Transferts Thermiques dans les Fluides

Echauffement par dissipation et discontinuité de température dans un tube

Solution de Lévêque (1928).

PC 3 **MF 202** 2018/2019
Mercredi 5 décembre 2018

Echauffement par dissipation
On considère un écoulement de Poiseuille de fluide incompressible dans un tube cylindrique de rayon R et d'axe Ox sous l'action d'un gradient de pression constant connu $dp/dx = -\Pi$, avec $\Pi > 0$. On désigne respectivement par μ, c et k : la viscosité dynamique, la chaleur spécifique et la conductivité thermique du liquide. On admet que le nombre de Reynolds construit avec le rayon R de la conduite et la vitesse maximum U_0 (vitesse sur l'axe) est grand devant l'unité, mais inférieur à 2865 afin d'être assuré d'avoir un régime laminaire. La paroi est maintenue à la température constante T_0 et on admet que le régime thermique est établi (ce qui signifie que $\partial T/\partial x = 0$).

1. Retrouver (très rapidement) le champ des vitesses de l'écoulement de Poiseuille.

2. Écrire l'équation de la chaleur avec des quantités sans dimension dans la région de régime établi $x < 0$, en posant pour la température :

$$T = T_0 + (\delta T)\bar{T}$$

et pour la composante longitudinale de la vitesse (sur l'axe des $\bar{x}$) :

$$u = U_0\bar{u}.$$

Donner les expressions de U_0 et (δT) en fonction des propriétés physiques du liquide et de R.
Déterminer la valeur du flux qu'il faut fournir à la paroi pour maintenir sa température à la valeur constante T_0, la production de chaleur par frottements visqueux n'étant pas négligée.
Estimer numériquement l'élévation de température en fonction de la vitesse dans le cas de l'eau.
Conclure.

Solution de Lévêque (discontinuité de température, couche limite thermique en négligeant la dissipation visqueuse.)
3. On suppose maintenant que la température de la paroi varie brusquement en $x = 0$:
• pour $x < 0$, la paroi est maintenue à la température constante T_0.
• pour $x > 0$, la paroi est maintenue à la température $T_w > T_0$.
Le nombre d'Eckert construit sur $T_w - T_0$ est supposé très petit. Que devient l'élévation de température

due aux frottements visqueux dans ce cas ?

On s'intéresse maintenant à la région pour x autour de 0 sur une distance de l'ordre de R ($x = R\bar{x}$). Montrer qu'il faut changer d'échelle pour la température et que l'on peut choisir :

$$T = T_0 + (T_w - T_0)\bar{T}$$

Écrire l'équation de la chaleur (le nombre d'Eckert étant supposé nul). Compte tenu de la valeur du nombre de Prandtl (d'ordre un) montrer qu'il existe nécessairement une couche limite thermique sur la paroi $r = R$ pour $x > 0$.

4. Déterminer l'épaisseur de la couche limite thermique, ainsi que l'équation simplifiée que doit vérifier la température dans cette zone.

5. Achever la résolution en recherchant une solution semblable (solution de Lévêque).

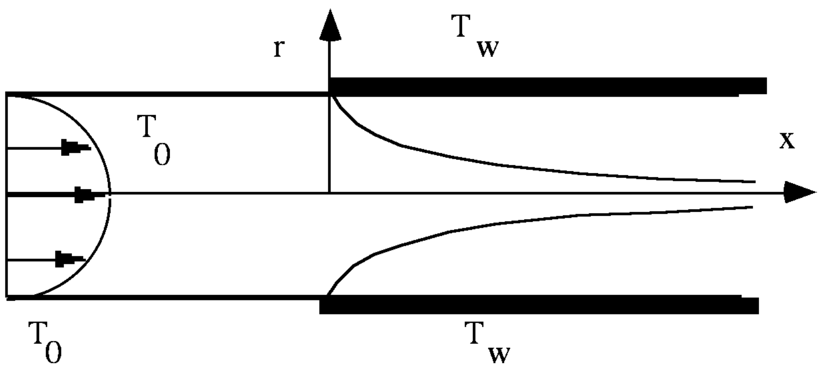

FIGURE 1 – le tube maintenu à la température T_0 en $x < 0$ et à la température T_w en $x > 0$

Rappels : Comme $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$, il ne reste que :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial rv}{r\partial r},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\underline{\nabla}^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}\phi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi.$$

$$2\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} = (\frac{\partial u}{\partial r})^2.$$

Le code FreeFem++ pour calculer cette PC et des images de résultats sont sur :
`http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/COURS/ENSTA/HTMLPC/PC2/`

PCn°2 CORRECTION
Écoulement de Poiseuille élévation de température par dissipation visqueuse puis sans mais avec discontinuité de température :
Solution de Lévêque (1928).

1. L'écoulement de Poiseuille, encore appelé régime établi est obtenu à une distance de l'entrée égale à environ le rayon fois le nombre de Reynolds. Dans cette région, l'écoulement à "oublié" l'existence de l'entrée ; le profil de vitesse est invariant par translation, donc $\partial u/\partial x = 0$, l'équation de l'incompressibilité devient ($\frac{\partial(rv)}{r\partial r} = 0$) et les conditions d'adhérence donnent $v = 0$. La composante radiale de l'équation de quantité de mouvement donne $\partial p/\partial r = 0$, la pression ne dépend que de la variable longitudinale, d'où l'équation longitudinale :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr})),$$

on en déduit que chacun des deux termes est constant (fonction de x = fonction de r), d'où par intégration :

$$\Pi = -\frac{dp}{dx} \text{ et } u = \frac{1}{4\mu}\Pi(R^2 - r^2).$$

2. L'équation précédente s'écrit $u(r) = U_0\bar{u}$, avec $\bar{u} = 1 - \bar{r}^2$ avec $\bar{r} = r/R$ et $U_0 = \frac{1}{4\mu}\Pi(R^2)$. Avec la jauge proposée pour T et compte tenu de l'invariance par translation, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$0 = [\frac{k\delta T}{R^2}]\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{d\bar{r}}(\bar{r}\frac{d\bar{T}}{d\bar{r}})) + [\mu\frac{U_0^2}{R^2}](\frac{d\bar{u}}{d\bar{r}})^2.$$

La jauge de la Ture s'en déduit : $(\delta T) = \mu U_0^2/k = Pr\ c^{-1}U_0^2$. Si on avait directement écrit l'équation du poly : $1/Pe = E/R_e$ donc $E = 1/Pr$ or $E = U_0^2/(c\delta T)$, on retrouve bien la même chose En remplaçant la vitesse par sa valeur, l'équation : $\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{d\bar{r}}(\bar{r}\frac{d\bar{T}}{d\bar{r}})) = -4\bar{r}^2$ se résout aisément, la température est en

$$\bar{T} = \frac{1 - \bar{r}^4}{4}$$

Le vecteur flux de chaleur est dans la direction du vecteur radial : $q = -k(\delta T)R^{-1}(-\bar{r}^3)$, à la paroi, la quantité de chaleur sortante par unité de surface est $-q(1) = -k(\delta T)/R$. Ce flux doit être évacué par l'extérieur qui reçoit $k(\delta T)/R = \mu U_0^2/R$.
A.N. : $\mu = 1,010^{-3}$ (S.I. ou $kgm^{-1}s^{-1}$ ou "Poiseuille") à 20^{o}C , $k = 0,6Wm^{-1}K^{-1}$, $c_p = 4,1810^3Jkg^{-1}K^{-1}$. $Pr = 7$, donc $\delta T = \mu U_0^2/k = Prc^{-1}U_0^2 = 1,610^-3U_0^2$, si $\delta T = 1K$ alors $U_0 = 24ms^{-1} = 88km/h$ (un peu rapide pour un tuyau d'eau), mais pour rester à un nombre de Reynolds inérieur à 2500 cela donne un diamètre de $0.1mm$. C'est donc impossible ! Pour une huile

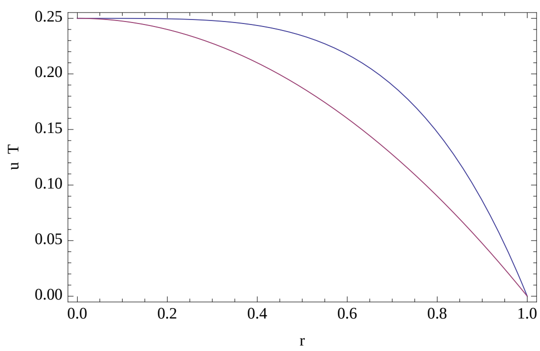

FIGURE 2 – Température en bleu (courbe supérieure) et vitesse en rouge (courbe inférieure) dans un tube à nombre d'Eckert $E = 1/Pr$.

le nombre de Prandtl est entre 100 et 100000,
pour la glycérine, il est entre 2000 et 100000, on
peut commencer à voir l'effet ! ! !
Néanmoins, un écoulement dans un tuyau à température constante n'existe pas, il y a toujours une petite élévation de température.

3. L'élévation de température induite est très faible car le terme d'Eckert qui produit le réchauffement est $E = Prc^{-1}U_0^2/(T_w - T_0)$ on reconnaît bien dans E le rapport entre l'élévation de température liée à la dissipation et l'écart de température liée au changement de conditions aux limites : $(\delta T)/(T_w - T_0)$, L'hypothèse $\bar{T} = 0$ pour x situé en aval du changement de température est donc raisonnable. On impose une nouvelle température, il est donc raisonnable de faire intervenir l'écart dans la jauge. L'équation de la chaleur devient (ici complète) :

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{T} = \frac{1}{Re}(\frac{1}{Pr}(\frac{\partial}{\bar{r}\partial \bar{r}}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{T}) + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\bar{T}) + E(\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{u})^2)$$

$E = Prc^{-1}U_0^2/(T_w - T_0)$ est le nombre d'Eckert, ce nombre est très petit, par exemple si on chauffe de 10K, $E = 0.1$ à 88km/h ! On pose donc $E = 0$. On remarque au passage que E est un paramètre qui produit une perturbation régulière.

4. Puisque le nombre de Péclet ($PrRe$) est grand, on a asymptotiquement : $\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = 0$. La température, qui était égale à 0, le reste ! sauf en $\bar{r} = 1$ où $\bar{u} = 0$, là $\bar{T} = 1$. Il y a donc un problème singulier... On introduit donc une couche limite d'épaisseur inconnue εR pour l'instant, on pose, près de la paroi : $\bar{r} = 1 - \varepsilon\tilde{r}$. On est bien au voisinage de la paroi, on a mis un signe moins, car quand on s'éloigne de la paroi à l'intérieur, le rayon diminue, et une a une nouvelle échelle telle que $\tilde{r} = O(1)$, avec $\bar{r}$ proche de 1, la petitesse est comprise dans ε.

On réécrit l'équation de la chaleur en repêchant les termes qui ont disparu brutalement par le précédent passage à la limite. Pour ε tendant vers 0, la vitesse $1 - \bar{r}^2$ au premier ordre est linéaire en $\tilde{r}$ (car $1 - \bar{r}^2 = 1 - (1 - \varepsilon\tilde{r})^2 = 2\varepsilon\tilde{r} + O(\varepsilon^2)$) , l'échelle longitudinale reste la même, le terme de dérivée totale devient donc (on met un tilde sur T, car T dépend de r tilde) :

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{T} = 2\varepsilon\tilde{r}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\tilde{T} + O(\varepsilon^2)$$

Le terme de Laplacien se développe, le terme $\partial^2\bar{T}/\partial\bar{x}^2$ est affecté d'un coefficient d'ordre un, le deuxième terme, se développe et a une contribution colossale :

$$\frac{\partial}{\bar{r}\partial r}(\bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\bar{T}) = \varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}^2}\tilde{T} + O(\varepsilon^{-1})$$

en regroupant, et en gardant les termes les plus grands de chaque côté :

$$2\varepsilon\tilde{r}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\tilde{T} = \frac{1}{Pe}\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}^2}\tilde{T}$$

Pour garder le maximum de termes, on choisit par le PMD (Principe de Moindre Dégénérescence) $\varepsilon = Pe^{-1/3}$. D'où l'équation finale de convection dans un écoulement cisaillé et de diffusion transverse (dans la couche limite thermique) :

$$2\tilde{r}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^2}\tilde{T}$$

Un choix équivalent : $\varepsilon = (2Pe)^{-1/3}$, donne une équation un poil plus jolie :

$$\tilde{r}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^2}\tilde{T}$$

Conditions aux limites, $\tilde{T} = 0$ pour $\bar{x} < 0$ et $\tilde{T} = 1$ pour $\bar{x} > 0$. Condition de raccord (condition limite) $\bar{T}(\bar{x}, \bar{r} \to 1) = \tilde{T}(\bar{x}, \tilde{r} \to \infty)$.

5. Solution semblable : on cherche par dilatation des variables à rendre l'équation différentielle invariante par ces dilatations : $\bar{x} = \hat{x}x^*$, $\tilde{r} = \hat{r}r^*$ $\tilde{T} = \hat{T}T^*$ donc

$$\tilde{r}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^2}\tilde{T} \text{ devient } (r^*x^{*-1}T^*)\hat{r}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\hat{T} = (r^{*-2}T^*)\frac{\partial}{\partial \hat{r}^2}\hat{T}$$

donc $r^{*3} = x^*$ et $T* = 1$ (par la condition aux limite en 0). Le problème en "chapeau" est alors identique

$$\hat{r}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\hat{T} = \frac{\partial}{\partial \hat{r}^2}\hat{T} \text{ avec } \hat{T}(\hat{x} \leq 0, \hat{y}) = 0 \text{ et } \hat{T}(\hat{x} > 0, \hat{y} = 0) = 1.$$

La solution est une fonction implicite entre $\tilde{T}$ et $\bar{x}, \tilde{y}$:

$F(\bar{x}, \tilde{y}, \tilde{T}) = 0$ par les dilatations $F(\hat{x}x^*, \hat{r}^*, \hat{T}T^*) = 0$ par l'invariance et pour tout x^* : $F(\hat{x}r^{*3}, \hat{r}r^*, T) = 0$.

ce que l'on peut reformuler en faisant disparaître r^* du maximum d'arguments :

$$F_2(\hat{x}r^{*3}, \frac{\hat{r}r^*}{(\hat{x}r^{*3})^{1/3}}, \hat{T}) = 0, \text{ soit } F_2(\hat{x}r^{*3}, \frac{\hat{r}}{\hat{x}^{1/3}}, \hat{T}) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout r^*, cet argument n'intervient pas dans la solution, la solution est donc de la forme :

$\hat{T} = \theta(\eta)$ avec $\eta = \hat{r}\hat{x}^{-1/3}$. Bien entendu $\eta = \tilde{r}\bar{x}^{-1/3}$.

$$\hat{r}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\hat{T} = (\hat{r})(\frac{\partial}{\partial \eta}\theta)(\frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}}) = (\eta\hat{x}^{1/3})(\theta')(\frac{-\eta}{3\hat{x}})$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}^2}\hat{T} = \frac{\partial}{\partial \hat{r}}[\theta'\frac{\partial \eta}{\partial \hat{r}}] = \frac{\partial}{\partial \hat{r}}[\theta'\frac{1}{\hat{x}^{1/3}}] = \frac{1}{\hat{x}^{1/3}}\frac{\partial}{\partial \hat{r}}[\theta'] = \frac{1}{\hat{x}^{2/3}}\theta''$$

l'équation aux dérivées partielles (PDE) est devenu une équation différentielle (ODE) :

$$\theta'' + \frac{\eta^2}{3}\theta' = 0 \text{ avec } \theta(0) = 1 \text{ et } \theta(\infty) = 0.$$

Par chance on peut la résoudre *a mano* $\theta''/\theta' = -\frac{\eta^2}{3}$ donc $ln(\theta') = -\frac{\eta^3}{9} + K$ donc $\theta' = Ae^{-\frac{\eta^3}{9}}$ compte tenu des conditions aux limites :

$$\theta(\eta) = 1 - \frac{\int_0^\eta exp(-\xi^3/9)d\xi}{\int_0^\infty exp(-\xi^3/9)d\xi} = \Gamma(1/3, \eta^3/9)/\Gamma(1/3)$$

la dernière écrite tient compte de la définition de la fonction Gamma incomplète généralisée :

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$$

On a pour θ une fonction qui décroît de 1 à 0. On a $\int_0^\infty \theta(\eta)d\eta = 1.051416$, $\int_0^\infty \eta\theta(\eta)d\eta = 0.8075$ et la valeur de la dérivée à la paroi est utile pour évaluer le nombre de Nusselt : $\theta'(0) = -\frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} = -0.538366$
La solution composite est :

$$T = T_0 + (T_w - T_0)\frac{\Gamma(1/3, \frac{(2PrRe)(R-r)^3}{9xR^2})}{\Gamma(1/3)}$$

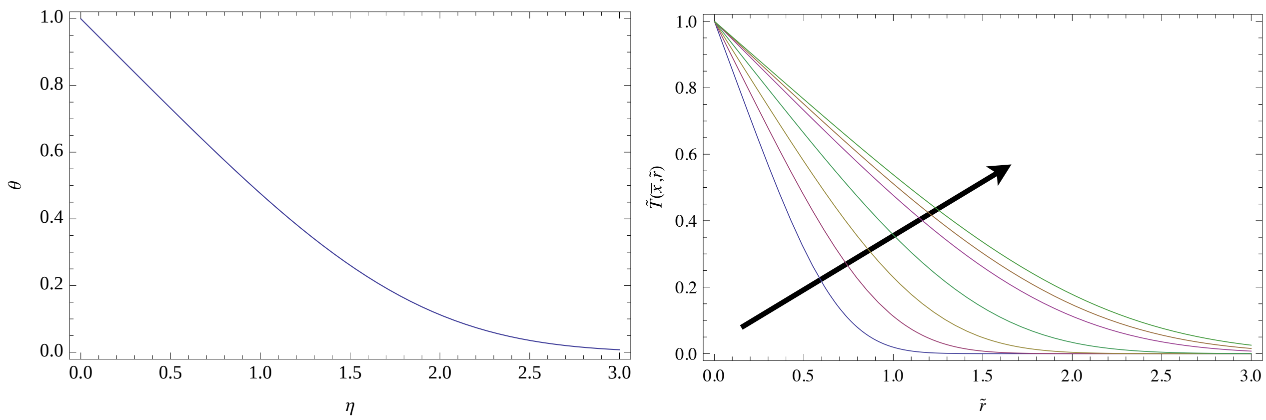

FIGURE 3 – La fonction autosemblable solution du problème à gauche. A droite des profils de températures déduits de la précédente, flèche dans le sens des $\bar{x}$ croissants, .050 .125 .25 .5 .75 1 1.25 et 1.5

NOTES
- rappel : la solution de : $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\tilde{T} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\tilde{T}$, et $\tilde{T}(0) = 1$ $\tilde{T}(\infty) = 0$, est la fonction erreur complémentaire (*cf* PC 1)...

$$\tilde{T}(\tilde{r}, \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\tilde{r}}{2\sqrt{\bar{x}}}}^{\infty} exp(-\xi^2)d\xi = Erfc(\tilde{r}/(2\sqrt{\bar{x}}))$$

- pour aller un peu plus loin : déterminer l'ordre de grandeur de la région où il faut retenir tous les termes... (près du nez), puis il existe une région où la couche limite a rattrapé la hauteur pour une longueur ReR, on est dans le régime établi (voir le cours, Solution de Graetz).
-cas de la paroi adiabatique...ce cas est plus compliqué : la température reste de même jauge (on n'impose pas un saut de ture), le raccord se fait sur la pente. la résolution est pénible et passe par une intégrale difficile...
- Le nombre d'Eckert à comparer au nombre de Mach...
- En pratique, il est impossible d'imposer un saut de température : la conduction dans le solide va rendre plus douce la discontinuité... mais ici on est en fait à une échelle plus grande
- A retenir : le terme source en $\mu(\partial u/\partial y)^2$ est en général très faible en convection forcée (Sauf en supersonique cf PC de révision). Un écoulement est toujours cisaillé près de la paroi, d'où l'intérêt d'étudier la diffusion dans un champ de cisaillement pur...

Bibliographie

Schlichting (1987) : "Boundary Layer theory" Mc Graw Hill, qui cite Lévêque.