



ENSTA

Couche limite thermique avec couplage fluide/ solide.

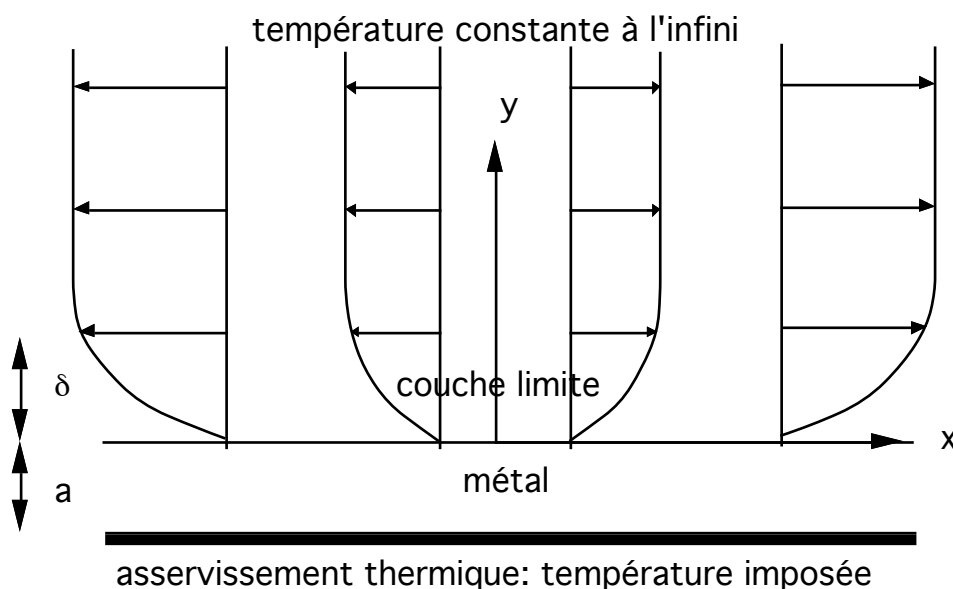
COURS MF204

PC 3

2006-2007

L'objet du problème est l'étude de la transmission de la chaleur au travers d'une paroi: il s'agit du couplage thermique entre la convection forcée d'un écoulement de fluide et une paroi solide de température différente.

Pour simplifier ce problème ardu on va s'intéresser au voisinage du point d'arrêt, le fluide est supposé incompressible et quasistationnaire



Le solide est un métal de propriétés physiques constantes: masse volumique ρ_s , chaleur spécifique c_s , conductivité thermique k_s et diffusion thermique $\alpha_s = k_s / (\rho_s c_s)$.

Il se présente sous forme d'une plaque plane d'épaisseur finie a . Un asservissement thermique permet de maintenir la face $y = -a$ à la température T_0 constante

Le fluide est incompressible et ses propriétés physiques sont supposées constantes: ρ , ν , c , k et α . Le nombre de Prandtl est d'ordre unité.

L'écoulement de point d'arrêt est caractérisé par son comportement à l'infini qui fait intervenir une constante A (de dimension s^{-1}), les composantes u, v de la vitesse sont telles que $u \sim 2Ax$ et $v \sim -2Ay$, la température étant $T_\infty > T_0$. Le nombre de Reynolds, sera supposé

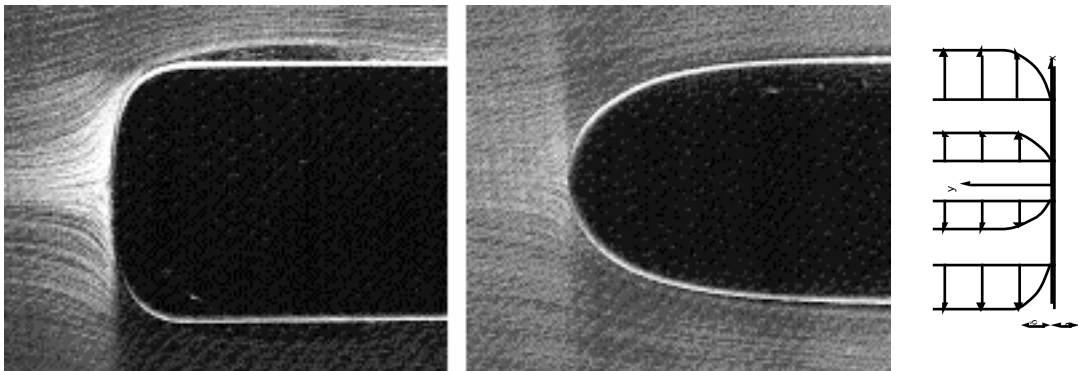
très grand, il sera construit avec une longueur $L \gg a$. Dans l'ensemble du problème on néglige les effets de la gravité et de la production de chaleur par frottements visqueux.

1.1 Sans rétablir les équations de couche limite stationnaires, et en prenant les résultats de la couche limite dynamique du cours (Darrozès & François p 224) avec $\beta=1$, écrire les équations et les conditions aux limites adimensionnelles que doivent vérifier la température $T(x,y)$ dans le fluide et la température $\Theta(x,y)$ dans le solide, dans un domaine d'ordre L en x . Montrer qu'en première approximation la fonction Θ est linéaire en y

1.2. Montrer que les solutions de la température dans la couche limite sont nécessairement de la forme $\bar{x}^n g(\tilde{y})$. Exprimer la valeur de n en utilisant les conditions aux limites et écrire l'équation que doit vérifier $g(\tilde{y})$.

1.3. En déduire que la température est constante à la paroi, et qu'il existe une épaisseur caractéristique a^* (que l'on écrira en fonction du nombre de Biot), ne dépendant que des données et telle qu'en première approximation:

$$a \ll a^* \text{ entraîne } T_p = T_0, \text{ et } a \gg a^* \text{ entraîne } T_p = T_\infty.$$



photos: Van Dyke "An Album of fluid motion" Parabolic 1982, écoulement de point d'arrêt.

Couche limite thermique avec couplage fluide/ solide CORRECTION**Le fluide**

L'écoulement de point d'arrêt est une solution exacte des équations de Navier Stokes (coup double!). D'après le cours la solution de Falkner-Skan (1931) associée au point d'arrêt est la solution de Hiemenz (1911).

Le fluide parfait a comme solution: $u=2Ax$ et $v=-2Ay$, la vitesse longitudinale à la paroi (vitesse de glissement) est $u=2Ax$, on l'écrit sans dimensions en $x=L \bar{x}$, on pose $U_0=2AL$ pour la jauge de la vitesse $\bar{u} = \bar{x}$.

On écrit ensuite les équations de Couche limite pour annuler la vitesse de glissement.

Le nombre de Prandtl est d'ordre unité, les échelles dans les couches limites dynamiques et thermiques sont les mêmes:

$$x=L \bar{x}, y=\delta \bar{y} \text{ avec } \delta=(\frac{\nu}{2A})^{1/2}, \text{ car le nbre de Reynolds est } R_0=2AL^2/\nu.$$

Pour les vitesses $u=U_0 \bar{u}$, et $v = U_0 R_0^{-1/2} \bar{v}$.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0; (\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}) = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

conditions aux limites: raccord $\bar{u} \rightarrow \bar{x}$ pour $\bar{y} \rightarrow \infty$ et adhérence $\bar{u}(\bar{x},0)=\bar{v}(\bar{x},0)=0$;

La solution s'écrit de manière semblable: $\bar{u} = \bar{x} f'(\bar{y})$ et $\bar{v} = -f(\bar{y})$. La jauge de la température δT n'est pas encore connue, on pose $T=T_\infty+\delta T \bar{T}$. l'équation pour la température:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \text{Pr}^{-1} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}, \text{ ou encore: } \bar{x} f'(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} - f(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \text{Pr}^{-1} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}.$$

On observe que cette équation est invariante par tout changement d'échelle $\bar{x}^* \bar{x}$, à la paroi, la température est disons $t(\bar{x})$ (qui dépend du couplage avec le solide). Mais ici, la variable de similitude est déjà imposée c'est $\bar{y}$. La solution est vraisemblablement de la forme $t(\bar{x})g(\bar{y})$, $g(0)=1$. En substituant, on a:

$$\bar{x} t'/t = (f g'/g + \text{Pr}^{-1} g''/g)/f'$$

donc $\bar{x} t'/t = \text{constante} = n$, $t(\bar{x}) = \bar{x}^n$.

La valeur de n est pour l'instant quelconque, c'est l'expression dans le solide qui va nous en donner la valeur.

Le solide

Pour le solide, la variable y est mesurée avec a , et l'équation de la chaleur s'écrit:

$$(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \Theta) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \Theta)) (\delta \Theta / a^2) = 0 \text{ asymptotiquement: } \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \bar{y}^2} = 0, \text{ donc } \Theta = A(\bar{x}) (\bar{y} + 1).$$

Couplage Fluide Solide

Pour conclure, il nous faut écrire les conditions sur la paroi (égalité des flux normaux ET égalité des températures). Les conditions aux limites à la paroi donnent d'une part par l'égalité des flux

$$k_s \frac{\partial \Theta}{\partial y} = k \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{\delta k_s}{ka} \right) \delta \Theta A(\bar{x}) = \delta T g'(0) \bar{x}^n,$$

donc $A(\bar{x}) = \bar{x}^n$, et $\delta \Theta = \delta T g'(0) \left(\frac{ka}{\delta k_s} \right)$,

d'autre part par l'égalité des températures: $T(0) = T_\infty + (\delta T) g(0) \bar{x}^n$ (avec $g(0)=1$, c'est un choix, on peut prendre la valeur que l'on veut), d'où

$\Theta(0) = T_0 + (\delta \Theta) \bar{x}^n$, donc $n=0$. la température est constante sur la paroi.

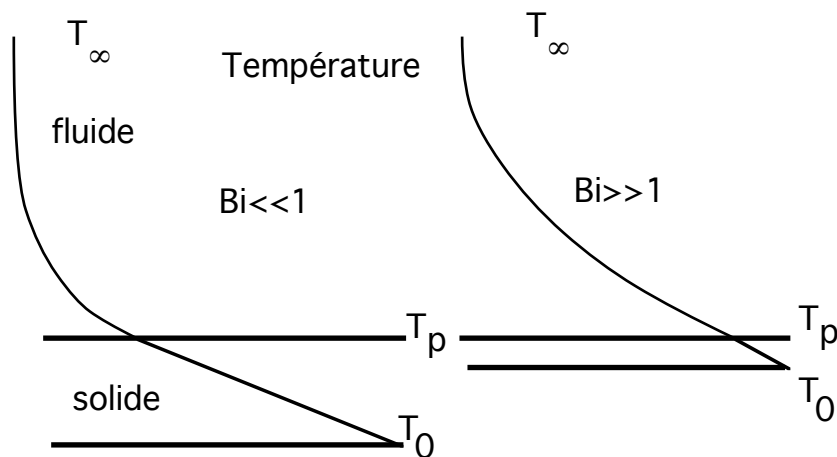
$T(0) = \Theta(0) = T_p$ est donc une constante, d'où :

$$T_p \left(1 - g'(0) \left(\frac{ak}{\delta k_s} \right) \right) = T_0 - g'(0) \left(\frac{ak}{\delta k_s} \right) T_\infty \quad (\text{avec } g'(0) < 0)$$

en posant $a^* = \left(\frac{\delta k_s}{k(-g'(0))} \right)$ on obtient le résultat annoncé:

$$T_p = \frac{T_0 + (a/a^*) T_\infty}{1 + (a/a^*)}$$

On remarque que $(a^*/a) = Bi = \frac{k_s}{a} \left(\frac{\delta}{k(-g'(0))} \right)$ est l'équivalent d'un nombre de Biot produit de la conductance de la plaque k_s/a par la résistance du fluide $\delta/(-g'(0)k)$:



Attention, le nombre de Biot que l'on a défini est celui relatif au fluide. Le solide lui, de son point de vue, voit un autre nombre de Biot qui est l'inverse du précédent...

A retenir:

L'apparition d'un nombre de Biot Bi et son influence sur le saut de température (c'est tout le problème du couplage thermique paroi/fluide), son aspect relatif!

L'écoulement de point d'arrêt est universel, c'est aussi une solution exacte de Navier Stokes...

Biblio:

Schlichting "Boundary Layer Theory" Mc Graw Hill 1979

Guyon Hulin & Petit "Hydrodynamique Physique" InterÉdition 1991

Darroz & François "Mécanique des fluides incompressibles (cours ENSTA)" Springer Verlag

Landau & Lifshitz "Mécanique des fluides" MIR

Cousteix "Couche limite laminaire" ed Cepadues 1988

Comolet "Mécanique des fluides II" Masson