

6. Méthodes intégrales

Résumé

La méthode intégrale consiste à travailler sur les équations intégrées sur l'épaisseur de la couche limite (ou du tuyau) et à se donner *a priori* la forme du profil de vitesse et de température, toute l'information étant contenue dans le préfacteur et dans l'épaisseur (c'est une autre vision de l'analyse dimensionnelle). On aboutit alors à une équation différentielle sur l'épaisseur de couche limite dynamique et/ou l'épaisseur de la couche limite thermique. On va montrer que l'on retrouve de manière approchée tous les résultats que nous avons obtenus en convection forcée interne, externe et en convection naturelle .

1 Introduction

La méthode intégrale consiste simplement à intégrer les équations transversalement sur toute la variable interne de couche limite de 0 de ∞ . On transforme un système d'équations aux dérivées partielles (PDE) en un système d'équations différentielles ordinaires (ODE) portant sur des "épaisseurs" (comme l'épaisseur de déplacement). Comme on a perdu le détail du profil, il faut faire une hypothèse sur la forme du profil. On dit que la vitesse est toujours *grosso modo* la même, elle va de 0 à la vitesse au loin $u_e(x)$ et varie sur une épaisseur caractéristique δ , on posera donc

$$u = U_e(x)f'(y/\delta(x)).$$

Cette fonction de forme $f'(\eta)$ que l'on se donne *a priori* (qui n'est pas forcément la solution de Blasius ou une solution autosemblable) permet d'exprimer les coefficients inconnus en fonction des autres variables. De même la température a toujours la même forme et on posera donc

$$T = T_0 + (T_w - T_0)\Theta(y/\delta_\Theta(x)),$$

la fonction définissant l'épaisseur thermique $\delta_\Theta(x)$ sera du même ordre de grandeur que $\delta(x)$ qui définit les effets dynamiques. On présente ici cette méthode et quelques "fermetures" laminaires et turbulentes.

Nous allons donc réexaminer tous les cas que nous avons vus avec cette méthode simple pour montrer son bien fondé et sentir pourquoi elle est autant utilisée sous des formes variées. Comme il s'agit d'une méthode ancienne, les équations sont écrites avec dimensions (en faisant en fait les approximations de couche limite que nous avons faites proprement). Le problème final 1D obtenu reste avec dimensions.

2 Convection forcée interne, Cas du tuyau

2.1 Vitesse de base

Dans le cas du tuyau, l'écoulement est propice à la méthode, en effet le profil est toujours une parabole pour la vitesse.

$$u = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right) (R^2 - r^2)$$

on reconnaît une dépendance $u = U_e(x)f'(y/\delta(x))$ l'épaisseur caractéristique est $\delta(x) = R$, la vitesse caractéristique $U_e(x) = \frac{R^2}{4\mu}(-\frac{dp}{dx})$ et la "forme" de la vitesse est donc $f'(\eta) = 1 - \eta^2$.

Encore une fois, rappelons l'arbitraire du choix, si $U_e(x) = \frac{R^2}{\mu}(-\frac{dp}{dx})$ on aurait alors pour forme de vitesse $f'(\eta) = (1 - \eta^2)/4$. Bien entendu, le résultat final est indépendant.

2.2 Equation de la chaleur intégrale

L'équation de la chaleur avec dimensions, en tenant compte du fait que les variations en x sont assez lentes, est l'équation de Graetz (ici écrite avec les dimensions) :

$$\rho c_p u \frac{\partial}{\partial x} T = k \frac{\partial}{r \partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} T)$$

on l'écrit de manière intégrée sur toute la section ($\frac{\partial}{\partial r} T|_R$ est le flux à la paroi) :

$$\rho c_p \int_0^R 2\pi r u \frac{\partial}{\partial x} T dr = 2\pi R k \frac{\partial}{\partial r} T|_R$$

La vitesse est celle de Poiseuille, sa forme est en $(1 - (r/R)^2)$, écrite avec la moyenne de la vitesse U_m :

$$u = 2U_m(1 - (r/R)^2), \text{ telle que } \int_0^R 2\pi r u dr = \pi R^2 U_m.$$

Il faut normalement résoudre complètement l'équation de Graetz pour obtenir le champ de température, mais nous allons faire une approximation forte, nous allons supposer que le champ de température a une forme en variables séparées, ce qui revient à dire que la température a toujours la "même forme"

$$T = T_p + (\Delta T)\Theta$$

T_p pourrait dépendre de x et ΔT dépend de x et Θ est une fonction de (r/R) . L'équation intégrée :

$$[\rho c_p U_m \frac{\partial}{\partial x} \Delta T] \int_0^R 2\pi r 2(1 - (r/R)^2)\Theta(r/R) dr = 2\pi R k \Theta'(1)(\Delta T)$$

ou encore, si on a fait apparaître le groupement

$$N = \frac{2\Theta'(1)}{\int_0^1 4\eta(1 - \eta^2)\Theta(\eta) d\eta}$$

qui est un facteur de forme ne dépendant que de la forme exacte du profil de température Θ choisi. Avec N on réécrit l'équation intégrée :

$$\rho c_p \pi R^2 U_m \frac{\partial}{\partial x} \Delta T = N k \pi \Delta T$$

Pour rappel, les approches simples de thermique aiment à faire des bilans sur des quantités moyennes, le bilan d'énergie en 1D s'écrit entre une tranche 1 et 2 (d'épaisseur dx), par une analyse globale :

$$(h_2 - h_1) \frac{dm}{dt} = \frac{dQ}{dt}, \text{ ou aussi, ici } c_p \frac{dm}{dt} (d\Delta T) = -h(T_m - T_p) 2\pi R dx.$$

en remarquant que la différence d'enthalpie $(h_2 - h_1) = \frac{d}{dx}(\Delta T)dx$ et en introduisant le coefficient d'échange h . Or comme $dm/dt = \rho\pi R^2 U_m$ on a donc

$$\rho c_p U_m \pi R^2 \frac{d}{dx} \Delta T = -2\pi R h (\Delta T)$$

on identifie, et on a l'expression entre h , le coefficient d'échange de la vision simplifiée et N :

$$h = \left[\frac{\Theta'(1)}{\int_0^1 2\eta(1-\eta^2)\Theta(\eta)d\eta} \right] \frac{k}{2R}$$

On reconnaît l'expression du $Nu\beta_{elt}$ dans l'expression N , en effet, le $Nu\beta_{elt}$ dans les tuyaux est défini comme le flux divisé par la température moyenne contrairement aux cas de convection externe. Si on connaît exactement la solution numérique du problème (ici Graetz), on a la valeur exacte de $N = 3.65679$, on a donc la valeur du coefficient d'échange associé.

2.3 Solutions "test"

Supposons maintenant que l'on ne connaisse pas le profil exact, mais on sait simplement qu'il passe de 0 au bord à 1 au centre, on peut alors "tester" l'expression de h pour un profil donné qui "ressemble" au vrai profil. Pour respectivement le fondamental de Graetz, le cosinus $J_0(x_0\eta)$ avec x_0 la première racine de J_0 la fonction de Bessel, et la parabole, on trouve

$$N = \frac{\Theta'(1)}{\int_0^1 2\eta(1-\eta^2)\Theta(\eta)d\eta} = 3.65679 \text{ resp. } 4.994 \text{ resp. } 4.18 \text{ resp. } 6$$

les valeurs sont supérieures à la valeur de la solution du mode fondamental 3.65679 car les courbes ont une tangente trop forte à l'origine (le paragraphe suivant nous donnera des solutions plus favorables). On remarque aussi que la "moyenne" est prise au sens de la moyenne avec la vitesse de Poiseuille :

$$\Theta_m = \int_0^1 4\eta(1-\eta^2)\Theta(\eta)d\eta.$$

Néanmoins, on se satisfait car l'ordre de grandeur est suffisant.

2.4 Flux constant

Reprenons l'équation de la chaleur :

$$\rho c_p \int_0^R 2\pi r u \frac{\partial}{\partial x} T dr = 2\pi R k \frac{\partial}{\partial r} T|_R$$

Si on travaille à flux constant q_p est constant, or $q_p = -k \frac{\partial}{\partial r} T|_R$

$$\rho c_p \int_0^R 2\pi r u \frac{\partial}{\partial x} T dr = -2\pi R q_p$$

comme $u(r)$ et q_p est constant, il est vraisemblable que la température croît linéairement en x , ce qui donne la dérivée en x constante compatible avec cette équation. On peut imaginer qu'elle s'écrit

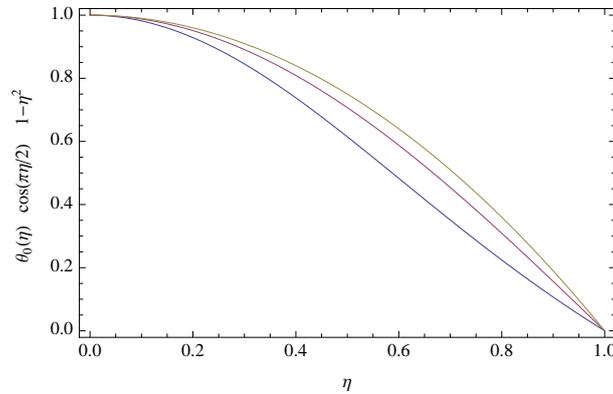


FIGURE 1 – Différents profils possibles testés pour le tuyau, de bas en haut : le mode fondamental de solution de Graetz (malheureusement un peu trop incurvé et droit), un cosinus et une parabole.

$T = T_p(x) + (\Delta T)\Theta(r/R)$, avec $\frac{\partial}{\partial x}T = \frac{dT_p(x)}{dx} = q_x = cst$ et avec (ΔT) constant. Cela nous permet de simplifier la partie convective de l'équation de la chaleur

$$\rho c_p 2U_m (1 - (r/R)^2) \frac{dT_p(x)}{dx} = k \frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} T \right)$$

donc on trouve la température dans le tuyau

$$(\Delta T)\Theta = \rho c_p U_m \frac{dT_p(x)}{dx} \left(-\frac{3}{8} + \frac{(r/R)^2}{2} - \frac{(r/R)^4}{8} \right)$$

or on travaille à flux constant $q_p = -k \frac{\partial}{\partial r} T|_R = -k \rho c_p U_m \frac{dT_p(x)}{dx} \frac{1}{2}$

$$\frac{dT_p}{dx} = \frac{2q_p}{\rho c_p k U_m R}$$

la température croît linéairement avec x

$$T_p = \frac{2q_p}{\rho c_p k U_m R} x + T_0$$

on a alors l'expression de la température finale en fonction du flux imposé

$$T(x, r) = T_p(x) - \frac{q_p R}{k} \left(\frac{3}{4} - \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{4R^4} \right)$$

d'où une température moyenne (avec la moyenne pondérée de Poiseuille) :

$$T_m = \frac{1}{\pi U_m R^2} \int_0^R 2\pi r (2U_m (1 - (r/R)^2)) T(x, r) dr$$

qui croît avec x

$$T_m = T_p - \frac{11q_p R}{24k}$$

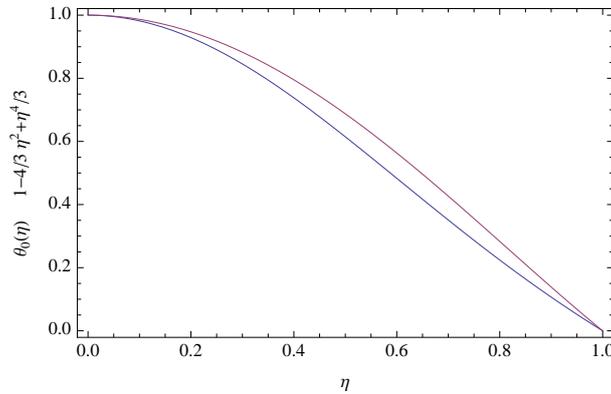


FIGURE 2 – le mode fondamental de solution de Graetz (courbe inférieure), comparé à la solution à flux constant (courbe supérieure).

et comme par définition $q_p = h(T_p - T_m)$,

$$h = \frac{48}{11} \frac{k}{D} = 4.36 \frac{k}{D}$$

le coefficient est un peu plus élevé dans le cas à flux constant (que dans le cas à température constante : 3.66).

$$T(x, r) = T_p(x) + (T_m - T_p) \frac{24}{11} \left(-\frac{3}{4} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r^4}{4R^4} \right)$$

Retenons que dans le cas à flux constant, on a une solution exacte pour le problème de Graetz. Elle se décompose en une partie linéaire en x , qui augmente le long du tube plus une forme polynomiale du rayon.

3 Relations Intégrales pour la dynamique

3.1 Définition de l'épaisseur de déplacement

Les équations de couche limite sont des EDP 2D qui sont assez difficiles à résoudre. Mais souvent on trouve une solution autosemblable : le profil de vitesse a une forme unique qui est ensuite distendue par une épaisseur au fil de la résolution. Nous présentons donc l'équation de Von Kármán-Pohlhausen (1921) qui consiste à écrire uniquement la dépendance globale entre \bar{u}_e et l'épaisseur (dite de déplacement δ_1) en supposant que tous les profils sont presque similaires. Cette épaisseur a une signification physique.

Pour définir δ_1 , on sait que $u = \partial\psi/\partial y$ et que ψ représente le flux à travers une surface. Le flux à travers une hauteur \mathcal{H} est donc par définition

$$\psi = \int_0^{\mathcal{H}} u dy$$

on décompose en utilisant le profil de fluide parfait u_e qui est constant à l'échelle de la couche limite

$$\psi = \int_0^{\mathcal{H}} u dy = \int_0^{\mathcal{H}} (u - u_e) dy + \int_0^{\mathcal{H}} u_e dy$$

or $\int_0^{\mathcal{H}} u_e dy = \mathcal{H} u_e$, on en déduit que l'on peut définir une quantité intégrale notée δ_1 telle que, puisque l'on suppose que \mathcal{H} assez grand pour le changer en ∞ .

$$\psi = \int_0^{\mathcal{H}} u dy = (\mathcal{H} - \delta_1) u_e, \text{ avec } \delta_1 u_e = \int_0^{\infty} (u_e - u) dy$$

le flux du profil effectif est le même que celui d'un profil plat (profil de "type fluide parfait") mais déplacé d'une petite hauteur δ_1

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

C'est ainsi que l'on définit l'épaisseur de déplacement δ_1 , c'est la distance à laquelle il faut déplacer un mur fictif pour que l'écoulement de fluide parfait associé soit exactement le même du point de vue du flux de masse.

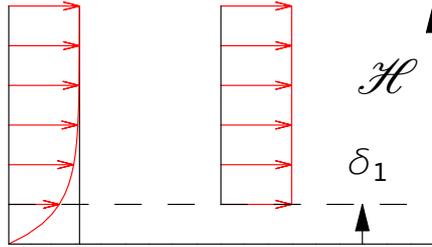


FIGURE 3 – Le flux de masse est le même dans la couche limite et dans une couche équivalente de fluide parfait déplacée de $\tilde{\delta}_1$.

3.2 Équation integrale de Von Kármán

Nous partons des équations de Prandtl dans le cas 2 D Plan, écrites en variables adimensionnées . Nous allons établir les équations intégrales en réécrivant le terme de dérivée totale $\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}$ sous la forme conservative, puis on soustrait $\partial_{\tilde{x}}(\tilde{u}\tilde{u}_e) = \tilde{u}\partial_{\tilde{x}}(\tilde{u}_e) - \tilde{u}_e\partial_{\tilde{y}}\tilde{v}$ l'équation du momentum :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{u}\tilde{u}_e - \tilde{u}^2) + (\tilde{u}_e - \tilde{u})\frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}(\tilde{v}(\tilde{u} - \tilde{u}_e)) = -\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

On change de signe et on intègre de la paroi à ∞ . Cette dernière intégration se fait sans problèmes car u a le bon goût de tendre vers u_e , donc $v(u - u_e)$ tend vers 0 en ∞ (en effet $v(x, \infty)$ n'est ni nul ni même borné dans le cas général, en revanche $(u - u_e)$ décroît plus vite vers 0 que $v(x, y)$ n'augmente

à l'infini). D'autre part le domaine est fixe (pas de borne du genre $Y(x)$). On définit l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur d'énergie et H est le facteur de forme qui est le rapport δ_1/δ_2

$$\tilde{\delta}_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\tilde{u}}{\bar{u}_e}\right) d\tilde{y}, \quad \tilde{\delta}_2 = \int_0^\infty \frac{\tilde{u}}{\bar{u}_e} \left(1 - \frac{\tilde{u}}{\bar{u}_e}\right) d\tilde{y} \quad \text{et} \quad H = \frac{\tilde{\delta}_1}{\tilde{\delta}_2},$$

Par la suite, on verra qu'il est judicieux de définir un coefficient appelé coefficient de frottement f_2 tel que par définition : $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = f_2 \frac{H \bar{u}_e}{\tilde{\delta}_1}$ Notre forme favorite qui lie l'épaisseur de déplacement à la vitesse à la lisière de la couche limite est l'équation de Kármán :

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{\tilde{\delta}_1}{H} \right) + \frac{\tilde{\delta}_1}{\bar{u}_e} \left(1 + \frac{2}{H} \right) \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}} = \frac{f_2 H}{\tilde{\delta}_1 \bar{u}_e}, \quad \text{i.e.} \quad \tilde{\delta}_1 = F(\bar{u}_e), \quad (1)$$

cette ODE lie les variations de δ_1 et u_e sachant que H et f_2 sont des fonctions (pour l'instant inconnues) de δ_1 et u_e

On peut donc résoudre en partant d'une condition initiale, par exemple $\tilde{\delta}_1(0) = 0$ (la valeur de Hiemenz pourrait aussi être une bonne idée) et $\bar{u}_e(0)$ (donnée). Ensuite, $\tilde{\delta}_1$ est obtenu par la connaissance de \bar{u}_e , on écrit formellement $\tilde{\delta}_1 = F(\bar{u}_e)$.

remarque

Avant de passer à des fermetures plus subtiles, regardons le cas de la plaque plane Si la vitesse u_e est constante (=1), et que l'on suppose les coefficients constants :

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{\tilde{\delta}_1}{H} \right) = \frac{f_2 H}{\tilde{\delta}_1 \bar{u}_e},$$

s'intègre en

$$\delta_1 = \sqrt{2f_2 H_0} x^{1/2}$$

la couche limite est alors bien en racine de x , le coefficient dépend des paramètres du modèle.

On va donc essayer d'estimer f_2 et H en se donnant des profils *a priori* en espérant que les valeurs ne seront pas trop loin de $f_2 = 0.22$ et $H_0 = 2.59$ (valeurs de Blasius) qui permettent de retrouver la couche limite de Blasius en $1.7(x)^{1/2}$.

3.3 Fermeture

Pour fixer les idées commençons par une "fermeture" simple et classique. Les équations dépendent de deux paramètres f_2 et H qui sont inconnus pour l'instant. Il dépendent en fait de la forme exacte du profil. Le profil est cherché sous la forme d'un polynôme, u passant de 0 à la paroi à u_e loin à une distance spéciale notée δ . Ce δ n'est pas la jauge L/\sqrt{R} , c'est une valeur précise "fois" cette jauge. Cette idée permet de réconcilier les développements asymptotiques et une démarche plus classique, ce δ peut être interprété comme la valeur de η telle que $f' = 0.99$ ou 0.999, etc.. Cette valeur du problème asymptotique est ensuite multipliée par la valeur de L/\sqrt{R} pour une valeur finie de R ... Ce polynôme doit respecter l'adhérence, et la valeur limite que l'on impose en $\delta : u = u_e$. Ce sont les seules conditions "naturelles". On impose ensuite autant de $\partial u/\partial y = 0$ en $y = \delta$ qu'il le faut (attention,

ça n'est pas physique! En effet il s'agit d'extensions de la vraie condition $\partial u/\partial y = 0$ à l'infini) par exemple à l'ordre 4, on pose $\eta = y/\delta$.

$$u/u_e = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4.$$

en $\eta=1$, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$

en $\eta=0$, $a_0 = 0$

en $\eta=1$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0$

La bonne condition est ensuite de prendre en $\eta=0$

$$0 = -\partial_x p + \partial_y^2 u|_0$$

Par exemple lorsque le gradient de pression est nul on retrouve Blasius approché par :

$$\tilde{u} = 1 - (1 + \eta)(1 - \eta)^3, \quad \tilde{\delta}_1 = .3\tilde{\delta}, \quad \tilde{\delta}_1/\tilde{\delta}_2 = 2.55$$

Si maintenant on autorise un gradient de pression, la relation de la dérivée seconde à la paroi fait apparaître un coefficient Λ qui est un paramètre caractéristique du gradient de pression : $\Lambda = \delta^2 \frac{du_e}{dx}$, et le profil de vitesse aura la forme :

$$u/u_e = 1 - (1 - \eta)^3(1 + (1 - 1/6\Lambda)\eta)$$

Si on se donne ce profil (que l'on appelle "Pohlhausen ordre 4"), on en déduit les épaisseurs :

$$\delta_1/\delta = (36 - \Lambda)/120; \quad \delta_2/\delta = 37/315 - \Lambda/945 - (\Lambda^2)/9072,$$

et le facteur de forme $H = ((36 - \Lambda)/120)/(37/315 - \Lambda/945 - (\Lambda^2)/9072)$, la valeur en Puis le frottement donne :

$$f_2 = (2 + \Lambda/6)(37/315 - \Lambda/945 - \Lambda^2/9072);$$

Valeurs à gradient de pression nul : $f_2 = 74/315 = 0.234921$ et $H(0) = 189/74 = 2.5540540$ est proche de celle de Blasius ($H_B = 2.59$ et $0.22 = 0.332 * 1.721/2.59$).

on a ainsi $\delta_1 = \sqrt{2f_2} H = 9\sqrt{7/185} = 1.75068$

le frottement à la paroi est $H f_2/\delta_1 = (1/3)\sqrt{37/35} = 0.342725$

et l'épaisseur physique de Pohlhausen $\delta = 120/36\delta_1 = 6\sqrt{35/37} = 5.83559$

Cette démarche est complètement classique.

3.4 Fermeture avec δ_1

Mais, ici nous dévions des ouvrages tels que Cousteix ou Schlichting. En effet, selon leur approche, le paramètre naturel est bien Λ , et δ_2 qui s'introduisent naturellement. On préfère en effet, pour notre part, exprimer H en fonction de Λ_1 (construit sur δ_1) plutôt que Λ (construit sur δ). Pourquoi? Car δ_1 est la quantité physique qui apparaît l'on fait du couplage fluide parfait couche limite (c'est l'épaisseur de déplacement). Puis on préfère exprimer f_2 en fonction de H (ce qui en revanche est plus classique). Les auteurs préfèrent utiliser δ_2 car il est directement relié au frottement... H en fonction de Λ_1 a

la forme sur la figure 4 gauche. Par définition $\Lambda_1 = \Lambda \delta_1^2$, après manipulation (le plus simple est de substituer le développement Λ_1 en fonction de Λ au premier ordre : $\Lambda = 100/9\Lambda_1$. D'où :

$$H = (36 - (100\Lambda_1)/9)/(120(37/315 - (20\Lambda_1)/1701 - (625\Lambda_1^2)/45927))$$

on trace H en fonction de Λ_1 (les points sont les valeurs issues de Falkner Skan, voir plus loin), puis f_2 en fonction de H (figure 4).

3.5 Fermeture de Falkner Skan

Oublions la fermeture de Pohlhausen et retournons aux équations intégrales. Les équations dépendent de deux paramètres f_2 et H qui sont inconnus pour l'instant. Cherchons une autre famille de profils pour calculer les coefficients f_2 et H . On utilise les valeurs calculées à partir des équations de Falkner Skan (généralisation de Blasius au cas de l'écoulement contre un angle d'ouverture $\beta\pi$) :

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0,$$

Pour chaque paramètre $\beta = (2n)/(n+1)$ (où n est l'exposant de la vitesse extérieure $U_e = x^n$) on peut calculer $\Delta_1 = \int_0^\infty (1 - f'(\eta))d\eta$ (et donc $\delta_1 = \Delta_1 x^{(1-n)/2}$, puis l'épaisseur de quantité de mouvement, donc H et enfin avec la valeur du frottement $f''(0)$ on a f_2 , le tout en fonction de n .

Le lien de n et Λ_1 est $\Lambda_1 = \delta_1^2(dU_e/dx)$, donc $\Lambda_1 = n\Delta_1^2$ (les puissances de x ont le bon goût de disparaître) donc, sur la figure 4 on trace le facteur de forme H en fonction de Λ_1 le paramètre de gradient de vitesse.

Cette courbe est interpolée par : $H = 2.5541 * exp(-\Lambda_1/6.)$ et si $\Lambda_1 > 0.606$ alors $H=2.069$. On a déjà tracé f_2 fonction de H . Cette courbe est interpolée par $f_2 = .2349(-4/H + 16/H/H)$

En pratique, pour résoudre Von Kármán, on se donne la vitesse extérieure U_e . On peut en déduire un n local $n = (dU_e/dx)(x/U_e)$, et donc trouver f_2 et H .

3.6 Fit pratique

Au final l'équation de Kármán (1) se lit :

$$\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\tilde{\delta}_1}{H}\right) + \frac{\tilde{\delta}_1}{\bar{u}_e}\left(1 + \frac{2}{H}\right)\frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}} = \frac{f_2 H}{\tilde{\delta}_1 \bar{u}_e},$$

pour résoudre cette équation, on a besoin des relations de fermeture entre H et f_2 . On pose $\Lambda_1 = \tilde{\delta}_1^2 \frac{d\bar{u}_e}{d\bar{x}}$, la fermeture (issue de Falkner Skan, mais en fait très proche de Pohlhausen) est

$$H = \left\{ \begin{array}{ll} 2.5905e^{-0.37098\Lambda_1} & \text{if } \Lambda_1 < 0.6 \\ 2.074 & \text{if } \Lambda_1 > 0.6 \end{array} \right\}, \quad f_2 = 1.05(-H^{-1} + 4H^{-2}).$$

On a alors une équation différentielle de premier ordre à résoudre! Connaissant U_e , on intègre en fait $d\delta_1/dx = F(\delta_1, U_e)$. On obtient à U_e donnée la distribution de δ_1 et de frottement à la paroi. La première quantité δ_1 s'interprète comme un épaississement de la paroi, qui entraîne une modification de l'écoulement de fluide parfait au second ordre. La second est le frottement qui permet de calculer la traînée du profil. On calcule ensuite la distribution de température (ou de flux). Ce type de simplification marche remarquablement bien. Une autre fermeture possible consiste à se donner des profils en polynômes (profils de Pohlhausen), mais ils sont moins bons et surestiment la séparation de la couche limite.

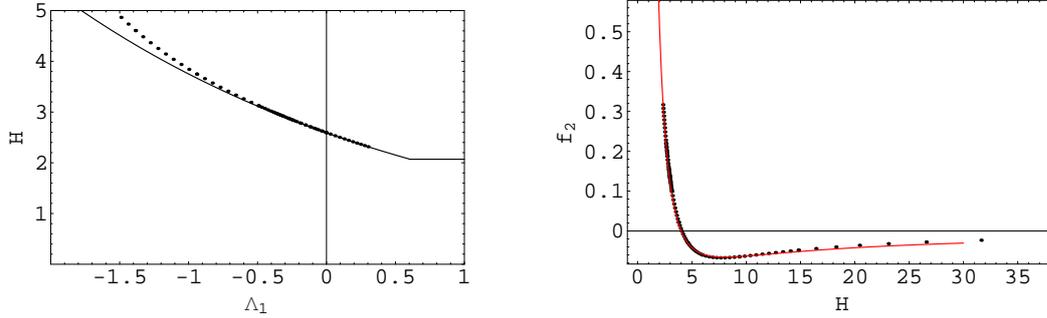


FIGURE 4 – H de Falkner Skan, en gras on a superposé une forme *ad hoc* $2.5541\exp(-\Lambda_1/6.)$ Fottement réduit f_2 en fonction du facteur de forme H , Les points et la courbe sont les résultats du paragraphe suivant où on utilise les profils de Falkner Skan.

3.7 Equation de continuité pour le couplage

Nous venons de voir que l'on peut calculer l'épaisseur de déplacement δ_1 en fonction de U_e , nous avons vu auparavant l'interprétation de δ_1 en temps qu'épaisseur qui permet la conservation du flux. Reprenons ce point de vue de manière un peu différente. On intègre l'équation de conservation de la masse transversalement. L'équation de continuité en variables de couche limite est intégrée de 0 à une épaisseur y pouvant dépendre de x (pour le plaisir de compliquer), d'où, grâce à la règle de Leibnitz sur les dérivations d'intégrales (y' variable muette d'intégration) :

$$v(y) = - \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} u dy' = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy' + u(y) \frac{dy(x)}{dx}$$

par addition et soustraction de $d(yU_e)/dx$:

$$v(y) = - \frac{\partial}{\partial x} [U_e \int_0^y (1 - \frac{u}{U_e}) dy' + (u(y) - U_e) \frac{dy}{dx} - y \frac{d}{dx} U_e].$$

La démarche asymptotique consiste à faire tendre Y vers l'infini, le premier terme du RHS s'identifie alors à $d(\delta_1 U_e)/dx$, le second est nul par raccord. On obtient ainsi le comportement de la vitesse transverse pour y grand :

$$v(y) \simeq \frac{d}{dx} (\delta_1 U_e) - y \frac{d}{dx} U_e,$$

cette vitesse se raccorde ensuite exactement à la vitesse de fluide parfait pour $y_{fp} \rightarrow 0$, la relation entre y_{fp} (la variable transverse de fluide parfait) et y la variable transverse interne de couche limite étant $y_{fp} = y Re^{-1/2}$, la vitesse transverse de fluide parfait a pour développement de Taylor :

$$v_{fp}(x, y_{fp}) = v_{fp}(x, 0) + y_{fp} \frac{\partial}{\partial y_{fp}} v_{fp}(x, 0) + \dots$$

comme $\frac{\partial v_{fp}}{\partial y_{fp}}(x, 0) = - \frac{d}{dx} U_e$, on a :

$$v_{fp}(x, y_{fp}) = v_{fp}(x, 0) - y_{fp} \frac{d}{dx} U_e + \dots$$

On réécrit l'expression $v(y)$ en variable de fluide parfait, il faut donc multiplier $v(y)$ par sa jauge $(Re)^{-1/2}$:

$$(Re)^{-1/2}v(y) \simeq Re^{-1/2} \frac{d}{dx}(\delta_1 U_e) - yRe^{-1/2}(Re) \frac{d}{dx}U_e.$$

On reconnaît $y_{fp} = y(Re)^{-1/2}$, on en déduit que l'épaississement de l'épaisseur de couche limite se traduit par la vitesse de transpiration pour le fluide parfait :

$$v_{fp}(x, 0) = Re^{-1/2} \frac{d}{dx}(\delta_1 U_e)$$

cette vitesse de transpiration provoquant un effet de second ordre de couche limite : le fluide parfait est perturbé à l'ordre $(Re)^{-1/2}$:

4 Application à l'équation de la chaleur : Convection forcée

4.1 Convection forcée

Soit Θ la température adimensionnée par rapport à la valeur à la paroi (i.e. : Θ vaut 0 à la paroi et Θ tend vers 1 en ∞) :

$$T(x, y) = T_w + (T_\infty - T_w)\Theta(x, y),$$

$T_w(x)$ est la fonction adimensionnée qui décrit la distribution de la température de paroi (si la température est constante $T_w(x) = 1$). On va établir l'équation d'épaisseur thermique. De même en réécrivant la dérivée totale de la température sous la forme conservative, l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Si on définit une épaisseur thermique :

$$\delta_\Theta = \int_0^\infty \frac{(u\Theta)}{U_e} dy$$

et on peut définir un facteur de forme thermique $H_\Theta = \delta_\Theta/\delta_1$: on a donc

$$\frac{d}{dx} \left(U_e \frac{\delta_1}{H} T_w \right) = - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \Theta(y=0) T_w$$

Le problème est alors résolu, en effet on connaît δ_1 et U_e . On impose ensuite : - soit $T_w(x)$ et par dérivation on obtient le flux réduit à la paroi $\frac{\partial}{\partial y} \Theta(y=0)$ - soit le flux réduit à la paroi $\Theta(y=0)$ et par intégration on en déduit la distribution de température à la paroi $T_w(x)$.

4.2 Exemple de la plaque plane.

Pour la partie thermique, partons du cas de la plaque plane sans gradient de pression à $Pr = 1$, soit $T_w(x) = 1$, or $\delta_1 = \sqrt{f_2 H x^{1/2}} = 1.75x^{1/2}$ on en déduit que le flux est $0.31x^{-1/2}$. or la valeur exacte de Blasius est 0.332

Soit on se donne le flux à la paroi $\frac{\partial}{\partial y} \Theta(y=0) = -1$, donc $T_x \delta_1 \sim x$ on en déduit que la température croît en $1.8x^{-1/2}$. (on avait trouvé 2.2)

Ces deux comportements obtenus avec cette méthode approchée sont cependant bien ceux que nous avons calculés pour la plaque plane avec la solution de couche limite.

4.3 Nombre de Stanton.

Le membre de droite (qui est le flux pariétal divisé par Pr) peut aussi s'écrire :

$$\frac{q_w}{\rho c_p (T_w - T_\infty)} = St_x U_e$$

On définit ainsi le nombre de Stanton comme le rapport entre le flux à la paroi et un débit de chaleur convectée, et on a :

$$St = Nu/Pr/Re_x$$

L'analogie de Reynolds consiste à étendre le cas de la plaque plane à $Pr = 1$ à tous les écoulements. Or pour la plaque plane $Nu = Re C_f/2$, donc le nombre de Stanton est proportionnel au frottement local $St = C_f/2$. Connaissant le frottement on a donc rapidement un ordre de grandeur du flux à la paroi.

5 Application à l'équation de la chaleur : Convection Naturelle

5.1 Convection Libre

Dans le cas de la convection libre, on peut aussi appliquer la méthode, mais il faut changer la forme de la vitesse puisque celle ci part de 0, augmente puis diminue pour s'annuler à l'infini.

Les équations de convection naturelle sur une plaque plane en posant :

$$x = L\bar{x}, \quad y = LG^{-1/4}\tilde{y}, \quad u = (Lg\alpha\Delta T)^{1/2}\tilde{u} \text{ etc}$$

sont, comme nous l'avons déjà vu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{T}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\tilde{u}(\bar{x}, 0) = \tilde{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \tilde{T}(\bar{x}, 0) = 1, \quad \text{et} \quad \tilde{u}(\bar{x}, \infty) = 0, \quad \tilde{T}(\bar{x}, \infty) = 0.$$

(Note, on aurait pu directement en partant du système sans dimension et en posant $\tilde{y} = y/\epsilon$ trouver que $\epsilon = G^{-1/4}$).

5.1.1 Solutions semblables

L'analyse de l'adimensionnement fait double emploi : si L est changé en LL^* , on voit qu'alors δ est changé en : $\delta L^{*(1-3/4)} = \delta L^{*1/4}$, ce qui conduit à la variable de similitude $\eta = \frac{\tilde{y}}{\bar{x}^{1/4}}$, et la forme suivante pour la fonction de courant et la température :

$$\psi = \bar{x}^{3/4} f(\eta) \text{ et } \tilde{T} = g(\eta),$$

On pose pour les variables de similitude :

$$\xi = \bar{x}, \quad \eta = \tilde{y}/\bar{x}^{1/4} \text{ et donc } \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{4\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\xi^{1/4}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

ce qui fournit les vitesses

$$\tilde{u} = \xi^{1/2} f'(\eta), \quad \tilde{v} = \frac{1}{4\xi^{1/4}} (\eta f' - 3f)$$

donc

$$\tilde{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \xi^{1/2} f' \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{3}{4\xi^{1/2}} f \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{1}{\xi^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

on regroupant tout, le problème autosemblable est :

$$4f''' + 3ff'' - 2f'^2 + 4g = 0;$$

$$4g'' + 3Prfg' = 0;$$

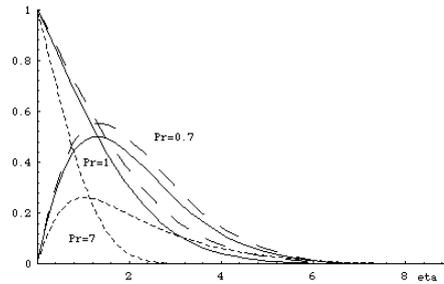


FIGURE 5 – Solution semblable pour différents Pr .

La résolution par une méthode de tir donne :

pour $Pr=0.7$, $f''(0) = 0.9571$, $g'(0) = -0.3534$

pour $Pr=1.$, $f''(0) = 0.9069$, $g'(0) = -0.4008$

pour $Pr=7.$, $f''(0) = 0.6371$, $g'(0) = -0.7450$

Sur la figure suivante on représente les profils de f' et de g en fonction de η pour ces 3 nombres de Prandtl représentatifs.

5.1.2 Solutions intégrale

Pour résoudre sous forme intégrale, par exemple on peut se donner

$$u = f(y/\delta(x))u_0(x), \quad \theta = g(y/\delta(x))$$

on a alors pour $Pr = 1$

$$\left(\int_0^\infty f(\eta)^2 d\eta \right) \frac{d}{dx} (u_0(x)^2 \delta(x)) = -\frac{f'(0)u_0(x)}{\delta(x)} + \delta(x) \int_0^\infty g(\eta) d\eta$$

$$\left(\int_0^\infty f(\eta)g(\eta) d\eta \right) \frac{d}{dx} (u_0(x)\delta(x)) = -\frac{g'(0)}{\delta(x)}$$

On voit alors que si l'on cherche une solution en $U_0 x^m$ pour u_0 et en $D_0 x^n$ pour δ , on a pour l'équation de quantité de mouvement $2m + n - 1 = m - n = n$ donc $m = 2n$ et $m = 1/2$ et $n = 1/4$. Pour l'équation de la chaleur, $m + n - 1 = -n$ soit $m = 1 - 2n$ qui est bien vérifié pour $m = 1/2$ et $n = 1/4$. La vitesse est bien en $x^{1/2}$ et l'épaisseur en $x^{1/4}$ comme déjà vu dans la solution autosemblable.

Si on se donne maintenant une forme spéciale, par exemple

$$g(\eta) = e^{-\eta} \quad f(\eta) = \eta e^{-\eta}$$

alors, on peut calculer les intégrales

$$\left(\int_0^\infty f(\eta)g(\eta) d\eta \right) = 1/4 \quad \text{et} \quad \left(\int_0^\infty f^2(\eta) d\eta \right) = 1/4$$

on trouve en suite $D_0 = \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{U_0}}$ puis comme l'équation de mouvement donne

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}U_0^{3/2} + \frac{5U_0^{3/2}}{4\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{U_0}}$$

on trouve $U_0 = \sqrt{2}$ et enfin

$$u_0(x) = \sqrt{2}x^{1/2} \quad \delta(x) = \frac{2 \cdot 2^{3/4}}{\sqrt{3}}x^{1/4}$$

Numériquement on en déduit le frottement $u_0(x)/\delta(x) = 0.72x^{1/4}$ et le flux à la paroi $1/\delta(x) = 0.515x^{-1/4}$. On retrouve donc l'ordre de grandeur correct (c.f. résultat du paragraphe précédent à $Pr = 1$).

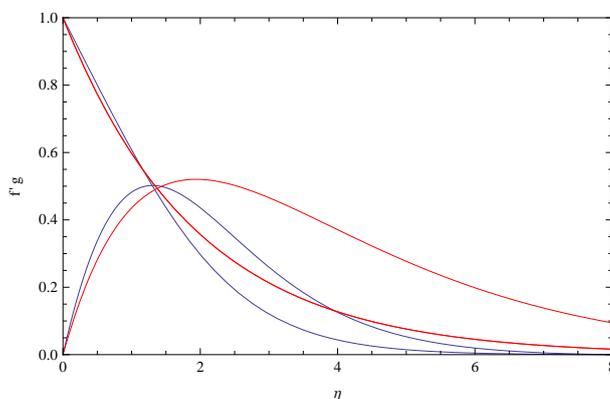


FIGURE 6 – Bleu solution semblable, rouge solution simplifiée.

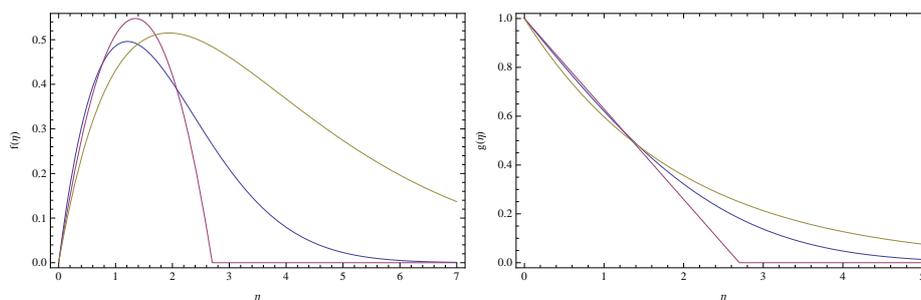


FIGURE 7 – Gauche vitesse $\eta e^{-\eta}$, $\eta(e^{-\eta^2}/\sqrt{\pi} - \eta \operatorname{erfc}(\eta))$ et $\eta(1 - \eta)$. Droite température profil $e^{-\eta}$, $\operatorname{erfc}(\eta)$, et $1 - \eta$. Tous sont tracés en $x = 1$ en fonction de $\eta = y/\delta$ (avec $\delta = \frac{2\sqrt[4]{4\sqrt{2}-5}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$, $\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}$ et $2\sqrt[4]{\frac{10}{3}}$). On note le bon accord global suffisant. On a un $g'(0) = 0.35745$ 0.51 et 0.37

6 Méthodes Intégrales turbulentes :

6.1 Equation de continuité, turbulent

Les méthodes intégrales turbulentes sont moins "rigoureuses" qu'en laminaire, au lieu de faire tendre y vers l'infini et de raccorder avec la solution à la paroi de fluide parfait, elle prennent par exemple pour y la valeur telle que $u(y) = 0.99U_e$, cette valeur de y étant ensuite notée δ !! On intègre les équations transversalement, mais la démarche est cependant légèrement différente du cas laminaire car on ne fait pas intervenir δ_1 mais on introduit une relation supplémentaire. En reprenant l'équation

$$v(y) = -\frac{\partial}{\partial x} [U_e \int_0^y (1 - \frac{u}{U_e}) dy' + (u(y) - U_e) \frac{dy}{dx} - y \frac{d}{dx} U_e,$$

et remplaçant y par δ on fait encore apparaître δ_1 , on admet $u(\delta) - U_e \simeq 0$, on ajoute membre à membre $-U_e \frac{d}{dx} \delta_1$ et on écrit :

$$v(\delta) - \frac{d\delta}{dx} U_e = -\frac{d}{dx} ((\delta_1 - \delta) U_e).$$

on pose finalement

$$C_E = \frac{d\delta}{dx} - \frac{v}{U_e}$$

que l'on appelle coefficient d'entraînement. Ce serait le taux d'entrée du fluide parfait dans la couche limite, ce qui est une vision peu asymptotique des choses! Cette méthode est due à Head (1958).

6.2 Equation de quantité de mouvement

Elle est intégrée transversalement après avoir réécrit la dérivée totale de u sous forme conservative et avoir soustrait l'équation de la vitesse de fluide parfait écrite à la paroi pour faire disparaître le gradient de pression. Notons qu'ici les équations sont écrites abusivement avec les dimensions et en ayant enlevé les termes négligeables. On intègre de 0 à ∞ le terme :

$$\mu \partial < u > / \partial y - < u'v' >$$

donc, il ne reste que $\rho u^{*2} = C_f U_e^2 / 2$. On définit : $\delta_1 = \int_0^\infty (1 - u/U_e) dy$ et $\delta_2 = \int_0^\infty (u/U_e)(1 - u/U_e) dy$ et soit H le facteur de forme, le rapport δ_1/δ_2 . d'où :

$$\frac{d}{dx} (\delta_2 U_e^2 + (\delta_1) U_e \frac{d}{dx} U_e = \frac{C_f}{2} U_e^2.$$

On peut l'écrire aussi sous la forme :

$$\frac{d}{dx} \delta_2 = \frac{C_f}{2} U_e^2 - \delta_2 (H + 2) \frac{1}{U_e} \frac{d}{dx} U_e$$

6.3 Les équations de Head Von Kármán

Au final :

$$\frac{d}{dx}(\delta - \delta_1) = C_E \frac{\delta - \delta_1}{U_e} \frac{d}{dx} U_e$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta_1}{H} \right) = \frac{C_f}{2} U_e^2 - \left(1 + \frac{2}{H} \right) \frac{\delta_1}{U_e} \frac{d}{dx} U_e$$

Sachant que $H^* = (\delta - \delta_1)/\delta_2$ est fonction de H et C_E fonction de H^* et C_f fonction de Re et H , fonctions à déterminer...

6.4 Fermetures turbulente

La loi pratique classique qui marche bien est tout simplement de prendre un profil de vitesse de la forme $u/U_e = (y/\delta)^{1/7}$ après calcul, on trouve :

$$\delta_1/\delta = 1/8, \quad \delta_2/\delta = 7(1+7)(2+7) \text{ et } H = 9/7$$

Blasius a établi expérimentalement dans le cas de la plaque plane une loi liant C_f et R_δ :

$$C_f = 0.0456 R_\delta^{1/4}$$

partant de cette expression, des équations de Head Von Kármán et du profil précédent, on peut calculer :

$$C_f/2 = \frac{0.0086}{R_{\delta_2}^{1/5}}$$

$$H = 1.3$$

ou encore : $c_f = 0.0592 R_x^{-1/5}$ pour $5 \cdot 10^5 < R_x < 10^7$ ce qui donne : $\delta = 0.37 x R_x^{-1/5}$, et $\delta_1/x = 0.0477 R_x^{-1/5}$.

6.5 Méthode pratique de calcul de type intégral

On remplace les fermetures dans l'équation de Von Kármán, la vitesse u_e de fluide parfait est connue, on en déduit l'épaisseur de couche limite...

7 Conclusion

Les équations intégrales mettent en relief la quantité importante qu'est l'épaisseur de déplacement, elles sont assez précises car en fait la physique de l'écoulement a été assez finement modélisée par les facteurs de formes. Ces méthodes sont très utiles car rapides. Elles sont utilisées couramment en aérodynamique où l'écoulement autour d'un avion complet ne peut encore être calculé que par ce type de méthodes si on veut faire varier la géométrie. Notons que la prise en compte de la séparation de la couche limite peut être facilement calculée avec ces méthodes.

Ce type de modélisation intégrale est très utilisée pour les calculs d'écoulements en rivières et dans les océans, il s'agit alors des équations de Saint Venant.

Bibliographie¹

- T. Cebeci & J. Cousteix (1999) "Modeling and computation of boundary layer flows", Springer.
H. Gersten & H. Herwig (1992) "Strömungsmechanik" Ed. Viewig.
André Giovannini Benoît Bédard "Transfert de Chaleur" Cépaduès" 2012
P.-Y. Lagrée, cours ENSTA, Méthode intégrales
H. Schlichting (1987) "Boundary layer theory" Mac Graw Hill.
B. Finlayson (1972) "The method of weight residuals and variational principles, with applications in mechanics and heat and mass transfer", AP 72

1. v 28 janvier 2015, cours complet sur <http://www.ida.upmc.fr/~lagree/COURS/ENSTA>

page blanche