

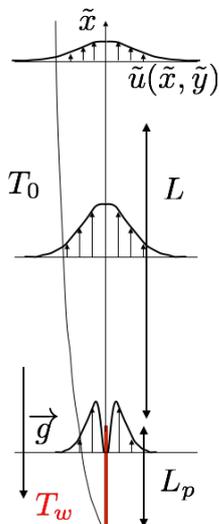
## Formation d'un panache par une plaque chauffée.

PC 4 MF 204 2016/2017

Lundi 6 mars 2017

### Configuration

Un radiateur électrique (ou tout autre objet chauffé) réchauffe l'air ambiant, le long du radiateur, une couche limite de convection naturelle se développe. Elle continue ensuite au delà sous forme d'un panache vertical. Le panache est une couche limite libre de convection thermique naturelle créée par un chauffage local. La plaque est de longueur  $L_p$ , elle est maintenue à la température  $T_w$ . L'air au repos au loin est à la température  $T_0$ . On se place en 2D plan stationnaire.



Une plaque chauffée crée un mouvement ascendant de fluide par convection naturelle. On se place dans un premier temps aux alentours de la plaque, on utilise une longueur  $L$  comme échelle, on pose  $\lambda = L_p/L$  le rapport entre la longueur de la plaque et cette échelle.

1. Montrer que les équations sont les mêmes avant et après le bord de fuite de la plaque. Avec un changement de conditions aux limites au bord de fuite (on supposera que le bord de fuite ne perturbe pas l'écoulement sur la plaque, ce qui est vrai en première approximation).
2. Retrouver rapidement la solution de convection naturelle sur une plaque plane : couche mince chauffée le long de la plaque. Introduire le nombre de Grashof.
3. Montrer que dans la partie panache la quantité  $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T} \tilde{u} d\tilde{y}$  est conservée.
4. On se place en  $\tilde{x} > \lambda$ , on suppose que  $\lambda$  est petit le bord de fuite a provoqué une perturbation qui s'est estompée.

Dans ces nouvelles échelles, la plaque se réduit un point qui fournit le chauffage initial (La cause de la génération de l'écoulement de panache est devenue quelconque). On ne considère que le panache. Montrer que le panache a une solution autosemblable.

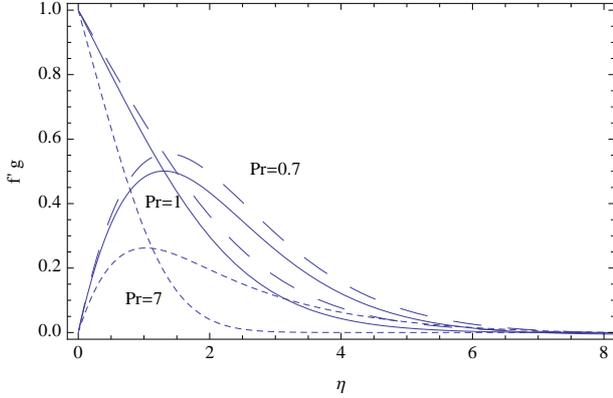


FIGURE 1 – trait plein  $Pr = 1$ , petit pointillé  $Pr = 7$ , gros  $Pr = 0.7$ ;  $f'$  varie de 0 à 0 et  $g$  varie de 1 à 0.

### correction PC Formation d'un panache par une plaque chauffée.

#### Equations

On utilisera directement l'excès de pression adimensionné  $\bar{p}$  par rapport au nivellement barométrique :  $p = p_0 - \rho_0 g y + (\delta p) \tilde{p}$ , et on écrira pour la ture :  $T = T_0 + (T_p - T_0) \tilde{T}$ . On se place en 2D plan stationnaire.  $x$  est vertical, en variables dimensionnées les équations à résoudre sont donc :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -(\delta p) \frac{\partial \tilde{p}}{\rho_0 \partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \alpha g (T_p - T_0) \tilde{T}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -(\delta p) \frac{\partial \tilde{p}}{\rho_0 \partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

#### Couche limite pour la plaque

Comme il ne se passe rien si on ne tient pas compte de la viscosité, c'est qu'il existe une couche limite tenue près de la paroi, soit  $\delta$  son épaisseur et plaçons nous à la distance  $L$  du bord d'attaque. Manifestement, le terme moteur est la force d'Archimède,  $\rho g \alpha \Delta T$  qui intervient dans le gradient longitudinal, l'équilibre longitudinal donne :  $\rho U_0 \frac{U_0}{L} \sim \rho g \alpha \Delta T$  l'ordre de grandeur est  $U_0$  :  $U_0 \sim (L g \alpha \Delta T)^{1/2}$ .

Cette vitesse doit être annulée à la paroi par les effets visqueux, donc :  $U_0 \frac{U_0}{L} \sim \nu \frac{U_0}{\delta^2}$  ce qui permet d'éliminer  $U_0$  et de trouver  $(\delta/L)$  :  $\frac{\delta}{L} = G^{-1/4}$  avec le nombre de Grashof :  $G = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu^2}$

Le Problème sans dimension final en posant :  $x = L \tilde{x}$ ,  $y = L G^{-1/4} \tilde{y}$ ,  $u = (L g \alpha \Delta T)^{1/2} \tilde{u}$  etc les équations deviennent :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{T}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}$$

avec les conditions aux limites  $\tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0$ ,  $\tilde{T}(\tilde{x}, 0) = 1$ , et  $\tilde{u}(\tilde{x}, \infty) = 0$ ,  $\tilde{T}(\tilde{x}, \infty) = 0$ .

Note, on aurait pu directement en partant du système sans dimension et en posant  $\tilde{y} = y/\epsilon$  trouver que  $\epsilon = G^{-1/4}$ . On note que la pression est nulle.

#### Solutions semblables pour la plaque

L'analyse de l'adimensionnement fait double emploi : si  $L$  est changé en  $LL^*$ , on voit qu'alors  $\delta$  est changé

en :  $\delta L^{*(1-3/4)} = \delta L^{*1/4}$ , ce qui conduit à la variable de similitude  $\eta = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^{1/4}}$ , et la forme suivante pour la fonction de courant :

$$\psi = \tilde{x}^{3/4} f(\eta) \text{ et } \tilde{T} = g(\eta),$$

On pose pour les variables de similitude :

$$\xi = \tilde{x}, \quad \eta = \tilde{y}/\tilde{x}^{1/4} \text{ et donc } \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{4\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\xi^{1/4}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\tilde{u} = \xi^{1/2} f'(\eta), \quad \tilde{v} = \frac{1}{4\xi^{1/4}}(\eta f' - 3f) \text{ donc}$$

$$\tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \xi^{1/2} f' \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{3}{4\xi^{1/2}} f \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{1}{\xi^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

Le problème autosemblable est :

$$4f''' + 3ff'' - 2f'^2 + 4g = 0; \quad 4g'' + 3Prfg' = 0;$$

La résolution par une méthode de tir donne :

( $Pr = 0.7, f''(0) \sim 1., g'(0) = -0.4$ ), ( $Pr = 1, f''(0) = 0.9, g'(0) = -0.4$ ), ( $Pr = 7, f''(0) = 0.6, g'(0) = -0.8$ )  
 Sur la figure on a représenté les profils de  $f'$  et de  $g$  en fonction de  $\eta$  pour 3 nombres de Prandtl représentatifs.  
 On peut ainsi calculer le Nusselt  $Nu = -g'(0)\sqrt{\tilde{x}}G^{1/4}$ .

### Panache

On passe maintenant à  $\tilde{x} > \lambda$ , la condition au limite en  $\tilde{y} = 0$  change, on a maintenant une condition de sillage (ou de non contrainte ou de symétrie). Les équations en revanche sont les mêmes. On suppose que le passage du bord de fuite modifie peu l'écoulement (saut brusque de condition au limite, pas de rétroaction sur l'écoulement le long de la plaque)  $\partial \tilde{u}(\tilde{x} > \lambda, \tilde{y} = 0)/\partial \tilde{y} = 0$ .

On peut écrire l'équation de la chaleur sous forme conservative

$$\frac{\partial \tilde{u} \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v} \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}$$

donc on intégrant en  $\tilde{y}$  (domaine fixe)

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{y} = \left[ \frac{1}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{y}$  est constant (conséquence des équations). la valeur conservée est celle juste au point de fuite de la plaque. Bien entendu, cette relation de flux n'est pas valable sur la plaque car sur la plaque

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_0^{+\infty} \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{y} = -\frac{1}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \Big|_0$$

qui revient à dire que le flux diffusif est source de la convection convectif. Ce moteur s'arrête après le bord de fuite puisqu'on ne fournit plus de chaleur.

On se place maintenant à une échelle  $L$  supposée grande par rapport à la longueur de la plaque, donc on suppose que  $\lambda$  est petit. Le panache "oublie" la cause de sa génération. Mais il conserve toujours la valeur du flux précédent.

Les équations sont les mêmes

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{T}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}$$

avec les conditions aux limites, les conditions de symétrie  $\tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 0$  et  $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = 0$  au centre sur l'axe. et au lon  $\tilde{u}(\tilde{x}, \infty) = 0$ ,  $\tilde{T}(\tilde{x}, \infty) = 0$ .

### Solution auto semblable du panache

Nous utilisons la méthode classique : par dilatation :  $\tilde{u} = u^* \hat{u}$ ,  $\tilde{T} = T^* \hat{T}$   $\tilde{x} = x^* \hat{x}$ ,  $\tilde{y} = y^* \hat{y}$  ...

l'invariance des équations donne :  $u^* = x^*/y^{*2}$ ,  $v^* = x^*u^*/y^*$ ,  $u^{*2} = T^*x^*$

L'invariance de flux  $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{y}$  donne  $u^* = 1/(T^*y^*)$ ,

donc après calcul :  $y^* = x^{*2/5}$ .  $T^* = x^{*-3/5}$   $u^* = x^{*1/5}$  donc il existe une fonction implicite liant la vitesse aux coordonnées  $F_1(\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{y}) = 0$

par l'invariance cela donne  $F_1(\hat{u}u^*, \hat{x}x^*, \hat{y}y^*) = 0$

la relation implicite liant la vitesse et ses coordonnées devient  $F_1(\hat{u}x^{*1/5}, \hat{x}x^*, \hat{y}x^{*2/5}) = 0$ , par élimination de  $x^*$ , elle s'écrit  $F_2(\hat{u}/(\hat{x}^{1/5}), \hat{x}x^*, (\hat{y}/(\hat{x}^{2/5})) = 0$ , vrai pour tout  $x^*$ , donc cet argument n'existe pas.

Donc  $\hat{u}/(\hat{x}^{1/5})$  est fonction de  $(\hat{y}/(\hat{x}^{2/5}))$  ou  $\tilde{u}/(\tilde{x}^{1/5})$  est fonction de  $(\tilde{y}/(\tilde{x}^{2/5}))$  avec  $\xi = \tilde{x}$ ,  $\tilde{u} = \xi^{1/5} f'(\eta)$  et  $\eta = \tilde{y}/\tilde{x}^{2/5}$ , on en déduit  $\tilde{\psi} = \xi^{3/5} f(\eta)$ , et  $\tilde{v} = \xi^{-2/5} V(\eta)$ . De même, on en déduit que  $\tilde{T} = \xi^{-3/5} g(\eta)$ . Pour les panaches laminaires plans, la variable de similitude est  $y/x^{2/5}$ . La transformation des dérivées s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \eta} \text{ ce qui donne :}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{2}{5} \eta \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \xi^{-2/5} \frac{\partial}{\partial \eta} \text{ d'où : } \tilde{u} = \xi^{1/5} f'(\eta) \text{ donc } \tilde{\psi} = \xi^{3/5} f(\eta) \text{ et } \tilde{v} = 5^{-1} \xi^{-2/5} (2\eta f' - 3f)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = (f' f' - 2f'' f' \eta) / (5\xi^{3/5}) \text{ et } \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = (-f'' f + 2f'' f' \eta) / (5\xi^{3/5}) \text{ et } \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = \xi^{-3/5} f'''$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = (-3f' g - 2\eta f' g') / (5\xi^{7/5}) \text{ et } \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = (2\eta f' g' - 3f g') / (5\xi^{7/5}) \text{ et } \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} = \xi^{-7/5} g''$$

puis en regroupant, on obtient le problème autosemblable :

$$(f'^2 - 3f f'') = 5f''' + 5g, \quad -3f' g = 5g''.$$

avec  $\int_0^\infty f' g d\eta = 1/2$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'(\infty) = 0$ ,  $g'(0) = 0$  et  $g(\infty) = 0$ .

La solution a une forme de gaussienne pour la température  $g(\eta)$  et pour la vitesse  $f'(\eta)$ , la vitesse transverse est dirigée vers le centre (les jets et les panaches aspirent l'air ambiant).

### bibliographie

Schlichtung Gersten "Grenzschicht-Theorie" Springer 2006, p280

Martynenko Korovkin Sokovishin "the class of self-similar solutions for laminar buoyant jets" international journal of heat and mass transfer 32(12) :2297-2307 · december 1989 doi : 10.1016/0017-9310(89)90191-9