

4. "Convection Libre" ou "Convection Naturelle"

Résumé

La "Convection Libre" (*Free Convection*), ou "Convection Naturelle" (*Natural Convection*; *freie oder natürliche Konvektion*; *convezione naturale*; *convecção natural*) est le régime d'écoulement obtenu lorsque l'on chauffe un fluide sans qu'il n'y ait d'écoulement "extérieur" imposé. Cet écoulement est inexplicable dans le cadre précédent car aucun mouvement ne serait possible de par le découplage entre les équations de la dynamique et de la thermique. Pour lever ce paradoxe, on tient compte d'un phénomène que l'on avait négligé : la légère dilatabilité du fluide. C'est donc la force d'Archimède provoquée par les variations de densité induites par le chauffage qui fait se déplacer le fluide. La "thermique" et la "dynamique" sont alors très fortement couplées.

Nous allons donc discuter cette approximation dite "de Boussinesq" (~1872) et établir les équations afférentes. Nous introduirons le nombre sans dimension de la convection naturelle, le Grashof. Nous examinerons le problème classique de l'écoulement le long d'une plaque plane créé par son chauffage. Puis nous dirons un mot sur le problème fondamental de Rayleigh Bénard : le passage d'un régime de conduction à un régime de convection lorsqu'un nombre sans dimension passe un certain seuil (il s'agit en fait d'une introduction à la stabilité hydrodynamique).

4.1. équations du problème.

4.1.1. Variations de ρ

A priori ρ la densité est fonction de la température et de la pression par la loi d'état (pour un gaz mais aussi pour un liquide). Il est donc naturel de penser que si l'on chauffe une paroi, la température du fluide environnant augmente par diffusion. La stratification de pression s'en trouve changée, le gradient de pression crée le mouvement.

Dans le cours nous avons jusqu'à présent négligé toute variation de ρ . Cela permettait de découpler les équations : la "thermique" ne rétroagissait pas sur la "dynamique". Manifestement, le découplage n'est plus valable ici puisque c'est le chauffage qui provoque le mouvement. On va donc permettre une variation de la densité avec le chauffage en supposant cependant que cette perturbation est petite. Il faut donc ici réintroduire une variation de ρ autour d'une position d'équilibre : le repos. En revanche la viscosité reste toujours constante.

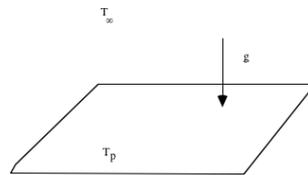


FIGURE 1 – plaque, dans un champ de pesanteur, soumise à une température différente de son environnement. Il n'y a pas d'écoulement imposé.

Soit donc un fluide au repos et à la température T_∞ au loin, il est en présence d'une paroi chauffée à la température T_p .

Pour obtenir la dépendance de ρ , rappelons les coefficients thermodynamiques classiques, respectivement le coefficient de dilatation à pression constante, le coefficient d'augmentation de pression à volume constant, le coefficient de compressibilité à température constante :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad \beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho, \quad \chi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T.$$

Le développement de Taylor de la densité au voisinage de $T = T_\infty$, et $p = P_\infty$:

$$\rho = \rho_\infty (1 - \alpha(T - T_\infty) + \chi(p - P_\infty) + \dots)$$

Eau $\alpha = 5.810^{-4} K^{-1}$, $\chi = 5.25 \cdot 10^{-5} \text{Atm}^{-1}$. Air $\alpha = 3.310^{-4} K^{-1}$, $\alpha = T^{-1}$ et $\chi = p^{-1}$ (pour un gaz parfait). Anticipons le fait que les variations de pression sont négligeables et écrivons simplement que ρ ne dépend que de T (posons $\epsilon = \alpha(T_p - T_\infty)$) :

$$\rho = \rho_\infty (1 - \epsilon \bar{T} + \dots)$$

Nous reviendrons plus loin en 4.1.5 sur le bien fondé de cette hypothèse compte tenu de l'ordre de grandeur effectif des variations de pression.

4.1.2. équation de continuité

L'équation de continuité $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0$, devient donc :

$$-\rho_\infty \varepsilon \frac{d\bar{T}}{dt} + \rho_\infty (1 - \varepsilon \bar{T}) \nabla \cdot \underline{u} = 0,$$

au premier ordre en ε (en première approximation), le fluide est incompressible :

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0,}$$

Retenons qu'en première approximation le fluide est incompressible.

4.1.3. équation de quantité de mouvement

Le tenseur des contraintes pour un fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \lambda (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} + 2 \mu \underline{\underline{D}}$$

Au vu du paragraphe précédent, et sachant que λ et μ sont du même ordre de grandeur, on écrira en première approximation que le tenseur des contraintes n'est pas affecté par la compressibilité :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2 \mu \underline{\underline{D}}$$

Comme on étudie un écoulement en présence de gravité, il est judicieux de poser :

$$p = p_0 - \rho_\infty g z + (\delta p) \bar{p}$$

et donc de ne s'intéresser qu'aux variations autour de la position d'équilibre hydrostatique

Lorsqu'il n'y a pas de mouvement ($\underline{u} = 0$), les équations de quantité de mouvement deviennent suivant la direction \underline{e}_z (celle de $\underline{g} = -g \underline{e}_z$) :

$$-\frac{\partial}{\partial z} p_{hyd} - \rho_\infty g = 0,$$

la pression est p_{hyd} telle que : $p_{hyd} = p_0 - \rho_\infty g z$. Lorsqu'il y a mouvement, la projection suivant z fait apparaître (entre autres termes) :

$$-\frac{\partial}{\partial z} p - \rho g \text{ que l'on réécrit } -(\delta p) \frac{\partial}{\partial z} \bar{p} - (\rho - \rho_\infty) g$$

puisque $(\rho - \rho_\infty) = -\rho_\infty \varepsilon \bar{T}$, il va rester une force de "flottabilité" (*buoyancy force*) dirigée vers le haut. La variation de la densité dans le produit $\rho \underline{du}/dt$ sera négligée ($\rho \underline{du}/dt \simeq \rho_\infty \underline{du}/dt$) puisque la vitesse est petite et en supposant comme de coutume que μ varie peu avec la température, l'équation dynamique s'écrit :

$$\rho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -(\delta p) \nabla \bar{p} + \rho_\infty g \varepsilon \bar{T} \underline{e}_z + \mu \nabla^2 \underline{u}.$$

L'écoulement est produit par la force d'Archimède ("*buoyancy force*").

4.1.4. équation de l'énergie

Son établissement est un peu délicat, il passe par des transformations de la thermostatique et ces considérations subtiles de compressibilité. C'est pour cela que nous sommes passés rapidement au chapitre sur les "Généralités, équations de la thermomécanique des fluides"

On a par définition de la variation de l'énergie interne par les apports de chaleurs de dissipation visqueuse, de diffusion thermique et de travail mécanique :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} - \nabla \cdot \underline{q} \text{ soit } \rho \frac{de}{dt} = k \nabla^2 T + \lambda (\nabla \cdot \underline{u})^2 - p \nabla \cdot \underline{u} + 2\mu (\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}).$$

Or on ne peut pas utiliser $de = c_v dT$ car le volume change lorsque l'on chauffe (cf la remarque plus loin qui montre que l'on ne peut pas simplifier en posant $p\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$ car dans $\rho \frac{de}{dt}$ il y a un terme justement du même ordre de grandeur). On va donc réécrire de manière différente cette équation, pour ce faire, rappelons les relations de thermostatique bien connues (et valables en mécanique des fluides de par l'hypothèse de l'état local, en fait on va retrouver la relation de Meyer $C_p - C_v = T(\frac{\partial P}{\partial T})_V(\frac{\partial V}{\partial T})_P$) :

On peut remarquer que par définition de $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + \underline{\tau}$ et $h = e + p/\rho$, l'équation de l'énergie s'écrit avec l'enthalpie h :

$$\rho \frac{d}{dt} h - \rho \frac{d}{dt} (p/\rho) = -p\underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \underline{\tau} : \underline{D} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

ou, comme $\rho \frac{d}{dt} (1/\rho) = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$, le terme $-p\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ disparaît des deux membres et l'équation de l'énergie écrite en enthalpie est :

$$\rho \frac{d}{dt} h - \frac{d}{dt} p = \underline{\tau} : \underline{D} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$$

On va maintenant en fait développer dh/dt :

Le premier principe : $\rho \frac{de}{dt} = \underline{\sigma} : \underline{D} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q}$

Le second principe : $\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + p\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$

d'où l'équation générale du transfert thermique écrite avec l'entropie s (voir Landau & E. Lifshitz (1989)) :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = k\underline{\nabla}^2 T + \lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^2 + 2\mu(\underline{D} : \underline{D}),$$

cette écriture nous montre bien que sans dissipation, l'entropie est constante.

Revenons à la thermostatique pour écrire s en fonction des variations de T et p , par définition de la fonction d'état $s(p, T)$: (variables naturelles $s(e, 1/\rho)$)

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT$$

on a besoin des dérivées partielles de s (ce sont les relations de Maxwell), or, sachant :

$$dh = de + d(p/\rho) = (Tds - pd(\rho^{-1}) + d(p/\rho)) = Tds + \rho^{-1} dp$$

on en déduit $Tds = -\rho^{-1} dp + (dh/dT)dT$

$$T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p \quad \text{et} \quad dg = dh - d(Ts) = -sdT + \rho^{-1} dp$$

donc comme s est une différentielle totale exacte

$$-\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p$$

d'où l'expression de la différentielle ds en fonction de dT et dp

$$\rho T ds = \rho c_p dT + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p dp.$$

Et finalement, on obtient l'équation

$$\rho c_p \frac{d}{dt} T + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{d}{dt} p = k\underline{\nabla}^2 T + \lambda(\underline{\nabla} \cdot \underline{u})^2 + 2\mu(\underline{D} : \underline{D})$$

au passage on a établi l'identité

$$\rho \frac{d}{dt} h - \frac{d}{dt} p = \rho c_p \frac{d}{dt} T + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \frac{d}{dt} p.$$

On peut maintenant simplifier ces équations exactes. En effet on a fait apparaître les termes faibles, on peut maintenant négliger $\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\alpha T$ ainsi que $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ et obtenir l'équation finale utile :

$$\boxed{\rho c_p \frac{d}{dt} T = k\underline{\nabla}^2 T + 2\mu(\underline{D} : \underline{D}).}$$

L'équation de la chaleur s'écrit bien avec c_p .

4.1.5. Remarques

* Reprenons l'expression complète du développement de Taylor de la densité avec la température et la pression : au voisinage de $T = T_\infty$, et $p = P_\infty$:

$$\rho = \rho_\infty(1 - \alpha(T - T_\infty) + \chi(p - P_\infty) + \dots)$$

la température a été examinée, voyons la variation de pression

$$\rho = \rho_\infty(1 - \varepsilon\bar{T} + \chi((\delta p)\bar{p} - \rho_\infty g z)) + \dots$$

or le terme de variation de pression est nous nous en doutons : $(\delta p) \sim \rho_\infty L g \varepsilon$ ou aussi $(\delta p) \sim \rho_\infty U_0^2$. On a, si on estime $(\delta p) \sim \rho_\infty L g \varepsilon$:

$$\chi(\delta p) = \chi(\rho L g \varepsilon) \ll \varepsilon$$

car $\chi \sim P_\infty^{-1}$ pour un gaz, dans le cas d'un liquide la compressibilité est effectivement très faible.

Si on préfère l'autre estimation de pression $(\delta p) \sim \rho_\infty U_0^2$, comme par ailleurs que la vitesse du son est

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2$$

on voit donc que (la dérivée à s constant étant supposée proche de celle à T constant)

$$\chi(\delta p) = O\left(\frac{\rho_\infty U_0^2}{\rho_\infty c^2}\right)$$

qui est le nombre de Mach (U_0/c) au carré, ce terme est donc petit.

* Si on dit : $\rho c_v \frac{d}{dt} T = k \nabla^2 T + 0 + 2\mu(\underline{D} : \underline{D})$, on commet une erreur : en effet on a $c_p - c_v = r$. Le terme négligé $-p \nabla \cdot \underline{u}$ est d'ordre de grandeur $-p_\infty u_\infty \alpha (T_p - T_\infty)/L$, mais $\alpha \sim T_\infty^{-1}$ (car $\partial \rho / \partial T = \rho/T$) donc : $p_\infty u_\infty \alpha (T_p - T_\infty)/L = O(r \rho_\infty (u_\infty/L))$. Or $\rho c_v T$ est lui aussi d'ordre $O(r \rho_\infty (u_\infty/L))$. On a donc bien négligé un terme du même ordre de grandeur que les autres.

* dans l'équation de la chaleur :

$$\rho \frac{d}{dt} c_p T = k \nabla^2 T + 2\mu(\underline{D} : \underline{D})$$

le terme $2\mu(\underline{D} : \underline{D})$ sera encore négligeable dans la plupart des cas.

* attention rappelons que nous supposons que la dépendance des coefficients de transport est négligeable en température. S'il n'y a pas de gravité, on pourrait imaginer que le mouvement est créé par la variation de μ avec la température, le résultat est très très petit. Si $(\delta p) = O(\varepsilon \mu)$, alors $u = 0((\delta p)^{1/2})$, la vitesse est donc très faible si la viscosité est elle même faible.

* on évitera de confondre α avec $a = k/(\rho c_p)$, (et $Pr = \nu/a$) qui est parfois noté α dans la communauté thermicienne (d'ailleurs le α coefficient thermodynamique est souvent noté β , α est la notation internationale.)

* L'approximation date de 1901 est dans son livre "Théorie analytique de la Chaleur". La formule, qui n'est pas encore de "Boussinesq" est introduite par la phrase en page VII de l'avertissement : "il fallait encore observer que, dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante du poids de l'unité de volume soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g , tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci. Grâce aux simplifications alors obtenues, la question, encore très difficile et presque toujours rebelle à l'intégration n'est plus inabordable". Page 174/175, la formule est dite ainsi : "Et le poids ρg de l'unité de volume (...) aura décré sensiblement de $\rho g \alpha \theta$, comme s'il était adjoint, au poids primitif ou normal de l'unité de volume, la petite force antagoniste, c'est à dire *ascensionnelle*, $\rho g \alpha \theta$."

4.1.6. Résumé : équations finales

Compte tenu de l'hypothèse de Boussinesq : $\rho = \rho_\infty(1 - \alpha(T - T_\infty))$, μ constant et de l'élimination de la pression hydrostatique, on obtient le système couplé suivant régissant les écoulements de convection libre laminaire :

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \\ \rho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) = -(\delta p) \underline{\nabla} \bar{p} + \rho_\infty g \varepsilon \bar{T} \underline{e}_z + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}, \\ \rho_\infty c_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \right) T = k \underline{\nabla}^2 T + 2\mu (\underline{D} : \underline{D}), \end{cases}$$

plus les conditions aux limites d'adhérence pour la vitesse, et de température :

$$\underline{u}|_w = 0, \text{ puis } (T|_w = T_p \text{ ou } -k\partial_n T|_w = q_p \text{ ou } h\partial_n T|_w + (T|_w - T_p) = 0.)$$

4.2. Analyse phénoménologique sommaire des équations

4.2.1. Le système

Nous connaissons la température du corps, et soit L sa dimension caractéristique. La jauge de la vitesse est inconnue *a priori*, adimensionnons :

$$\underline{u} = U_0 \underline{\bar{u}}, \quad T = T_\infty + (T_p - T_\infty) \bar{T}, \quad x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y} \dots$$

et enlevons les barres (on est maintenant sans dimension) :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= 0 \\ (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} &= -\frac{\delta p}{\rho_\infty U_0^2} \underline{\nabla} p + \frac{Lg\alpha(T_p - T_\infty)}{U_0^2} T \underline{e}_z + \frac{\nu}{U_0 L} \underline{\nabla}^2 \underline{u}. \\ (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) T &= \frac{k}{\rho_\infty c_p U_0 L} \underline{\nabla}^2 T + 2 \frac{\nu U_0}{c_p L (T_p - T_\infty)} (\underline{D} : \underline{D}) \end{aligned}$$

Bien entendu U_0 est inconnu. Nous allons voir que plusieurs points de vue sont possibles.

4.2.2. Une possibilité

Il est clair que le terme $\frac{Lg\alpha(T_p - T_\infty)}{U_0^2}$ est indispensable pour coupler thermique et dynamique. S'il existe un écoulement imposé supplémentaire de vitesse U_∞ , on utilise cette vitesse comme jauge, le nombre précédent est le nombre de Richardson :

$$Ri = \frac{g\alpha(T_p - T_\infty)L}{U_\infty^2}$$

Il s'agit du problème fort délicat de la convection mixte... En fait si $U_\infty = 0$, u , v et w sont mesurés avec un U_0 inconnu pour l'instant. La perturbation de température est mesurée par ΔT . Si on chauffe la diffusion est le mécanisme qui transmet la température, donc :

$$\frac{k}{\rho_\infty c_p U_0 L} = 1, \text{ donc } U_0 = \frac{\nu}{PrL},$$

serait un bon choix (on rappelle que $Pr = O(1)$). On préfère généralement prendre (de manière équivalente, au lieu d'avoir un Péclet unité, c'est le Reynolds qui vaut 1) $U_0 = \frac{\nu}{L}$. On a $(\delta p) = \rho_\infty U_0^2$. Le terme moteur qui fait changer la vitesse est $-\alpha \Delta T g$ le frein est $\nu L^{-2} U_0$. Il apparaît donc le nombre sans dimension suivant en facteur du terme moteur :

$$\alpha \Delta T g L / (U_0^2) = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu^2} = G.$$

C'est le nombre de Grashof G . Si on avait gardé pour la vitesse $\nu/(PrL)$ on aurait introduit ,

$$Bo = \frac{\alpha g \Delta T Pr^2 L^3}{\nu^2},$$

le nombre de Boussinesq. Les équations, sans dimension et en supposant que $(\frac{\nu U_0}{c_p L \Delta T})$ est très petit (ce qui est souvent le cas mais qui mériterait une plus ample discussion), deviennent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u} &= 0 \\ (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} &= -\nabla p + GT \underline{e}_z + \nabla^2 \underline{u}. \\ (\underline{u} \cdot \nabla) T &= Pr^{-1} \nabla^2 T \end{aligned}$$

On remarque qu'il existe donc une longueur $L = [\frac{\nu}{\alpha g \Delta T}]^{1/3}$ telle que le problème est complet ($G = 1$).

Ce point de vue est en fait assez adapté au cas où on chauffe de plus en plus un corps, partant de l'écoulement de repos. On voit en effet que si le nombre G augmente, le terme source devient de plus en plus grand, et provoque le mouvement (*c.f.* le problème de Rayleigh Bénard en fin de chapitre, on remarquera dans ce cas qu'il est alors plus judicieux d'utiliser le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\alpha g \Delta Pr L^3}{\nu^2}$ (mais la démarche est complètement équivalente).

4.2.3. Une autre possibilité

Une manière différente aurait été de poser que le terme $\frac{Lg\alpha(T_p - T_\infty)}{U_0^2}$ qui est indispensable pour coupler thermique et dynamique est égal à 1. Ce point de vue est plus adapté au cas où on observe un écoulement établi (car c'est le terme moteur).

Les équations sans dimension seraient alors devenues :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u} &= 0 \\ (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} &= -\nabla p + T \underline{e}_z + G^{-1/2} \nabla^2 \underline{u}. \\ (\underline{u} \cdot \nabla) T &= Pr^{-1} G^{-1/2} \nabla^2 T \end{aligned}$$

Cette dernière forme est plus adaptée au point de vue couche limite. Nous allons l'examiner maintenant

4.3. Exemples de couche limite laminaire sur un plan

4.3.1. Cas vertical, température imposée

On se donne un plan vertical, semi infini, porté à une température différente de ΔT de la valeur loin à l'infini... C'est le problème du radiateur.

Les équations précédentes nous montrent qu'à grand nombre de Grashof :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + T \underline{e}_z, \text{ et } (\underline{u} \cdot \nabla) T = 0,$$

le mouvement ne se produit pas : la paroi est une couche singulière. On voit directement que les termes à récupérer étant en $G^{-1/2} \nabla^2(\cdot)$ la couche limite sera en $(G^{-1/2})^{1/2} = G^{-1/4}$.

Plutôt que d'adopter cette démarche, nous réanalysons le problème.

4.3.2. Analyse

Reprenons le problème complet pour bien voir les mécanismes induits par ce phénomène. Le problème complet, s'écrit ici en tournant les axes : x est vertical (en variables dimensionnées) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \alpha g (T_p - T_\infty) \bar{T}, \text{ et } u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Il s'analyse comme suit :

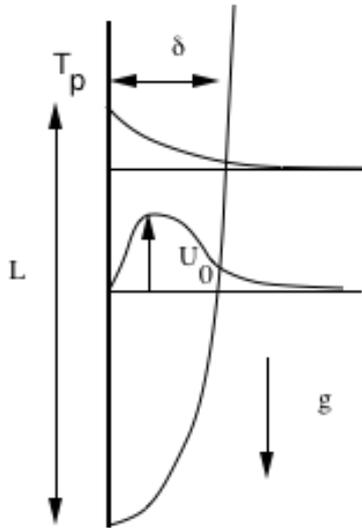


FIG. - la plaque verticale chauffée.

Comme il ne se passe rien si on ne tient pas compte de la viscosité, c'est qu'il existe une couche limite tenue près de la paroi, soit δ son épaisseur et plaçons nous à la distance L du bord d'attaque. Manifestement, le terme moteur est la force d'Archimède, $\rho g \alpha \Delta T$ qui intervient dans le gradient longitudinal, si P est la jauge de pression, l'équilibre longitudinal donne :

$$\frac{P}{L} \sim \rho g \alpha \Delta T,$$

cette pression fait se développer une vitesse longitudinale dont l'ordre de grandeur est U_0 :

$$\rho U_0 \frac{U_0}{L} \sim \frac{P}{L}$$

$$\text{Donc : } U_0 \sim (Lg\alpha\Delta T)^{1/2}.$$

Cette vitesse doit être annulée à la paroi par les effets visqueux, donc :

$$U_0 \frac{U_0}{L} \sim \nu \frac{U_0}{\delta^2}$$

ce qui permet d'éliminer U_0 et de trouver (δ/L) :

$$\frac{\delta}{L} = G^{-1/4}$$

avec le nombre de Grashof :

$$G = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu^2}$$

4.3.3. Problème sans dimension :

Au final en posant :

$$x = L\bar{x}, y = LG^{-1/4}\bar{y}, u = (Lg\alpha\Delta T)^{1/2}\tilde{u} \text{ etc}$$

les équations deviennent :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \bar{y}^2} + \tilde{T}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{y}^2},$$

avec les conditions aux limites

$$\tilde{u}(\bar{x}, 0) = \tilde{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \tilde{T}(\bar{x}, 0) = 1, \quad \text{et } \tilde{u}(\bar{x}, \infty) = 0, \quad \tilde{T}(\bar{x}, \infty) = 0.$$

Note, on aurait pu directement en partant du système sans dimension et en posant $\tilde{y} = y/\varepsilon$ trouver que $\varepsilon = G^{-1/4}$).

4.3.4. Solutions semblables

L'analyse de l'adimensionnement fait double emploi : si L est changé en LL^* , on voit qu'alors δ est changé en : $\delta L^{*(1-3/4)} = \delta L^{*1/4}$, ce qui conduit à la variable de similitude $\eta = \frac{\tilde{y}}{\bar{x}^{1/4}}$, et la forme suivante pour la fonction de courant :

$$\psi = \bar{x}^{3/4} f(\eta) \text{ et } \tilde{T} = g(\eta).$$

On pose pour les variables de similitude :

$$\xi = \bar{x}, \quad \eta = \tilde{y}/\bar{x}^{1/4} \text{ et donc } \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{4\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\xi^{1/4}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

soit pour les vitesses $\tilde{u} = \xi^{1/2} f'(\eta)$, $\tilde{v} = \frac{1}{4\xi^{1/4}}(\eta f' - 3f)$, donc comme

$$\tilde{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \xi^{1/2} f' \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{3}{4\xi^{1/2}} f \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{1}{\xi^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

le problème autosemblable est :

$$4f''' + 3ff'' - 2f'^2 + 4g = 0;$$

$$4g'' + 3Prfg' = 0;$$

La résolution par une méthode de tir donne :

pour $Pr=0.7$, $f''(0) = 0.9571$, $g'(0) = -0.3534$
 pour $Pr=1.$, $f''(0) = 0.9069$, $g'(0) = -0.4008$
 pour $Pr=7.$, $f''(0) = 0.6371$, $g'(0) = -0.7450$

Sur la figure suivante on représente les profils de f' et de g en fonction de η pour ces 3 nombres de Prandtl représentatifs.

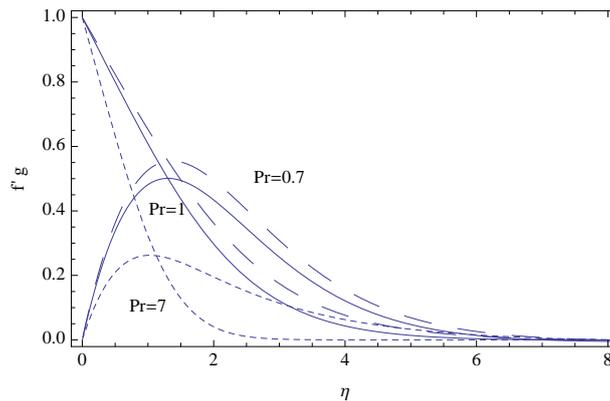


FIGURE 2 – trait plein $Pr = 1$, petit pointillé $Pr = 7$, gros $Pr = 0.7$; f' varie de 0 à 0 et g varie de 1 à 0.

4.3.4. Finalement, valeur de Nusselt

La valeur pratique du nombre de Nusselt local pour l'air est donc :

$$Nu_x = 0,35Gr_x^{1/4}.$$

La valeur moyenne pour une longueur L est alors :

$$\langle Nu \rangle = 0.478Gr_L^{1/4}.$$

Pour des nombres de Grashof environ égaux à 10^8 on quitte le régime laminaire. Il est communément admis qu'en régime turbulent le nombre de Nusselt varie expérimentalement comme $Gr_L^{1/3}$ (voire $2/5$ car $1/3 \sim 2/5$!!!). Ces valeurs permettent de compléter notre tableau sur les coefficients d'échange.

4.3.5 Mise en oeuvre numérique

Cet exemple est en fait plus complexe qu'il n'y paraît à résoudre numériquement avec un solveur Navier Stokes. En effet, il a été montré récemment par Le Quéré 08 que les écoulements de convection naturelle dans des domaines partiellement clos posaient de graves questions d'implémentation de conditions aux limites. Par exemple, pour le problème de la plaque verticale, seules les conditions sur la plaque sont claires. Mais que se passe-t-il au loin ? Quelles conditions mettre sur les trois autres bords ? Une idée simple serait de mettre une condition de Neumann pour toutes les quantités sur les trois bords. Le problème est que la solution est déterminée alors à un demi Poiseuille près (qui est une valeur propre du problème). Le Quéré propose donc de calculer cette fonction propre (qui dépend de la géométrie) et d'ajuster une combinaison linéaire de cette solution et de la solution calculée de manière à faire disparaître le gradient de pression entre le bas et le haut. En pratique, nous avons utilisé le Solveur Gerris et nous avons annulé la pression à chaque pas de temps de manière à ne pas avoir cet écoulement superflu.

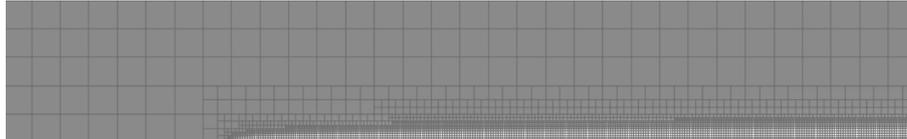


FIGURE 3 – Calcul à Prandtl unitaire. Calculs numériques avec Gerris dans un domaine de taille 4*1, en haut partout on se donne des conditions de Neumann. Le premier quart du domaine est la zone amont, on se donne $v = 0$ Neumann en u et T . A gauche, l'entrée $p = 0$ $v = 0$ et Neuman pour u et T . Puis sur la plaque Dirichlet en bas $u = v = 0$, $T = 1$. À la sortie Neumann pour u v et T . Remarquer le maillage adapté à la couche limite.

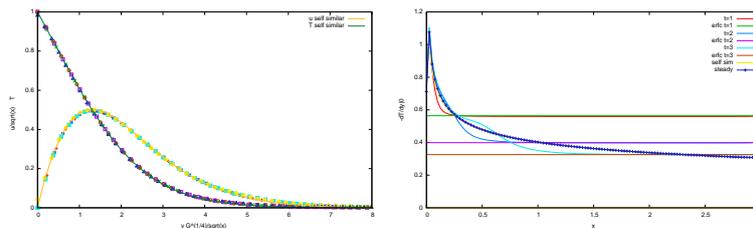


FIGURE 4 – Calcul à Prandtl unitaire. A gauche, les calculs numériques dans un domaine de taille 4*1, en trois coupes $x = 1, 1.5, 2$ et 3 on trace en fonction de la variable de similitude et on superpose à la solution autosemblable. A droite, le flux à la paroi aux temps 1 2 et 3. On passe de la solution en $\sqrt{(\sqrt{G}\pi t^{-1})}$ (droites horizontales aux temps 1 2 et 3) à la solution autosemblable $0.4 * G^{1/4} * \sqrt{x}$

4.3.5. Cas vertical, flux imposé

Soit une plaque verticale, on la chauffe en imposant maintenant le flux et non plus la température.

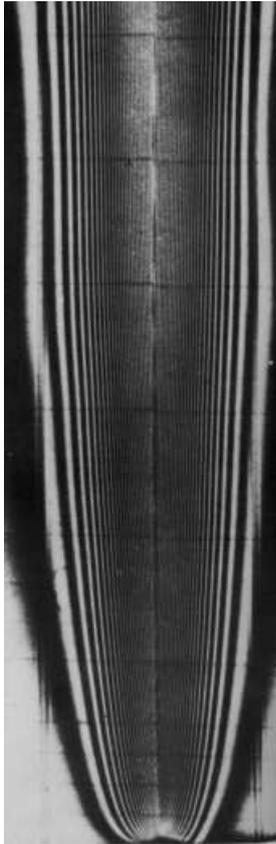


FIG - interférogramme montrant les lignes iso densité (photo Van Dyke 82)

On vérifiera facilement que si le flux est imposé, soit q_w sa valeur constante à la paroi, la jauge de l'épaisseur de couche limite est :

$$\frac{\delta}{L} = G_q^{-1/5}, \text{ avec } G_q = \frac{\rho\alpha q_w L^4}{\nu^2}.$$

(pour y parvenir, il ne faut noter que cette fois la jauge de la pression est

$$\frac{P}{L} \sim \rho g \alpha q_w \delta,$$

etc.

L'image ci contre (extraite de Van Dyke 82) représente la convection libre issue d'une feuille de métal (chauffée électriquement dans une enceinte de remplie d'oxyde d'azote à 17 atmosphères. La plaque fait 19 cm et le nombre de Grashof de flux (G_q) vaut $5 \cdot 10^{11}$. La couche limite a été épaissie 6 fois (transversalement) par un procédé optique.

La planche suivante représente l'évolution en fonction du temps de l'épaisseur de couche limite, après un chauffage impulsif. L'écoulement final stationnaire étant celui de la figure de gauche. Pour les temps courts on observe, qu'à position fixée, l'épaisseur croît en \sqrt{t} , jusqu'à ce que l'information de l'existence du nez soit parvenue... La couche limite est alors stationnaire et se développe en $x^{1/5}$. Cet exemple sera examiné en PC dans le cas de la plaque horizontale.

4.3.6. Cas horizontal, température imposée

L'analyse est sensiblement la même, comme l'écoulement sur les plaques chauffées est très instable, on étudie ici la plaque refroidie par rapport au fluide...

Bien entendu cela revient au même d'étudier le plafond chauffé par rapport au fluide en inversant la gravité :

Cette fois le terme moteur d'Archimède $\rho g \alpha \Delta T$ provoque une variation transverse de pression :

$$\frac{P}{\delta} \sim \rho g \alpha \Delta T.$$

Donc l'ordre de grandeur de U_0 vérifie par l'équilibre inertie-gradient de pression :

$$\rho U_0 \frac{U_0}{L} \sim \frac{P}{L}$$

L'échelle de vitesse est $U_0 \sim (\delta g \alpha \Delta T)^{1/2}$. Cette vitesse doit être annulée à la paroi par les effets visqueux, donc l'équilibre inertie-viscosité donne :

$$U_0 \frac{U_0}{L} \sim \nu \frac{U_0}{\delta}$$

ce qui permet d'éliminer U_0 et de trouver (δ/L) :

$$\frac{\delta}{L} = G^{-1/5}$$

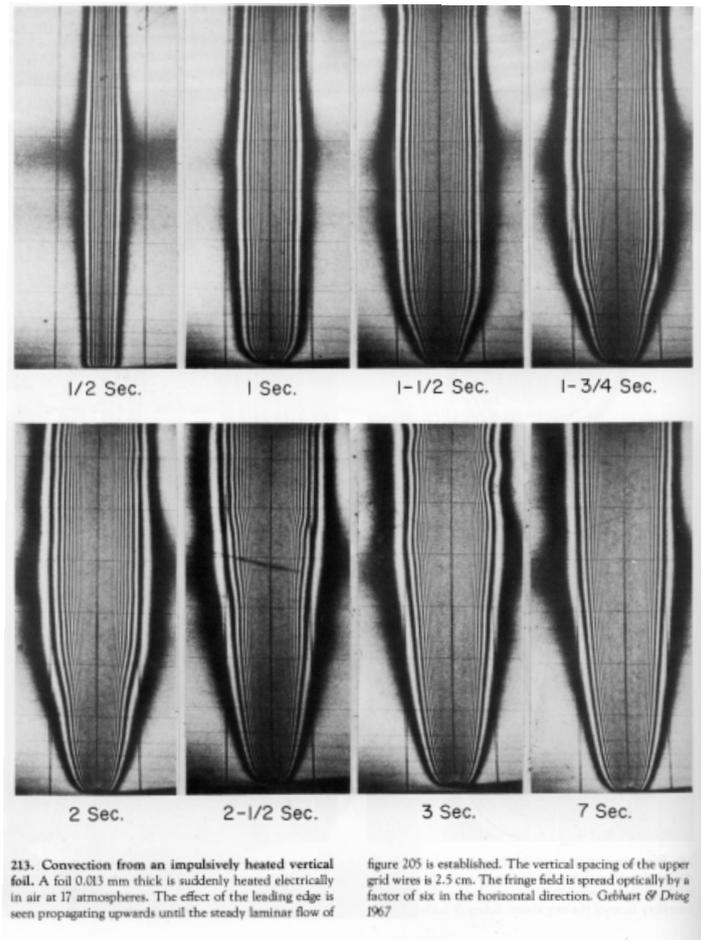


FIGURE 5 – Développement temporel d'une couche limite de convection libre à grand nombre de Grashof (planche extraite de Van Dyke 82).

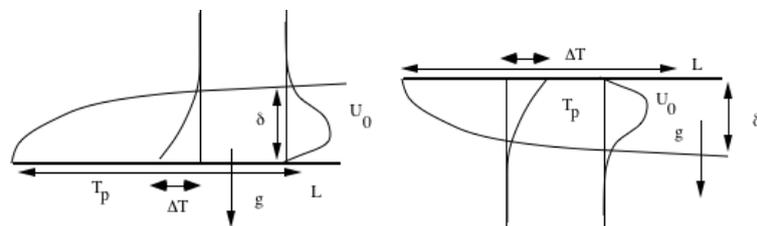


FIGURE 6 – Gauche plaque horizontale refroidissant le fluide, droite Plaque chaude, gravité inversée.

avec le nombre de Grashof :

$$G = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu^2}$$

Au final en posant :

$$x = L\tilde{x}, y = LG^{-1/5}\tilde{y}, u = (Lg\alpha\Delta T)^{1/2}G^{-1/10} \text{ etc}$$

les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad 0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{T}, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0, \tilde{T}(\tilde{x}, 0) = 1, \text{ et } \tilde{u}(\tilde{x}, \infty) = 0, \tilde{T}(\tilde{x}, \infty) = 0.$$

etc.

Pour un Prandtl unité on trouve après avoir posé le système semblable avec comme variable de similitude :

$$\eta = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^{2/5}},$$

pour Pr=0.7, la solution de similitude donne $f''_0 = 0.97, g'_0 = -0.35$

$$Nu_x \sim 0.35 Gr_x^{1/5}.$$

Qui est une nouvelle formule utile pour calculer les coefficients de transferts. On peut varier les configurations, et incliner la plaque...

On retiendra que le Nusselt de la plaque horizontale est inférieur au Nusselt de la plaque verticale. ($Nu_{vertical} > Nu_{horizontal}$).

4.4. Le problème de Rayleigh Bénard

4.4.1. équations

Pour mémoire examinons rapidement le problème de Rayleigh Bénard (dont les images sont dans le livre Darrozès & François page 251, et dans l'ouvrage de Van Dyke 82).

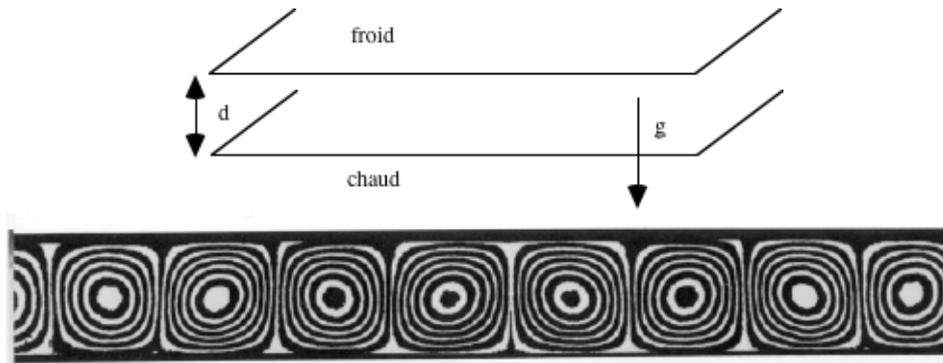


FIGURE 7 – Haut : dispositif schématique, deux plaques limitant un fluide, celle du bas est plus chauffée que celle du haut. Bas : rouleaux vus de côté (plaque en haut et en bas) Van Dyke 82

On peut observer des rouleaux longitudinaux parallèles dans un film de fluide visqueux (huile de silicone) maintenu entre deux plaques à une température chaude en bas et froide en haut.

Si la surface supérieure est libre, on observe surtout des hexagones (cette forme est causée par les effets de la tension de surface).

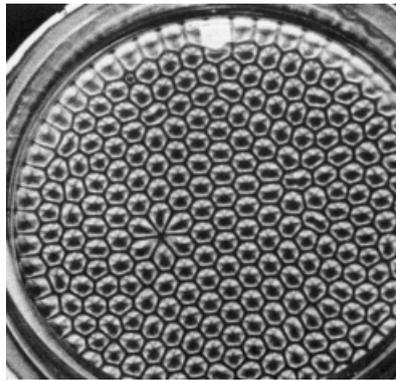


FIGURE 8 – dans le cas où la surface est libre et où le fond est chauffé : on voit (en vue de dessus) des hexagones (Van Dyke).

Il s'agit d'un problème de convection naturelle : le fluide chauffé en bas se dilate et remonte entraîné par la force d'Archimède, arrivé en haut il se refroidit et retombe. C'est ce mouvement qu'il faut expliquer. écrivons les équations pour un fluide newtonien compressible caloriquement parfait avec l'approximation de Boussinesq et en négligeant la dissipation visqueuse ($E=0$) :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= 0 \\ \rho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) &= -\underline{\nabla} p + \rho_\infty g (1 - \alpha(T - T_0)) \underline{e}_z + \mu_\infty \underline{\nabla}^2 \underline{u}. \\ \rho_\infty c_p \left(\frac{\partial}{\partial t} T + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T \right) &= k \underline{\nabla}^2 T \end{aligned}$$

4.4.2. état de base

L'état de base (ou état initial vérifiant les équations) est celui de conduction pure : la conduction au travers d'un milieu fixe, c'est le problème du mur. Il ne reste que l'équation de la chaleur sous la forme simple :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0;$$

d'où

$$u = v = w = 0, \quad T = T_0 - \Delta z/d,$$

et pour la pression :

$$p = p_0 - \rho_0 g d (z/d + 1/2 \alpha \Delta T z^2/d^2).$$

Il existe donc une solution stationnaire des équations, c'est la solution de conduction. Cet état est appelé "état de base", on va maintenant le perturber et voir si des perturbations vont croître ou s'atténuer.

4.4.3. Adimensionnement des équations.

Par l'analyse phénoménologique adimensionnons les équations obtenues pour les écarts à la solution de base définie plus haut. On a d l'écartement des plaques comme quantité évidente d'adimensionnement (du moins pour un premier essai), u , v et w sont mesurés avec un U_0 inconnu pour l'instant. L'analyse effectuée plus haut s'applique en prenant $L = d$. On prend aussi en compte le caractère instationnaire. Si on chauffe en bas, le temps de réponse de la température est :

$$\tau = \rho_0 c_p d^2 / k = d^2 P_r / \nu.$$

On a bien $U_0 = d/\tau = \nu/(P_r d)$. Mais attention, il y a aussi le terme $w \partial T / \partial z$ qui va jouer, il serait donc bon qu'il soit du même ordre de grandeur que $\partial T / \partial t$. Les équations, sans dimension, deviennent pour les écarts à la solution de base

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + Pr \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + Pr \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - Pr Ra \Theta \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} - w &= \frac{\nu}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Il apparaît donc le nombre sans dimension suivant en facteur du terme moteur :

$$\alpha \Delta T g / (U_0 / \tau) = Pr = Ra Pr \text{ avec } Ra = \frac{\alpha g \Delta T Pr d^3}{\nu^2}$$

C'est en fait Pr^2 fois Grashof, la raison du choix du nombre Ra pour caractériser cet écoulement est simplement due au fait qu'il est le rapport entre le terme moteur (θ) et le terme de freinage ($\nabla^2 v$), ceci ne remet pas en cause l'adimensionnement avec le nombre de Grashof. On conçoit donc que si ce nombre de Reynolds est assez grand, il va finir par créer un mouvement...

Il s'agit du système précédent (§4.2) aux différences près de l'existence d'un gradient imposé de température (d'où le "-w" dans l'équation de la chaleur) et d'un choix différent de la jauge de vitesse (facteur Pr^{-1}).

4.4.4. Conditions aux limites

Nous nous restreignons au cas où on met des parois rigides :

$$u = v = w = 0 \text{ sur } z = 0 \text{ et } 1$$

On remarque que cela donne (à cause de l'invariance par translation sur les parois) :

$$\partial w / \partial z = 0 \text{ sur } z = 0 \text{ et } 1$$

Pour la température, elle est imposée :

$$\Theta = 0 \text{ sur } z = 0 \text{ et } \Theta = 0 \text{ en } z = 1$$

4.4.5. Linéarisation

La suite de la résolution est très technique et n'est ici que rapidement déflorée. On linéarise les équations autour de l'état de base qui est le repos. Puis par manipulations on peut éliminer u et v et ne garder que w . On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w) &= Ra Pr \left((\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Theta + Pr \nabla^2 \nabla^2 w \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Theta - w &= \nabla^2 \Theta \end{aligned}$$

avec comme conditions :

$$w = 0, \partial w / \partial z = 0, \Theta = 0 \text{ sur } z = 0 \text{ et } z = 1$$

La couche de fluide est supposée latéralement illimitée (invariances par translations en x et y), on cherche donc des solutions avec $e^{imx+ily}$, le système est du genre $\partial_t U = AU$, on cherche donc des solutions avec $e^{-i\omega t}$, on pose souvent $\sigma = -i\omega$. On cherche la solution sous forme de "modes propres" (au sens des vecteurs propres) comme nous l'avons vu pour la stabilité des écoulements parallèles :

$$(w, \Theta) = (W(z), T(z)) e^{imx+ily} e^{\sigma t}.$$

Les perturbations harmoniques introduites (en $\cos(mx+ly)$) seront atténuées si $\text{Re}(\sigma) < 0$ ou au contraire amplifiées si $\text{Re}(\sigma) > 0$, Re désignant la partie réelle. Une subtilité de cette configuration est que l'on peut chercher un mode "marginalelement stable" ($\sigma = 0$). C'est une solution stationnaire "propre". Cette propriété est assez rare en général. Il est remarquable que le nombre de Prandtl en facteur du terme instationnaire disparaît, d'où le choix de Ra . D'où si $k = \sqrt{m^2 + l^2}$:

$$(D^2-k^2)^2W = k^2 Ra T; (D^2-k^2) T = -W;$$

$$\text{soit } (D^2-k^2)^3T = -k^2 Ra T;$$

Cette équation différentielle est particulièrement simple et a des solutions en e^{iqz} . La solution est la somme des 6 exponentielles complexes (avec 6 coefficients pour l'instant inconnus).

$$(q_m^2+k^2)^3 -k^2 Ra = 0.$$

$\pm q_m$ avec : $q_m^2 = -k^2 + j^m(Ra k^2)^{1/3}$, et $m=0,1,2$ et $j=-1/2 + i \sqrt{3}/2$.

Il reste à écrire les 3 conditions en $z=0$ et les 3 conditions en $z=1$. En écrivant que le déterminant 6x6 est nul, on obtient la courbe de stabilité marginale si dessous.

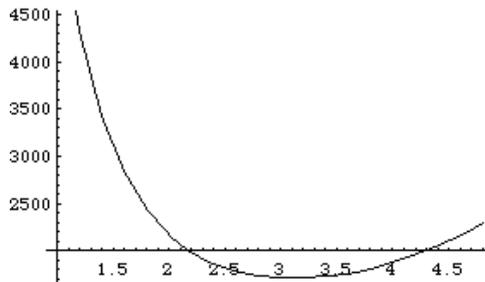


FIGURE 9 – Ra fonction de k.

La valeur minimale est $Ra_c \sim 1707,76$. Le nombre d'onde critique est $k_c \sim 3,1$.

La valeur minimale paraît "grande" (ce qui semble infirmer toute notre démarche où le nombre sans dimension devait être d'ordre unité), mais en fait comme d'après l'équation $(D^2 - k^2)^3T = -k^2 RaT$, donc $k \sim O(Ra^{1/4})$. Le vrai paramètre est donc $Ra^{1/4}$, soit $1707,76^{1/4} = 6.4$ qui n'est pas "grand". Tant que $Ra < Ra_c$, il n'y a aucun mouvement. Lorsque $Ra = Ra_c$ on observe des structures périodiques (rouleaux : en prenant la partie réelle de la solution en e^{ikr}) de fréquence égale à $3,1/2\pi$. Si on augmente encore Ra plusieurs longueurs d'ondes sont excitées et les structures sont déformées.

4.4.6. Conclusion

Ce problème est théoriquement très important, il est de plus assez simple à observer (avec de la margarine dans une poêle).

On notera la stratification de température de "base". Il en est de même en météorologie : il existe un gradient de température entre le sol et la limite de l'atmosphère.

Du point de vue du thermicien, on retiendra que le Nusselt vaut 1, pour $Ra < 1708$, puis qu'il augmente fortement dès que l'on passe ce seuil (qui correspond à la mise en mouvement du fluide), *grosso modo* il finit par croître en $Ra^{1/3}$. La valeur 1/3 est approximative et provient de mesures expérimentales, on constate donc que la turbulence favorise fortement les échanges de chaleur !

4.5. Panaches..

C'est un cas facilement observable dans la nature (cheminées...). Tout comme le jet est la contrepartie de l'écoulement de plaque plane, le panache ("*plume*") est la contrepartie de l'écoulement de convection libre sur une plaque plane. De même que loin de l'orifice on peut dire qu'un jet 2D est issu d'une ligne qui est source de quantité de mouvement, il s'agira d'une source de chaleur. On a alors conservation du transport de chaleur le long de l'axe vertical x :

$$\frac{d}{dx} \int u \Delta T dy = 0$$

En revanche le flux de quantité de mouvement augmente de par l'action de la poussée d'Archimède. Tout comme les jets, les panaches sont très instables et n'existent pratiquement que sous forme turbulente.

4.6. Conclusion

À retenir : l'approximation de Boussinesq. Grâce à elle, on transforme un fluide faiblement dilatable en un fluide incompressible mais avec un terme de force d'Archimède. Le nombre sans dimension pertinent est le nombre de Grashof 1826-1893 (ou son faux jumeau le nombre de Rayleigh). Les équations sans dimension (en négligeant la dissipation visqueuse) à résoudre sont couplées (au sens où la dynamique et la thermique sont liées et qu'il faut connaître les conditions aux limites en vitesse et en température pour résoudre).

Cette approximation n'est pas mauvaise pour les liquides mais est à manier avec précautions pour les gaz. Dans tous les cas on ne chauffera pas trop !

Des phénomènes très variés peuvent se produire : écoulements pariétaux ou rouleaux ou hexagones...

4.7. Bibliographie ¹

- J. Boussinesq, (1901-03): "Théorie analytique de la chaleur", Gauthier Villars.
 Adrian Bejan (2013) "Convection Heat Transfer, Fourth Edition" Willey
 H. B. Callen (1960) "Thermodynamics", J Wiley & sons.
 S. Chandrasekhar (1961) "Hydrodynamic and hydromagnetic Stability" Dover.
 J.S. Darrozès & C. François (1996) "Mécanique des fluides incompressibles" Ed ENSTA.
 P.G. Drazin and W.H. Reid (1981) "Hydrodynamic Stability", Cambridge University Press.
 H. Gersten & H. Herwig (1992) "Strömungsmechanik" Ed. Viewig.
 A. Giovannini & B. Bédard (2012) "Transfert de Chaleur" Cépaduès Ed.
 P.-Y. Lagrée, cours ENSTA, Convection Naturelle.
 L. Landau & E. Lifshitz (1989) "Mécanique des fluides" ed MIR.
 A. Leontiev (1985) "Théorie des échanges de chaleur et de masse" ed. MIR.
 P. La Quéré (2008) "On the computation of some external or partially enclosed natural convection flows" The 19th International Symposium on Transport Phenomena
 P. Manneville (1990) "Structures dissipatives chaos & turbulence", Aléa Saclay.
 F. Sacadura (1993) "Initiation aux transferts thermiques", Lavoisier Tec & Doc.
 H. Schlichting (1987) "Boundary layer theory" Mac Graw Hill.
 M. Van Dyke (1982) "An album of fluid motion", Parabolic Press.

1. 14 avril 2019

page blanche