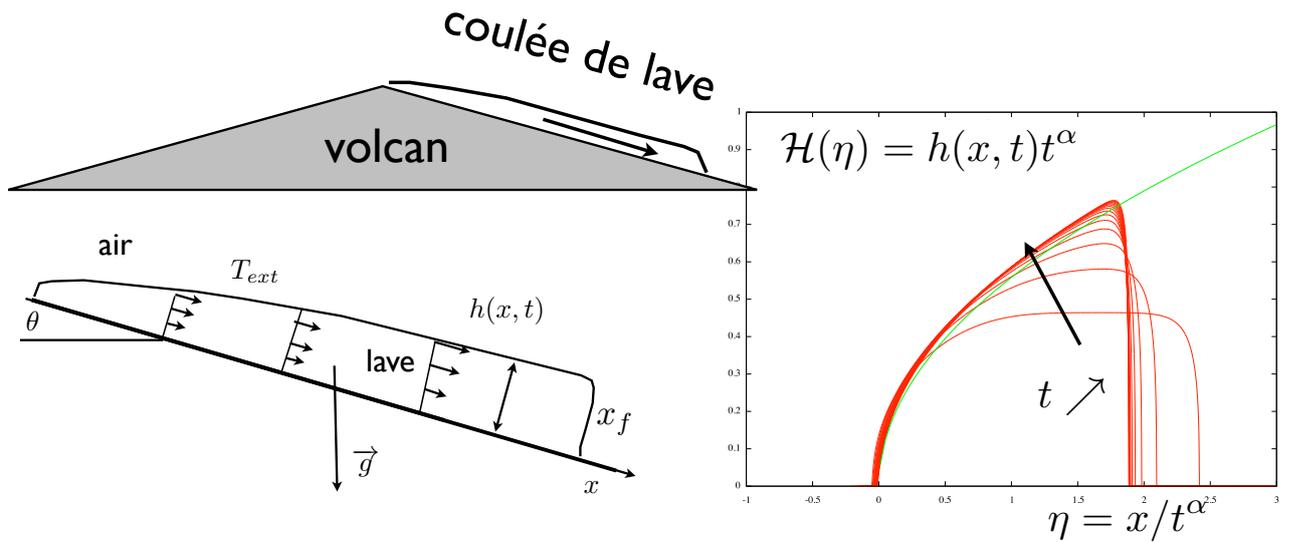


FIGURE 2 – Gauche haut, rappel de la coupe montrant le volcan 2D avec sa coulée sur la pente, en bas la coulée, à droite tracé à $t=100,200,300\dots1500$ de $t^\alpha h(x, t)$ en fonction de x/t^α obtenu par simulation numérique de l'équation $\frac{\partial h}{\partial t} - kh^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$, les courbes se superposent pour $t \rightarrow \infty$.

Bibliographie

Huppert R. "Flow and instability of a viscous current along a slope" Nature volume 30 2002 p 427

Correction

1. Par invariance en x de l'incompressibilité on a facilement $v = 0$, puis dans l'équation transverse, la pression est hydrostatique (elle vaut 0 à la surface libre par convention) :

$$p = \rho g(h_0 - y) \cos \theta.$$

On passe à l'équation longitudinale, il ne reste alors que $0 = \rho g \sin \theta + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, qui s'intègre, sachant que l'adhérence donne $u(0) = 0$ et la condition de contrainte libre en $y = h$ donne $\frac{\partial^2 u}{\partial y}(h) = 0$, on a :

$$u(y) = \frac{g \sin \theta h_0^2}{\nu} \left(\frac{y}{h_0} - \frac{y^2}{2h_0^2} \right),$$

de la forme $Kh_0^2 F(y/h_0)$, avec $K = \frac{g \sin \theta}{\nu}$ On intègre sur l'épaisseur,

$$Q = \int_0^{h_0} u dy = \frac{g \sin \theta h_0^3}{3\nu}.$$

On remarque que l'on peut écrire au final

$$u(y) = \frac{Q}{h} 3F(y/h) \text{ avec } F(\eta) = \eta(1 - \frac{\eta}{2})$$

Manifestement la *dominant balance* de cet écoulement est que les forces de pesanteur sont équilibrées par les forces de frottement. $U_0 = gh_0^2/3\nu = \text{pesanteur}/\text{viscosité}$.

Le Reynolds : $Re = h_0 U_0 / \nu \propto \text{Flux}/\text{viscosité}$

2. Equation de la chaleur, on néglige Eckert on néglige $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ comme toujours, car $h_0 \ll L_T$ on trouve alors

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{L_T}{Pr Re h_0} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$$

La longueur d'entrée $L_T = Pr Re h_0$

le flux en haut en $y = h_0$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h_e (T - T_{ext})$$

sans dimension

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -(h_e h_0 / k) (\bar{T})$$

avec $Bi = (h_e h_0 / k)$ le fond est supposé adiabatique $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = 0$

l'équation de la chaleur, moyennée sur la hauteur $\int_0^h dy$ comme la température est supposée constante en y (la température varie peu sur la hauteur, compatible avec adiabatique et un échange supposé faible en haut), et comme $\int_0^1 \bar{u}(\bar{y}) d\bar{y} = 1$, donc $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \int_0^1 \bar{u}(\bar{y}) d\bar{y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_0^1$ fait apparaître ces deux flux, on a donc bien

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} = -Bi \bar{\theta}$$

3. Retour sur la vitesse

$$\frac{h_0}{L} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\delta p}{\rho U_0^2} \frac{h_0}{L} \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left(\sin \theta + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{h_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

bla bla

$$\frac{h_0}{L} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = - \frac{\delta p}{\rho U_0^2} \frac{h_0}{L} \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left(\sin \theta + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{h_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

mais aussi $r = U_0^2/(gL)$; $\pi = \delta p/(\rho_0 Lg)$; $\gamma = \frac{h_0^2}{L^2}$.

4. Les équations de NS $Q = g \sin \theta h^3/(3\nu)$ et, la masse devient

$$\frac{\partial h}{\partial t} + g \sin \theta/(3\nu) \frac{\partial}{\partial x} h^3 = 0$$

de la forme proposée

par changement d'échelle, l'invariance par dilatation donne $H/T = H^3/X$, la masse conservée donne $HX = 1$, ce qui permet de trouver $H = T^{-1/3}$ et $X = T^{1/3}$ donc une solution de la forme $t^{-1/3} \mathcal{H}(x/t^{1/3})$ soit

$$-\eta \mathcal{H}'(\eta) - \mathcal{H}(\eta) + 3k \mathcal{H}(\eta)^2 \mathcal{H}'(\eta) = 0$$

si $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}_0$

$$(-\eta \mathcal{H}(\eta) + k \mathcal{H}(\eta)^3) = k \mathcal{H}_0^3$$

on a la forme implicite

$$\eta = k \left(\mathcal{H}(\eta)^2 - \frac{\mathcal{H}_0^3}{\mathcal{H}(\eta)} \right)$$

Dans Huppert, on part d'une masse localisée entre x_0 et x_1 , donc $H_0 = 0$ $\eta = k \mathcal{H}(\eta)^2$, simplement, on va avoir

$$\mathcal{H}(\eta) = \sqrt{(\eta)/k},$$

la solution de

$$\frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

est simplement pour $x < x_f$

$$h = t^{-1/3} \sqrt{(x)t^{-1/3}/k} = \sqrt{\frac{x}{kt}}$$

On se donne une masse initiale $A = \int_0^{x_1} h(x, 0) dx$ qui se déplace entre $x_f t$, position du front et 0 le front arrière qui ne bouge pas, la masse est donc ultérieurement

$$\int_0^{x_f} \sqrt{\frac{x}{kt}} dx = (2/3) \sqrt{x_f^3/(kt)}$$

qui est A par conservation de la masse soit $x_f = (\frac{9A^2 kt}{4})^{1/3}$

savageHutterJFM89.pdf

solution page 104

voir aussi Cjhanson99 p342

ancey.pdf J. Non-Newtonian Fluid Mech. 142 (2007) 4–35 Plasticity and geophysical flows : A review

Whitham ebooksclub.org__Linear_and_Nonlinear_Waves__Pure_and_Applied_Mathematics_.pdf

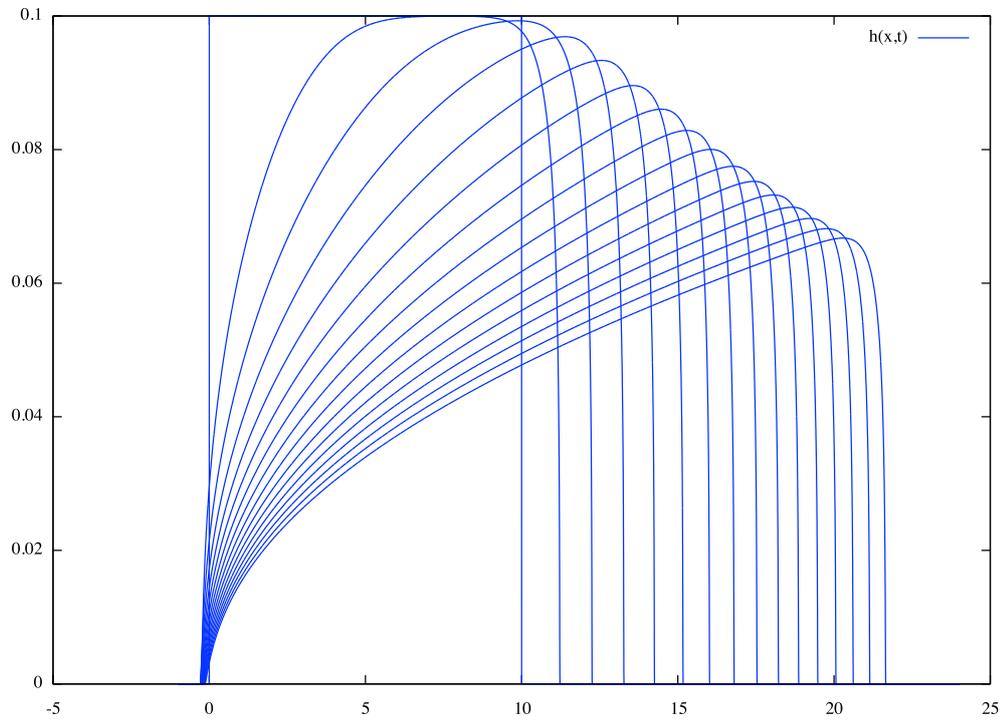


FIGURE 3 – Plot at $t=100,200,300\dots1500$ of $h(x,t)$ with *Basilisk*

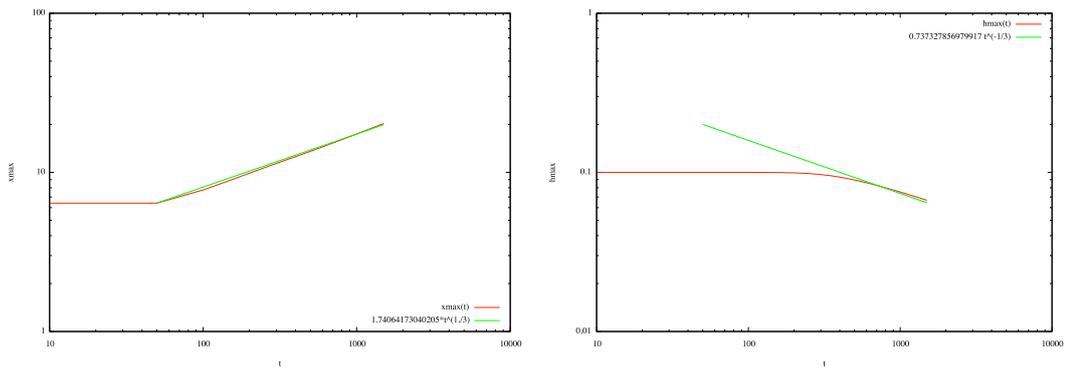


FIGURE 4 – x_{max} as function of time, h_{max} function of time

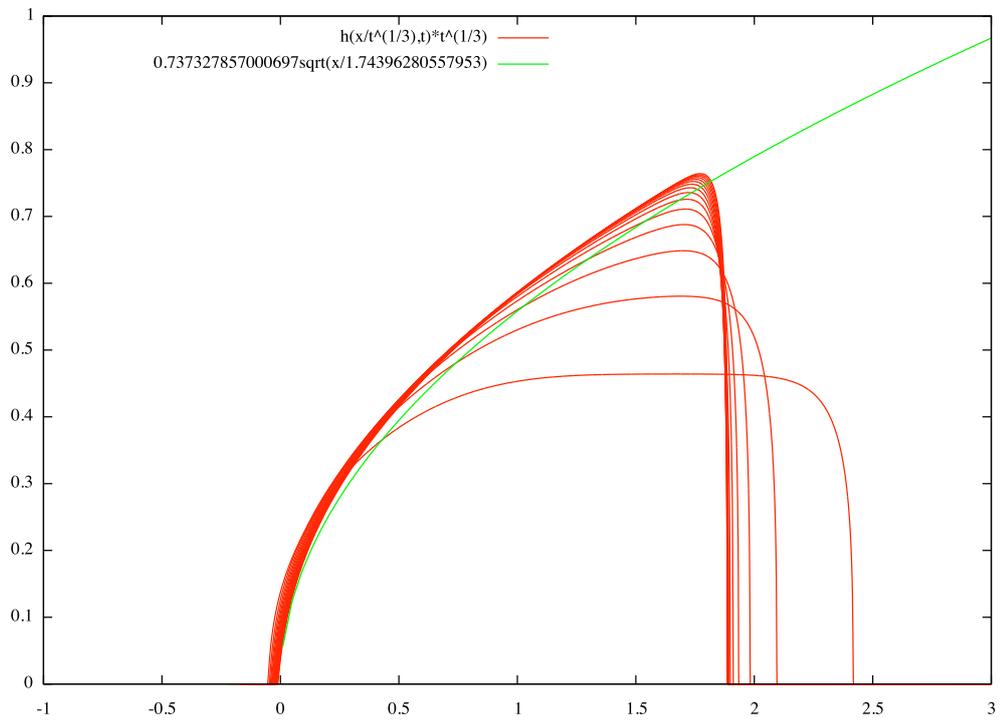


FIGURE 5 – Plot at $t=100, 200, 300 \dots 1500$ of $t^{1/3}h(x/t^{1/3}, t)$ with *Basilisk*