

Étude du refroidissement d'une coulée de verre, verre flotté, procédé Pilkington

L'objet de ce problème est l'étude (hypersimplifiée) de différents problèmes thermiques liés au refroidissement d'une coulée de verre lors du processus de fabrication de plaques de verre. Les différents constituants du verre (SiO_2 , CaO Na_2O et nombreux autres adjuvants permettant d'obtenir des caractéristiques particulières) sont fondus à haute température dans un four ($T_0 = 1050^\circ\text{C}$, non représenté à gauche du schéma). La pâte visqueuse obtenue se refroidit en flottant sur un lit d'étain fondu ce qui permet d'obtenir une grande planéité. Il sort à droite à la température de 600°C . L'atmosphère au dessus de la plaque est contrôlée (injection d'un mélange de gaz qui évitent l'oxydation de l'étain à la pression P_0).

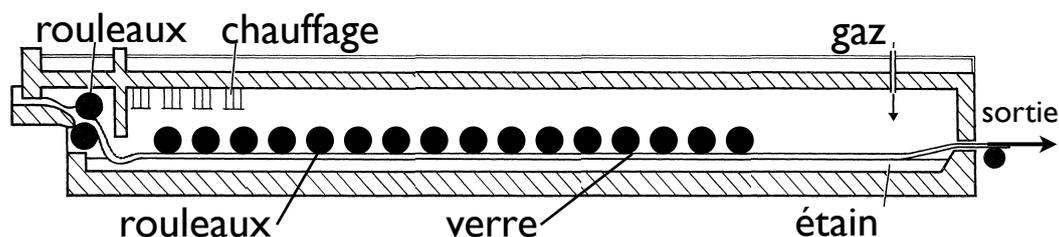


Figure 1 : le processus de fabrication du verre. Voir la figure 2 pour un zoom de la couche de verre.

L'épaisseur de verre qui s'écoule (de densité $\rho_v = 2500\text{kg/m}^3$) est typiquement d'épaisseur $h = 6\text{mm}$, la largeur est d'environ 3m et la longueur est de 60m . Des rouleaux représentés sur la figure entraînent le haut de l'écoulement à la vitesse $V = 12\text{m/min}$. Le bas de l'écoulement de verre entraîne par la viscosité l'étain (de densité $\rho_e = 6500\text{kg/m}^3$), soit τ_0 la contrainte visqueuse supposée constante.

Les parties 1 et 2 sont assez indépendantes.

Equations loin de l'entrée et assez avant la sortie

Le verre est visqueux et sa viscosité ainsi que sa conductivité thermique dépendent de la température ($\mu(T)$ varie suivant la loi $\log_{10}(\mu(T)) = A + B/(T(\text{ en Celcius}) - T_0)$ de Vogel-Fulcher-Tammann (VFT), cette relation est donnée pour mémoire, on ne cherchera pas à la manipuler), il est entraîné en surface supérieure à la vitesse V (en $y = h$), et à sa surface inférieure (en $y = 0$) il entraîne l'étain fondu. On suppose que l'écoulement est incompressible stationnaire (la ligne de production fonctionne 24h/24), et on suppose que l'écoulement est plan (u, v) . Dans cette partie, on suppose que la

température de l'étain est T_e et que la température du verre en $y = 0$ est celle de l'étain, et en $y = h$ l'échange de chaleur avec le gaz se traduit par une densité de flux ϕ avec $\phi = -k(T(y = h))\frac{\partial T}{\partial y}(y = h)$ supposée donnée ici. On se place dans cette question assez loin de l'entrée et assez avant la sortie et on étudie les différents champs. Dans la seconde partie on se placera plus près de l'entrée.

- 1.1. Justifier que l'on peut supposer l'écoulement invariant par translation.
- 1.2. Montrer que la vitesse transverse est nulle : $v = 0$.
- 1.3. Pourquoi écrit on le tenseur des contraintes sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu(T)\underline{\underline{D}}$.
- 1.4. Constater que la pression est invariante par translation (en x et z , la gravité est suivant y).
- 1.5. Pourquoi peut on dire que la température du verre est invariante par translation ?
- 1.6. Ecrire les équations de Navier Stokes compte tenu de l'invariance par translation de u et p , faire attention au terme $\mu(T)$ qui est variable.
- 1.7. Justifier que $u(h) = V$, et que $\mu(T(y = 0))\frac{du}{dy}(y = 0) = \tau_0$
- 1.8. Compte tenu des invariances précédentes. Ecrire l'équation de la chaleur pour $T(y)$ en supposant que le terme source lié aux effets visqueux est négligeable.
- 1.9. Quelles sont les conditions aux limites pour la température ?
- 1.10. Le verre fondu est constitué de différents constituants en solution de concentration c_i , écrire, dans le cadre des approximations précédentes, l'équation de diffusion pour une espèce générique i ainsi que les conditions aux limites associées en haut et en bas de la couche.
- 1.11. La densité du verre étant à peu près constante avec la température, et le nombre de Prandtl étant lui aussi à peu près constant, exprimer $k(T)$ en fonction de $\mu(T)$, Pr et la capacité calorifique du verre fondu que l'on supposera aussi constante.
- 1.12. De même exprimer le coefficient de diffusion en fonction du nombre de Schmidt supposé constant.
- 1.13. Montrer que le profil de température $T(y)$ peut s'intégrer de manière réciproque $y(T)$, écrire cette dépendance sous forme d'une intégrale que l'on ne calculera pas.
- 1.14. De même que pour 1.13. montrer que puisque u est fonction de y , u est fonction de T , écrire cette dépendance sous forme d'une intégrale que l'on ne calculera pas.
- 1.15. Calculer le profil de température dans le cas où μ et k sont constants.

Longueur de refroidissement

Dans cette partie on suppose que les coefficients k , μ sont constants en première approximation. En revanche, on n'est pas dans un régime établi pour la température, celle ci varie en x et en y , mais le régime reste toujours stationnaire. La vitesse, elle, est supposée être invariante en x , l'écoulement est uniforme, la température relaxe.

- 2.1. Compte tenu des questions 1.1 à 1.7 montrer que le champ des vitesses se réduit simplement à $u(y) = V + \Gamma(y - h)$ et $v = 0$. Identifier Γ .
- 2.2. Compte tenu de la faible épaisseur du verre, montrer, en recensant toutes les hypothèses *ad hoc*, que l'on peut écrire l'équation de la chaleur sous la forme adimensionnée suivante :

$$\bar{u}(\bar{y})\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}.$$

On exprimera l'échelle de longueur L longitudinale en fonction de h et des autres quantités. On utilisera la température dans le coeur de la couche d'étain T_e comme valeur de référence.

- 2.3. On suppose maintenant que Γ est faible (identifier le groupement sans dimension qui permet de le faire), que devient l'équation de la chaleur si on néglige le terme avec Γ ?
- 2.4. On se donne $T = T_e$ en $y = 0$ et on suppose qu'il n'y a pas d'échanges de chaleur en $y = h$, montrer que pour x assez grand la température a une forme du genre $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = \Theta e^{K\bar{x}} f(\bar{y})$, identifier K , $f(\bar{y})$, on ne s'occiera pas de la constante Θ .
- 2.5. Réécrire l'équation de la chaleur de 2.2 sous forme intégrale avec dimensions. Pour la moyenne du produit $u(y)T(x, y)$ on écrit : $\theta(x) = (\int_0^h (T(x, y) - T_e)u(y)dy)/(hV)$.
- 2.6. En haut de la couche on suppose que le flux est négligeable (adiabatique). En bas de la couche de verre, on suppose maintenant (contrairement à la première partie) que la densité de flux peut être modélisée par un coefficient d'échange noté h_e , la température dans le coeur de la couche d'étain étant T_e . A quelle condition sur h_e la température varie-t-elle peu dans la couche ? Conclure que l'on peut identifier grossièrement $(T(x, y) - T_e)$ et $\theta(x)$.
- 2.7. Ecrire l'équation d'évolution de $\theta(x)$; l'intégrer.
- 2.8. Quel phénomène thermique a-t-on négligé et devrait on réintroduire pour une étude correcte ?

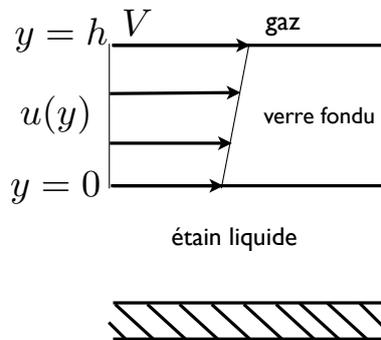


Figure 2 : La coulée de verre liquide flotte sur de l'étain liquide. Un gaz inerte est au dessus de la coulée visqueuse chaude de verre fondu. La vitesse en $y = h$ est imposée par les rouleaux non représentés ici. Le profil varie peu en y . En $y = 0$ les frottements visqueux entraînent un bain d'étain fondu.



Figure 3 : images issues <http://www.stein-heurtey.com/glass-industry/float-glass-plant-tin-baths.html>, à gauche le four vu de l'extérieur et à droite une image prise dans le four, on voit un galet qui entraîne l'écoulement.

Bibliographie

- James Barton Claude Guillemet , " Le verre : Science et technologie" éditions EDP 2005.
- L.A. Pilkington (1969) "The Float Glass Process", Proceedings of Royal Society of London, Series A, Vol 314, No 1516. pp. 1-25

Procédé Pilkington, verre flotté, Indications

1.1 Manifestement assez loin $\partial/\partial x = 0$.

1.2 $\partial_x u + \partial_y v = 0$ donne $v = cste$ donc $v = 0$.

1.3 par définition d'un fluide Newtonien (ce qui n'est en fait pas le cas pour le verre! il faudrait une loi plus compliquée non newtonienne, avec seuil et dépendance dans le cisaillement)

$\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \lambda \nabla \cdot \underline{u} \underline{I} + 2\mu \underline{D}$ mais ici on est en incompressible.

Attention cette question devait attirer l'attention sur le fait que μ est fonction de T et qu'il faudra faire attention lors des dérivations de $\underline{\sigma}$

1.4. ici ce n'est pas la pression qui met l'écoulement en mouvement (ce qui est le cas dans les écoulements de Poiseuille), $\partial p/\partial x = 0$.

1.5. on suppose que l'on est assez loin du four...

1.6 et 1.7. Navier Stokes (attention il ne reste dans D_{ij} que les termes en $\partial u/\partial y$, et comme on dérive σ_{ij} , il faut calculer $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$ ce nous donne $0 = \frac{\partial}{\partial y}(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial y})$ et $0 = \frac{\partial p}{\partial y} - \rho(T)g$, les diverses conditions sont $p(h) = P_0$, $v(h) = V$ vitesse des rouleaux, $\mu(T(y=0)) \frac{du}{dy}(y=0) = \tau_0$ égalité des contraintes tangentielles entre l'étain et le verre.

1.8. Equation de la chaleur de même on fait attention au fait que $k(T)$, on ne peut pas le faire sortir de la dérivée. $0 = \frac{\partial}{\partial y}(k(T) \frac{\partial T}{\partial y})$

1.9 Conditions aux limites $T(y=0) = T_e$ et $\phi = -k(T(y=h)) \frac{\partial T}{\partial y}(y=h)$.

1.10 Pour chaque constituant $\frac{\partial}{\partial y}(D_i(T(y)) \frac{\partial c_i}{\partial y}(y)) = 0$ et les flux sont nuls en haut et en bas.

1.11. par définition, $Pr = \frac{\mu c}{k}$ donc $k(T) = \frac{\mu(T)c}{Pr}$

1.12. de même comme $S_i = \frac{\nu}{D_i}$ on peut exprimer D_i en fonction de μ .

1.13 La difficulté provient de la dépendance de k avec T . L'équation de la chaleur s'intègre en $k(T(y)) \frac{\partial T}{\partial y}(y) = cst = -\phi$ par la condition de flux.

Par intégration de $y=0$ où $T = T_e$ à une hauteur $y < h$ où la température est T , on a $\frac{-1}{\phi} \int_{T_e}^T k(T') dT' = y$, donc on a bien $y(T)$ (que l'on pourrait inverser en $T(y)$).

1.14. De même que 1.13. la quantité de mouvement donne $\mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} = cst = \tau_0$

et donc $du = \frac{\tau_0}{\mu(T)} dy = \frac{\tau_0}{\mu(T)} \frac{dy}{dT} dT$ donc $du = \frac{\tau_0}{\mu(T)} \frac{k(T)}{-\phi} dT$. Notons T_h la température en $y = h$, on a

par intégration : $u - V = \frac{\tau_0 c}{-\phi Pr} \int_{T_h}^T dT' = \frac{\tau_0 c}{-\phi Pr} (T - T_h)$.

comme T est fonction de y , on trouve le profil sous forme paramétrique $u(T)$ et $y(T)$.

1.15 Si k est constant le profil est linéaire $T = T_e - y\phi/k$

2.1 Navier Stokes nous donne $v = 0$ et $0 = \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y})$ avec $u(h) = V$ et $\mu \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \tau_0$ donc $\Gamma = \tau_0/\mu$

2.2 On pose $x = L\bar{x}$, $u = V\bar{u}$, $y = h\bar{y}$; on suppose c , k et ρ constants, on néglige $\mu \underline{D} : \underline{D} \dots$. On obtient par moindre dégénérescence $L = h(Vh/(k/(\rho c)))$. On suppose que le nombre de Péclet est assez grand.

2.3 La vitesse varie de haut en bas de $h\tau_0/\mu$, donc si $(h\tau_0)/(\mu V) \ll 1$, elle est constante.

2.4 L'équation de la chaleur devient $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}$. On trouve la solution pour \bar{T} en $e^{-\pi^2 \bar{x}/4} \sin(\pi \bar{y}/2)$.

qui est valable pour \bar{x} assez grand.

2.5 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} = [\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}]_0^1$. à la paroi du bas $-k \frac{\partial T}{\partial y} = -h_e(T - T_e)$ en haut le flux est nul On pose $Bi = h_e h/k$ si $Bi \ll 1$ on en déduit $\rho_v c h V \frac{\partial \theta}{\partial x} = -h_e \theta$. On obtient pour la température moyenne une exponentielle décroissante.

2.8 On a négligé le rayonnement, le verre n'est plus transparent à ces températures pour l'infrarouge, et il y a des réflexions sur l'étain.

Remarquons que le verre est très visqueux (ν varie de 1 à 10 autour de la température de 1000°C), le nombre de Reynolds est à peine plus grand que 1. Ce qui sauve les hypothèses de la question 2.2 c'est que le nombre de Prandtl est très grand (environ 100). C'est ce qui "sauve" l'analyse que l'on a faite qui en toute rigueur est beaucoup trop simplifiée (remarquer l'astuce de la question 2.2 qui contraint la simplification en demandant les hypothèses!). L'analyse globale simplifiée de 2.5 peut quand même rendre de grands services à condition d'y inclure le rayonnement.

Des photos sur :

<http://www.stein-heurtey.com/glass-industry/float-glass-plant-tin-baths.html>,

et un schéma de la ligne sur <http://www.saint-gobain-vitrage.com/fr/presentation.html>, voir onglet "fabrication".

