

III. Convection Forcée

Résumé

Dans ce chapitre, nous allons voir comment un courant de fluide s'écoulant sur une paroi chaude va refroidir celle-ci. C'est la convection forcée (*Forced convection*, *convezione forzata* en italien, *convecção forçada* en portugais). D'abord nous simplifions les équations en nous plaçant dans le cadre incompressible, cela permet de découpler les équations thermiques et dynamiques. Nous introduirons les nombres sans dimension de la thermique (Péclet, Eckert, Prandtl et Nusselt) et nous examinerons leur influence par analyse phénoménologique. Le cas des tubes (problème de Graetz, problème de Lévêque en PC) et le cas de la plaque plane sans gradient de pression (problème de Blasius) seront étudiés, ce sont les archétypes de tous les problèmes thermiques internes (Graetz) et externes (Blasius). A l'issue de chaque analyse (convection interne ou externe), on trouve le flux d'énergie à la paroi si la température est imposée ou la température si le flux est imposé, puis on construit le nombre de Nusselt et le coefficient d'échange.

3.1. Problème général de thermique (fluide incompressible)

3.1.1. Le problème complet simplifié :

Le problème général pour un fluide compressible a été posé au chapitre premier. Toutes les équations étaient à résoudre simultanément. Le chapitre second nous a fait comprendre l'importance de l'estimation des transferts aux bords du domaine. La suite du cours est principalement consacrée (sauf mention contraire) à la résolution des équations de la thermique pour un écoulement de fluide incompressible newtonien.

Cela nous permet de simplifier drastiquement les équations.

On introduit l'hypothèse d'incompressibilité qui est une hypothèse dynamique : $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, la conservation de la masse nous dit alors que la densité est constante le long d'une ligne de courant.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Cette simplification est valide dans le cas des liquides, dans le cas des gaz en revanche, elle est plus restrictive : il est en effet très intuitif que si on chauffe un gaz à pression constante sa densité décroît. L'effet du chauffage sur la variation de densité et le mouvement éventuel associé sera examiné dans un chapitre ultérieur (convection naturelle).

La viscosité est prise constante par rapport à la température, on peut donc faire apparaître le Laplacien de la vitesse dans la divergence du tenseur des contraintes :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau} + \underline{f}.$$

comme $\underline{\tau} = \lambda \nabla \cdot \underline{u} \underline{I} + 2\mu \underline{D}$, le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} se réduit à $2\mu D_{ij}$; la divergence $\tau_{ij,j}$ (convention d'Einstein) devient simplement $\mu u_{i,jj}$. On reconnaît la viscosité multipliée par le Laplacien de la vitesse :

$$\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \underline{f}.$$

On rappelle que la variation d'énergie interne ne tient compte que la puissance des efforts intérieurs ($\underline{\sigma} : \underline{D}$) plus les échanges de chaleur ($-\nabla \cdot \underline{q} + r$) :

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \nabla \cdot \underline{u} + \underline{\tau} : \underline{D} - \nabla \cdot \underline{q} + r.$$

et le théorème de l'énergie cinétique est la variation d'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des efforts intérieurs ($\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$) et extérieurs ($\underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$) qui s'exercent sur le volume de contrôle.

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} - \underline{\tau} : \underline{\underline{D}} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) + \underline{u} \cdot \underline{f}$$

la somme des deux est bien la forme conservative présentée dans le tableau du chapitre 1.

On va supposer aussi que $k(T)$ est une constante donc, l'opposé de la divergence du flux de densité de chaleur \underline{q} se réduit au Laplacien

$$-\underline{\nabla} \cdot (-k \underline{\nabla} T) = k \underline{\nabla}^2 T$$

On a par définition de la variation de l'énergie interne par les apports de chaleurs de dissipation visqueuse, de diffusion thermique et de travail mécanique : (avec $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \lambda \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$ et $\underline{q} = -k \underline{\nabla} T$)

$$\rho \frac{de}{dt} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + r \text{ soit } \rho \frac{de}{dt} = k \underline{\nabla}^2 T + \lambda (\underline{\nabla} \cdot \underline{u})^2 - p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + 2\mu (\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}) + r.$$

Nous étudions ici pour commencer des fluides homogènes de densité constante, l'énergie interne ne dépend donc que de la température et on écrira :

$$de \simeq c_p(T) dT.$$

Cette **approximation** sera discutée dans le cas de la couche limite compressible et dans le cadre du chapitre sur la convection libre du prochain chapitre. Nous y établirons la relation suivante qui est l'équation de la chaleur en tenant compte d'effets de compressibilité :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dt} = k \underline{\nabla}^2 T + \lambda (\underline{\nabla} \cdot \underline{u})^2 + 2(\mu \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}) + r.$$

Disons simplement pour l'instant que l'écart entre le c_p et le c_v est lié à la compressibilité du fluide, et que pour un liquide incompressible c_p est environ égal à c_v . On simplifie encore davantage en supposant que $c_p(T)$ est constant sur la plage de température étudiée.

3.1.2. Le problème de la convection forcée

Soit donc un solide contenu dans fluide, les deux ont des caractéristiques qui sont supposées constantes. Le problème de la "convection forcée" à résoudre est :

- équations dynamiques (Navier Stokes)

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0.$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) = -\underline{\nabla} p + \underline{f} + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}.$$

- équation de la chaleur en incompressible

$$\rho c_p \left(\frac{\partial}{\partial t} T + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T \right) = k \underline{\nabla}^2 T + 2(\mu \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}) + r.$$

- équation de la chaleur dans le solide

$$\rho c_s \left(\frac{\partial}{\partial t} T \right) = k_s \underline{\nabla}^2 T.$$

- conditions aux limites

adhérence à la paroi, vitesse imposée au loin.

égalité des températures et des flux normaux aux parois

C'est le système complet à résoudre... Il est remarquable que les problèmes dynamiques et thermiques sont **découplés**. La température n'influence pas la vitesse. C'est pour cela que l'on peut résoudre les équations de Navier Stokes incompressibles sans se soucier de la température.

Malgré la perte de généralité introduite par l'hypothèse d'incompressibilité (on se restreint aux liquides et au gaz à faible vitesse avec un chauffage faible), et malgré le fait que les coefficients soient pris constants par rapport à la température, ces équations restent très difficiles à résoudre. On peut considérer que ces équations suffisent pour résoudre de nombreuses situations physiques ; en fait, leur analyse servira pour dimensionner un problème, extraire une description simple pour ensuite guider la résolution numérique qui se fera avec un code performant.

3.1.3. Le problème de convection forcée pour le fluide sans conduction dans le solide

Si on oublie le solide, il faut résoudre les équations pour le fluide en imposant la température **ou** le flux **ou** une condition liant les deux à la paroi.

- équations dynamiques

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0.$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) = -\underline{\nabla} p + \underline{f} + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}.$$

- équation de la chaleur en incompressible

$$\rho c_p \left(\frac{\partial}{\partial t} T + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T \right) = k \underline{\nabla}^2 T + 2(\mu \underline{D} : \underline{D}) + r.$$

- conditions aux limites pour la vitesse
 - un écoulement au loin imposé
 - adhérence à la paroi.
- conditions aux limites pour la température

soit

- température imposée à la paroi,

soit

- flux imposé à la paroi.

soit

- condition avec le flux et le coefficient d'échange

Il y a découplage entre le fluide et le solide, la résolution de l'équation de la température est aussi découplée de la résolution dynamique. Ces équations sont les **équations de la convection forcée**.

3.2. Analyse de l'équation de la chaleur

3.2.1. Température adimensionnée

Prenons les différents termes des équations et évaluons leur poids relatif pour simplifier encore. Pour cela on adimensionne, on fait apparaître des groupements sans dimension puis on interprète chaque terme ; certains de ces nombres sont assez grands (ou assez petits), on se pose ensuite la question : que se passe-t-il si un des nombres est très très grand grand : infini (ou très très petit : nul)... ? On obtient le comportement asymptotique qui donne des indications fondamentales. C'est la bonne démarche pour simplifier les équations.

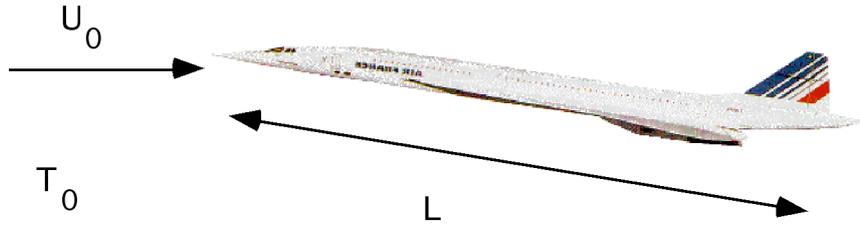


FIGURE 1 – Un objet de taille L dans un écoulement uniforme de vitesse U_0 .

On se donne donc une vitesse U_0 et une longueur L , *a priori* les mêmes dans toutes les directions :

$$u = U_0 \bar{u} \quad \text{et} \quad v = U_0 \bar{v}$$

$$x = L \bar{x} \quad \text{et} \quad y = L \bar{y}$$

U_0 sera la vitesse du fluide considéré ou de la paroi... L est la taille pertinente du système. La subtilité du choix de L et U_0 a déjà été discutée lors de l'introduction des nombres sans dimension (en couche limite). Le premier problème est celui du choix de la jauge de la température T , *a priori* on pense l'écrire sous la forme :

$$T = T_0 \bar{T},$$

où T_0 est (par exemple) la température du fluide loin de la paroi (ou au contraire la température de la paroi, au choix). Or les hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons sont telles que la variation de température n'est pas trop forte (pour respecter entre autre l'incompressibilité). On va donc écrire de manière générale que la température est de la forme :

$$T = T_r + (\Delta T) \bar{T},$$

où T_r est une température de référence (par exemple T_0 , la température du fluide loin de la paroi qui serait disons à la température T_w , "w : wall" bien entendu T_p avec "p : paroi" va très bien aussi) et ΔT un écart de température tel que $\Delta T/T_r$ ne soit pas trop grand (si $(\Delta T)/T_r$ est au final grand, il faut résoudre Navier Stokes compressible complet). La jauge de la température sera par exemple construite avec l'écart de température entre le fluide T_0 et la paroi T_w .

$$T = T_0 + (T_w - T_0) \bar{T} \quad \text{avec} \quad \bar{T}_{paroi} = 1.$$

Mais on n'est pas obligé de privilégier T_0 , on peut donc poser :

$$T = T_w + (T_0 - T_w) \bar{T} \quad \text{et avec} \quad \bar{T}_{paroi} = 0 \quad \text{ou} \quad T = T_w + (T_w - T_0) \bar{T} \quad \text{et attention} \quad \bar{T}_{paroi} = -1.$$

Lorsque le flux est imposé à la paroi (q_w), il sera en revanche plus judicieux de construire (ΔT) avec cette expression, une possibilité simple serait :

$$(\Delta T) = (q_w) L / k.$$

Anticipons sur la suite : la température variera dans l'épaisseur de la couche limite thermique, si elle existe, le bon dimensionnement sera donc $(\Delta T) = k^{-1} (q_w \delta_{Thermique})$. Remarquons que si le flux à la paroi est nul, ce qui est le cas de la paroi athermane (parfaitement isolée), l'ordre de grandeur de (ΔT) est imposé par l'analyse phénoménologique (*c.f.* le § suivant et la définition du nombre d'Eckert). Il y a donc au moins trois possibilités de définition de la température.

3.2.2. équation de la chaleur sans dimension :

Ayant posé l'échelle (ΔT) (c.f. plus haut), l'équation de l'énergie s'écrit en variables extérieures :

$$S \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + (\bar{\underline{u}} \cdot \bar{\underline{\nabla}}) \bar{T} = \frac{1}{Pe} \bar{\underline{\nabla}}^2 \bar{T} + 2 \frac{E}{Re} \bar{\underline{\underline{D}}} : \bar{\underline{\underline{D}}}$$

et on veut trouver la température ou le flux en particulier à la paroi, on cherchera à déterminer le nombre de Nusselt Nu qui est un résultat du calcul puisque c'est l'ordre de grandeur du flux final sans dimension.

- S est le nombre de Strouhal, c'est le rapport entre le temps "convectif" L/U_0 et un temps caractéristique dépendant par exemple des conditions aux limites (si on fait varier la température de la paroi).

- $Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$ est le nombre de Reynolds, il nous est bien connu, (d'autres nombres sans dimension de la dynamique que nous connaissons déjà peuvent intervenir dans l'équation de la quantité de mouvement comme le nombre de Froude...). On écrit aussi le nombre de Reynolds avec la viscosité dynamique : $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$.

- Pe est le nombre de Péclet, c'est le pour ainsi dire le "frère" de Reynolds $Pe = \frac{\rho c U_\infty L}{k}$, si on pose $a = k/(\rho c)$ la diffusivité thermique alors $Pe = \frac{U_\infty L}{a}$.

$$Pe = Re P_r$$

où P_r est le nombre de Prandtl $P_r = \mu c/k = \nu/a$. C'est un nombre intrinsèque qui ne dépend que du fluide considéré. Le nombre de Péclet est en facteur du terme de diffusion. S'il est grand il va nous poser des problèmes tout comme le nombre de Reynolds lorsqu'il est grand... On conçoit que certains fluides (très particuliers) se prêteront à des simplifications ($P_r \gg 1$ ou $P_r \ll 1$).

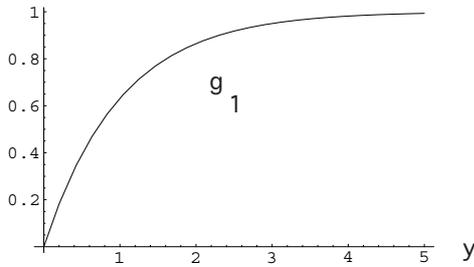
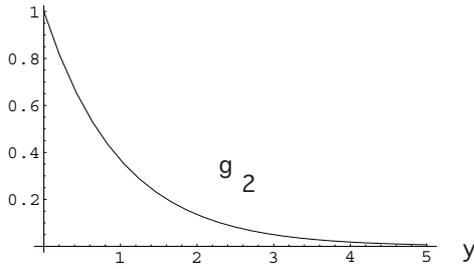
- $E = \frac{U_\infty^2}{c(\Delta T)}$, est le nombre d'Eckert. Il est en terme de source, E/Re est le nombre qui jauge la contribution relative d'élévation de ture par dissipation, c'est aussi $E P_r / Re$. On remarque qu'il est le seul à dépendre de la jauge de température.

Si (ΔT) est connu E est connu.

Si en revanche (ΔT) n'est pas connu, ce terme est celui qui "échauffe" il permet donc de déterminer (ΔT) par moindre dégénérescence (c'est principalement le cas quand la paroi est adiabatique, voir aussi le début de la PC 2).

Remarquons que si on choisit comme jauge T_∞ , la température loin de l'obstacle, et que l'on travaille avec un gaz compressible à divergence non nulle, (il faut résoudre $\partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0...$) on peut faire apparaître le nombre de Mach : $M_\infty^2 = \frac{U_\infty^2}{\gamma r T_\infty} \dots$

- $Nu = \frac{\phi}{k(T_w - T_\infty)}$ est le nombre de Nusselt avec $\phi = -k \frac{\partial T}{\partial n}$ la valeur du flux de chaleur à la paroi. C'est le résultat du calcul.



Pour lever l'ambiguïté du choix de la température de référence T_w ou T_∞ , soit on choisit l'une ou l'autre, cela donne deux descriptions pour la température :

$$T_1 = T_w + (T_\infty - T_w)g_1$$

$$T_2 = T_\infty + (T_w - T_\infty)g_2$$

Le Nusselt est

$$-L \frac{\partial T_1}{\partial y} / (T_w - T_\infty) = L \frac{\partial g_1}{\partial y} > 0$$

$$-L \frac{\partial T_2}{\partial y} / (T_w - T_\infty) = -L \frac{\partial g_2}{\partial y} > 0$$

il est bien positif dans les deux cas!

3.2.3. Quelques conclusions faciles :

- S : on le suppose égal à un pour un maximum de généralité. Le prendre très grand va faire disparaître les dérivées spatiales ($\underline{\bar{u}} \cdot \underline{\bar{\nabla}}$) le fluide se transforme en solide ce qui n'est pas l'objet de ce cours! On supposera souvent l'écoulement stationnaire $S = 0$: ce qui veut dire que le temps d'établissement est très court par rapport au temps de transport.

- si $Pe \ll 1$ et $EP_r \ll 1$, on est dans un cas où le transfert de chaleur se fait comme dans un solide (stationnaire si $S < 1$, instationnaire si $SPe \sim 1$) : la vitesse du fluide est trop faible. La résolution est facilitée. Si $EP_r \sim 1$, il y a un terme source en plus.

- $P_r \gg 1$ le fluide est mauvais conducteur (l'équation de la chaleur en $(P_r Re)^{-1}$ diffuse moins que l'équation dynamique en Re^{-1}).

- $P_r \ll 1$ le fluide est bon conducteur $(P_r Re)^{-1} \gg Re^{-1}$.

- Si $E \ll 1$, il y a entraînement et diffusion sans source volumique. Souventes fois E sera pris petit et négligeable quand la température est imposée au loin et à la paroi car les vitesses sont faibles, et c est "grand". Mais attention, dans le cas de l'huile visqueuse (pour les huiles P_r est très grand), entre des paliers ce terme peut être important car la vitesse est faible, Donc EP_r peut être suffisant pour que la température passe par un maximum entre les paliers.

Ce terme de dissipation visqueuse est aussi fondamental lorsque la paroi est adiabatique puisque c'est ce terme qui dimensionne l'élévation de la température.

- Soit Pe est petit, et dans ce cas EP_r doit être d'ordre un, ce qui veut dire que l'élévation de température est liée à la diffusion visqueuse, en posant $EP_r = 1$:

$$(\Delta T) = \frac{\mu U_0^2}{k}$$

ce cas peut intervenir entre deux paliers en écoulement interne.

- Soit Pe est grand, le terme de diffusion est négligeable. Dans ce cas la chaleur créée par la dissipation visqueuse (qui est d'ordre E/Re) est convectée (ordre 1) par l'écoulement, en posant

$$\frac{U_\infty^2}{c(\Delta T)Re} = 1 :$$

$$(\Delta T) = \frac{\nu U_\infty}{cL}$$

• si Pe est très grand (E petit pour fixer les idées), le terme de dérivée élevée disparaît : la conduction n'a pas le temps de jouer son rôle, la température n'est pas modifiée lorsque le fluide rencontre l'obstacle. On retrouve la problématique des écoulements de fluide parfait (la vitesse n'a pas le temps de varier de U_0 à 0 lorsqu'elle passe sur l'obstacle). Il y a alors un problème grave : on ne peut plus satisfaire toutes les conditions aux limites... Il va falloir introduire une couche limite dans laquelle la température varie très vite.

3.3. Convection forcée interne

3.3.1 Observations d'une couche limite dans un tuyau

On va traiter du problème d'entrée qui est fondamental en plomberie : comment varie la température dans une canalisation qui passe du sol froid à une pièce chaude, l'eau sera-t-elle trop chaude pour être bue au robinet bleu ? Plus généralement, il s'agit d'une première approche du problème de l'échangeur thermique : quelle doit être la longueur minimale de refroidissement pour baisser la température d'un fluide (par exemple la vapeur dans un échangeur de centrale nucléaire...)

Soit donc un tuyau assez long pour que le régime d'entrée soit hydrodynamiquement établi en un régime d'écoulement de Poiseuille de vitesse caractéristique U_0 . Soit D le diamètre qui est choisi comme unité de longueur caractéristique. Le nombre de Péclet sera $\rho c_p U_0 D / k$. Le tuyau est maintenu à une température T_0 avant une certaine section choisie comme origine des abscisses x puis à une température T_1 au delà.

Pour résoudre, il se pose le problème des conditions aux limites autres qu'à la paroi. A l'entrée, on peut penser imposer $T = T_0$, ce qui traduirait un équilibre de température entre la paroi et le fluide. C'est en fait faux lorsque le nombre d'Eckert n'est pas nul : il y a un terme source volumique. Nous imposons donc plutôt l'invariance par translation du profil de température $\partial T / \partial x = 0$, cela signifie que l'écoulement est établi depuis une longue distance, ce qui revient à dire que la température a oublié les détails de son histoire. à la sortie, nous imposons aussi l'invariance par translation : $\partial T / \partial x = 0$ (le régime est ré établi en température, il a oublié la variation brusque de température).

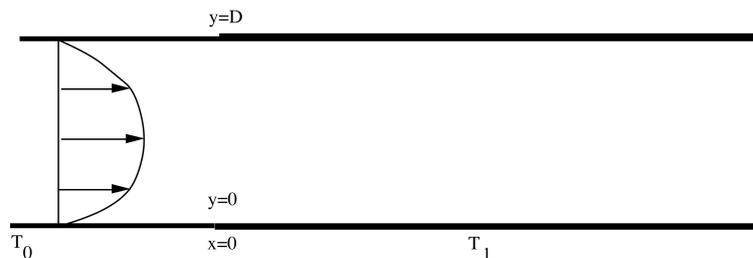


FIGURE 2 – écoulement 2D de Poiseuille entre deux plaques plane, l'écoulement est le même partout, la température de la paroi est discontinue en $x = 0$.

Examinons cet exemple très simple avec FreeFEM, trichons un peu en examinant non pas un tuyau, mais deux plaques parallèles. Un programme typique de résolution est donné dans l'Annexe du chapitre 2.

En faisant varier le poids relatif des différents paramètres on retrouve les différents régimes évoqués plus haut, visibles sur les lignes iso températures.

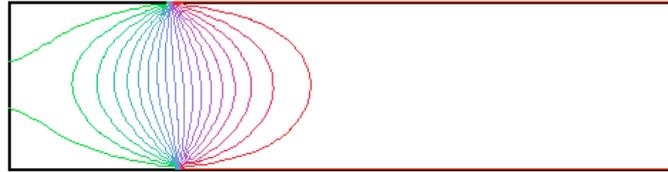


FIGURE 3 – • Si Eckert est petit et si Pe est très petit : Le fluide est un "solide", le résultat est symétrique (à l'effet de bord près la condition $\partial T/\partial x=0$ qui déforme les isothermes car l'accident est trop près de l'entrée).

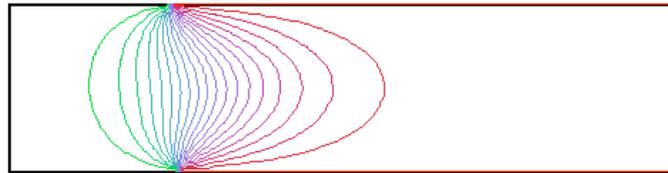


FIGURE 4 – • Si Eckert est petit, on a augmenté Pe : La vitesse est suffisante pour convecter légèrement la température vers la droite...

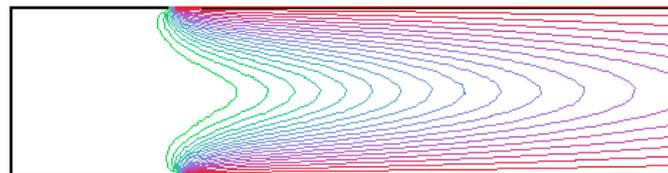


FIGURE 5 – • Si Eckert est petit et Pe encore plus grand : La convection est de plus en plus forte...

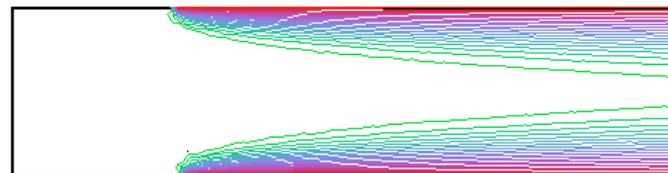


FIGURE 6 – • Si Eckert est petit et Pe de plus en plus grand : Deux belles couches limites se dégagent... L'effet de la condition de sortie n'est pas visible, mais on se doute que cette condition $\partial T/\partial x = 0$ n'est pas la bonne puisque les deux couches limites ne se sont pas encore réunies...

3.2.4. Conclusion de ces observations

Nous venons d'observer que l'augmentation du nombre de Péclet Pe finit par provoquer des couches limites d'épaisseur $\delta_{th} \ll L$. Cette épaisseur est une nouvelle longueur qui dépend des nombres sans dimension caractérisant l'écoulement. Il s'agit de régions de fort gradient près des parois. Retenons dès à présent qu'il existe au moins trois jauges de température :

- soit $(T_w - T_0)$
- soit $(q_w)\delta_{th}/k$
- soit $\frac{\nu U_0}{cL}$.

Examinons de manière plus complète le problème d'entrée dans un tuyau (problème de convection forcée interne), puis nous examinerons le cas de la plaque plane (problème de convection forcée externe).

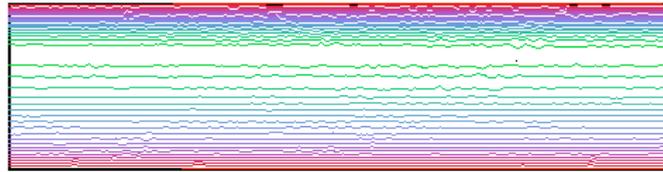


FIGURE 7 – • si Pe trop grand : ça ne marche plus ! Les couches limites sont noyées dans l'épaisseur de maille... Le résultat, même s'il est "calculé", n'a pas de sens...

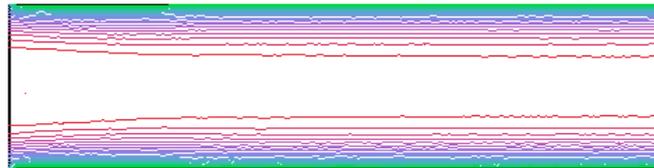


FIGURE 8 – • Si Eckert est important et si Pe est $0(1)$. L'élévation de température est due au terme de dissipation visqueuse, si cette dissipation est très importante, le saut de température de paroi est noyé... (on distingue un léger décalage vers les parois du bas et du haut des isos en $x < 0$)

3.2.4 Le problème asymptotique d'entrée dans les tubes, problème de Graetz (à nombre d'Eckert nul).

Dans un tube, loin de l'entrée le régime est établi suivant le profil de Poiseuille (*c.f.* PCn° 2), la température est uniforme et vaut T_0 (on a $E = 0$, pas de terme source du aux frottements visqueux). On pose :

$$u = U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right), \quad T = T_0 + (T_p - T_0)\bar{T}.$$

L'ordre de grandeur des distances est R le rayon du tuyau, en prenant ces échelles on a :

$$x = R\bar{x}, \quad r = R\bar{r}, \quad u = U_0\bar{u}.$$

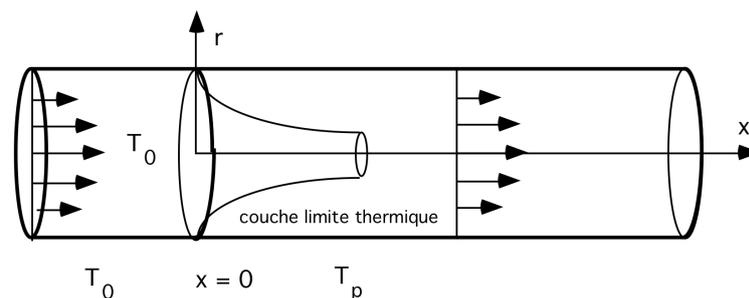


FIGURE 9 – Le tuyau, un écoulement établi de Poiseuille à température constante T_0 rencontre un changement brusque de température de paroi T_p .

- Le problème sans dimension à résoudre dans la conduite annulaire est :

$$(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right),$$

avec $\bar{T}(\bar{x} < 0, \bar{r} = 1) = 0$, $\bar{T}(\bar{x} > 0, \bar{r} = 1) = 1$, on a besoin d'imposer la symétrie au centre $\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = 0$. Bien entendu

$$Pe \gg 1.$$

• Pour passer la discontinuité longitudinale de température de paroi qui passe de 0 à 1 en $\bar{x} = 0$, $\bar{r} = 1$; on va focaliser sur ce point en prenant (c'est ce qu'il y a de plus naturel une échelle identique longitudinalement et transversalement) : $\bar{x} = \varepsilon \tilde{\xi}$ et $\bar{r} = 1 - \varepsilon \tilde{\zeta}$ au voisinage du point de changement de température, et on pose $T = T_0 + (T_p - T_0)\tilde{\theta}$. Pour $\varepsilon = Pe^{-1/2}$, on garde des termes de dérivées seconde :

$$\tilde{\zeta} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\xi}} = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\zeta}^2},$$

$$\tilde{\theta}(\tilde{\xi} < 0, 0) = 0, \tilde{\theta}(\tilde{\xi} > 0, 0) = 1, \tilde{\theta}(\tilde{\xi}, \infty) \rightarrow 0.$$

La résolution numérique nous montre des lignes iso température ayant la forme suivante :

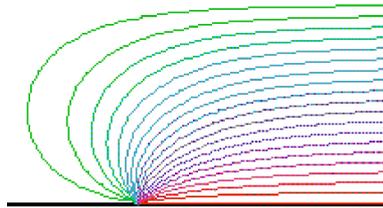


FIGURE 10 – Lignes iso température au voisinage de $x = 0$, à l'échelle de la longueur visqueuse.

On observe donc bien la remontée de l'information en avant de la discontinuité. Pour mémoire, sachons que l'on peut résoudre ce problème par transformation de Fourier ($e^{ik\tilde{\xi}}$). La solution (après beaucoup de calculs, cf Pedley) se développe, pour $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ (i.e. k grand) en :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{\xi}, 0)}{\partial \tilde{\xi}} \sim 3^{1/3} \Gamma(2/3) / \Gamma(1/3)^{3/4} (\pi \tilde{\xi})^{-1/2},$$

et pour $\tilde{\xi} \rightarrow \infty$ (i.e. k petit) en :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(\tilde{\xi}, 0)}{\partial \tilde{\xi}} \sim (3^{5/6}) \Gamma(2/3) (2\pi \tilde{\xi})^{-1/3}.$$

On retrouve la solution de Lévêque loin de la discontinuité de température que nous développons au point suivant et que nous avons déjà vue en PC! Nous retrouvons effectivement ce problème dans la suite.

• Dans le problème sans dimension à résoudre :

$$(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right).$$

si Pe tend vers l'infini, il ne reste que :

$$(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = 0.$$

La température reste constante le long d'une ligne de courant : elle reste nulle. Il faut donc introduire une couche limite. Posons $\tilde{r} = (1 - \bar{r})/\varepsilon$. Après choix de $\varepsilon = (2Pe)^{-1/3}$ par moindre dégénérescence et réduction on a :

$$\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{r}^2} \right).$$

avec $\tilde{T}(\tilde{x} > 0, 0) = 1$, $\tilde{T}(\tilde{x} < 0, \tilde{r}) = 0$, $\tilde{T}(\tilde{x} > 0, \infty) = 0$. C'est une équation de type parabolique, la solution a été vue en PC :

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3}, \frac{\tilde{r}^3}{9\tilde{x}})}{\Gamma(\frac{1}{3})}$$

avec la fonction Gamma incomplète généralisée : $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ Ce problème est le problème de Lévêque (1921).

• Observons maintenant ce qui se passe en aval lorsque la couche limite envahit toute la conduite, si on est loin en aval, soit X la nouvelle variable longitudinale de travail, $X = \varepsilon \tilde{x}$. Ce X est d'ordre un car \tilde{x} est grand, si on veut ou peut aussi écrire $\tilde{x} = \frac{X}{\varepsilon}$. Bien entendu la variable \bar{r} reste inchangée, car justement les variations sont au travers de la conduite. On pose classiquement $T = T_p + (T_0 - T_p)\theta$, (ce choix est plus judicieux que $T = T_0 + (T_p - T_0)\theta$ car il permet d'avoir des conditions nulles sur la paroi ce qui simplifie la résolution en variables séparées), l'équation de la chaleur devient par les changements d'échelles précédents :

$$\varepsilon(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right)$$

d'où, si on choisit par moindre dégénérescence $\varepsilon = 1/Pe$ et comme $\varepsilon \ll 1$:

$$(1 - \bar{r}^2) \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}}.$$

avec les conditions aux limites :

$$\theta(X > 0, \bar{r} = 1) = 0, \quad \theta(X = 0, \bar{r}) = 1, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}}(X, 0) = 0.$$

Il s'agit du problème de Graetz (1882) dont la résolution (par W. Nußelt) est un morceau de bravoure de la "Thermique". L'idée simplement à retenir est qu'il faut passer par une somme de solutions en variables séparées :

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta_n(\bar{r}) \Phi_n(X).$$

La méthode est exactement la même que pour l'équation de la chaleur dans un solide, mais le terme de dérivée temporelle ∂_t est transformé en un terme de dérivée spatiale $(1 - \bar{r}^2) \partial_X$. Par séparation des variables Φ_n est une exponentielle en X de la forme $\Phi_n = \exp(-\lambda_n^2 X)$, tandis que θ_n vérifie une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \theta_n}{\partial \bar{r}} \right) + \lambda_n^2 \bar{r} (1 - \bar{r}^2) \theta_n = 0, \quad \theta_n(\bar{r} = 1) = 0, \quad \theta_n'(0) = 0 \quad (1)$$

qui pour une fois ne permet pas de retomber sur des cosinus ou des Bessels mais sur des fonctions spéciales, mettant en jeu des polynômes de Laguerre,

$$y = L_n(x) \quad \text{avec par définition} \quad xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

On trouve ainsi pour solution : $\theta_n(\bar{r}) = \frac{\sqrt{2\sqrt{\bar{r}^2}} e^{-\frac{\lambda_n \bar{r}^2}{2}} L_{\frac{\lambda_n - 2}{4}}(\lambda_n \bar{r}^2)}{\Gamma(\frac{\lambda_n}{4})}$, (on peut aussi utiliser les fonctions hypergéométriques $e^{-\lambda_n^2 \bar{r}^2/2} {}_1F_1\left(1/2 - \frac{\lambda_n}{4}; 1; \lambda_n \bar{r}^2\right)$ avec les λ_n bien choisis, c'est à dire de manière à

ce que $\theta_n(1) = 0$.

Numériquement (on a utilisé *Mathematica*) on trouve $\lambda_0 = 2.70436$, $\lambda_1 = 6.67903$, $\lambda_2 = 10.6734$, $\lambda_3 = 14.6711$ etc.

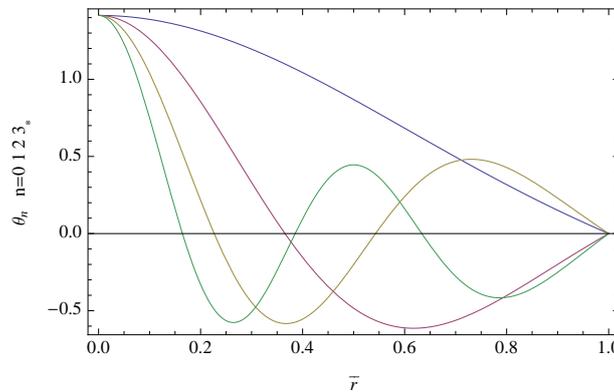


FIGURE 11 – Les quatre premiers modes de la série de fonctions de Graetz.

La forme du problème (1) est celle d'un problème de "Sturm Liouville", à cette équation est associée un produit scalaire $\langle \theta_i, \theta_j \rangle = \int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2)\theta_i\theta_j d\bar{r}$. Ce produit vient du fait que l'on peut combiner deux équations différentielles (1), une sur θ_i l'autre sur θ_j en les multipliant par θ_j et θ_i :

$$\theta_j \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \partial \theta_i}{\partial \bar{r}} \right) - \theta_i \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \partial \theta_j}{\partial \bar{r}} \right) = (\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \bar{r}(1 - \bar{r}^2) \theta_i \theta_j$$

intégré par partie cela donne pour le membre de gauche $\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \theta_j \frac{\partial \theta_i}{\partial \bar{r}} \right) - \bar{r} \theta_i \frac{\partial \theta_j}{\partial \bar{r}} \right) d\bar{r}$ qui est nul par les conditions aux limites, donc le membre de droite, qui est la définition de ce produit scalaire est bien : $\int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2)\theta_i\theta_j d\bar{r} = 0$. Cette remarque sur l'orthogonalité justifie donc bien la décomposition en somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta_n(\bar{r}) \Phi_n(X)$.

Comme la température vaut 1 en $X = 0$, nous exploitons cette décomposition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta_n(\bar{r}) = 1.$$

Par projection sur θ_n , on en déduit la séquence des a_n :

$$a_n = \frac{\int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2)\theta_n d\bar{r}}{\int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2)\theta_n^2 d\bar{r}}$$

ce qui donne

$$a_0 = 1.47644 \quad a_1 = -0.806124 \quad a_2 = 0.588762 \quad a_3 = -0.47585 \quad a_4 = 0.405022 \text{ etc}$$

Une subtilité du problème de Graetz-Nusselt est qu'il est plus pratique de définir un nombre de Nusselt sur l'écart entre la température moyenne et la température de paroi que sur l'écart entre la température initiale et la température de paroi. On doit définir une température moyenne spéciale sur la section en fonction de X qui est, non pas $\int_0^1 T(X, \bar{r}) d\bar{r}$ mais :

$$\theta_m = \frac{\int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2)T(X, \bar{r}) d\bar{r}}{\int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2) d\bar{r}}$$

En fait, cette moyenne vient naturellement car c'est le flux moyen convectif de température sur la section. On a donc

$$\theta_m = 4 \int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2)T(X, \bar{r})d\bar{r}$$

Calculons cette température moyenne à partir de $\theta(X, \bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta_n(\bar{r}) e^{-\lambda_n^2 X}$ moyenné

$$\theta_m = 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2) \theta_n(\bar{r}) d\bar{r} \right] \exp(-\lambda_n^2 X)$$

la moyenne de θ_n qui apparait peut être écrite en tenant compte aussi du fait que si on intègre (1) on obtient une relation entre $\theta'_n(1)$ le flux à la paroi du mode n et la moyenne de θ_n

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{r} \partial \theta_n}{\partial \bar{r}} \right) d\bar{r} = \theta'_n(1) = -\lambda_n^2 \int_0^1 \bar{r}(1 - \bar{r}^2) \theta_n d\bar{r}.$$

donc

$$\theta_m = -4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta'_n(1) \lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n^2 X}.$$

Reprenons la température $T = T_p + (T_0 - T_p)\theta(X, \bar{r})$, la moyenne de $T - T_p$ est $(T_0 - T_p)\theta_m$ et écrivons le flux à la paroi $\phi = -k \partial T / \partial r |_{r=R}$ Dans le cas du tube du problème de Graetz on définit classiquement le nombre de Nusselt par le rapport entre le flux à la paroi divisé par le flux construit avec la température moyenne dans le tuyau au sens précédent et avec le diamètre $2R$.

$$Nu_X = \frac{\phi}{\frac{k}{2R}(T_0 - T_p)\theta_m},$$

Insistons sur le fait que ce choix de température moyenne est original par rapport à la convection forcée où on prendra la température au loin. D'autre part, insistons sur le fait que la moyenne est une moyenne spéciale pondérée par la vitesse. Comme

$$\theta(X, \bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta_n(\bar{r}) e^{-\lambda_n^2 X} \text{ et } \phi = -(k(T_0 - T_p)/R) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta'_n(1) e^{-\lambda_n^2 X}$$

le Nusselt local est donc de la forme :

$$Nu_X = \frac{1}{2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta'_n(1) \exp(-\lambda_n^2 X)}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta'_n(1) \lambda_n^{-2} \exp(-\lambda_n^2 X)}$$

avec les valeurs suivantes issues de la résolution numérique de la série d'équations différentielles :

n	λ_n	a_n	$\theta'_n(1)$
0	2.704	1.48	-1.01
1	6.6779	-0.80	1.35
2	10.67	0.58	-1.57
3	14.67	-0.48	1.74
4	18.67	0.41	-1.90
...

de manière approchée pour n assez grand on a environ

$$\lambda_n \sim 4n + 8/3, \quad a_n \sim (-1)^n 2.85 \lambda_n^{-2/3}, \quad \theta'_n(1) \sim (-1)^{n+1} 0.711 \lambda_n^{1/3}$$

Pour $X \rightarrow \infty$, on voit que seul le rang $n = 0$ est dominant, donc $Nu_X \rightarrow (1/2)\lambda_0^2 \sim 3.66$, on peut considérer que le régime est établi (Nu_X est à 1% de la valeur finale) pour une longueur :

$$L = 0.11 RPe \quad (i.e. X = .11).$$

Pour $X \rightarrow 0$, on devrait retrouver la solution de Lévêque (*cf* PC), c'est effectivement ce que l'on observe lorsque l'on fait tendre X vers 0, on compare favorablement à :

$$Nu_x = 1.71 \frac{1}{(2xPe_D)^{1/3}}$$

Ces deux comportements s'observent bien sur la figure suivante où sont tracés (la variable en abscisse est logarithmique) la solution de Graetz, la solution de Lévêque et la valeur ultime de $Nu = 3.66$.

Une bonne formule approchée est (à 4% près pour $L/(Pe_D R) > 500$), en remettant les dimensions (L longueur à laquelle on se place et R rayon du tube) :

$$Nu_{approx} = 3.66 + \frac{0.127}{2L/(Pe_D D) + 0.0635(2L/(Pe_D D))^{1/3}}$$

• Finalement il reste aussi à étudier le cas trivial $\epsilon \ll 1/Pe$, on est loin en aval, $\partial_{\bar{r}}^2 \theta = 0$ et θ est trivialement constante car l'écoulement a oublié l'accident. Le fluide est à la température de la paroi.

En résumé :

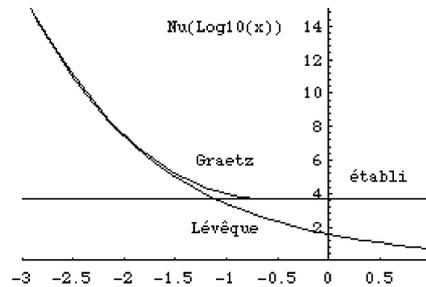


FIGURE 12 – Le nombre de Nusselt fonction de $Log_{10}(x)$, les trois régimes, le régime établi correspond à $Nu = 3.66$.

On voit bien que pour $x < 10^{-2}$, la solution complète (du problème de Graetz) et la solution asymptotique (du problème de Lévêque) sont confondues. On voit aussi que pour x peu supérieur à 10^{-1} on est presque arrivé au régime établi (Nusselt constant).

De manière schématique, les différentes régions sont :

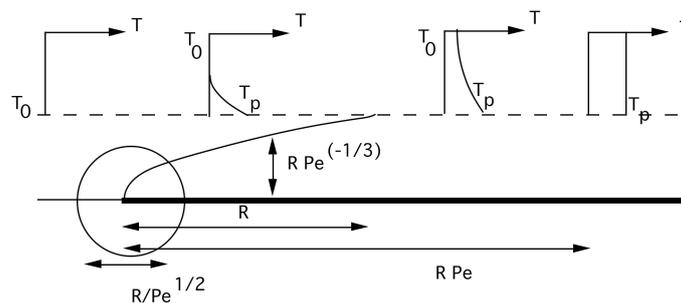


FIGURE 13 – les différentes échelles en jeux.

On retiendra que pour un tube, assez loin de l'entrée le Nusselt est de 3,66 si la température est imposée.

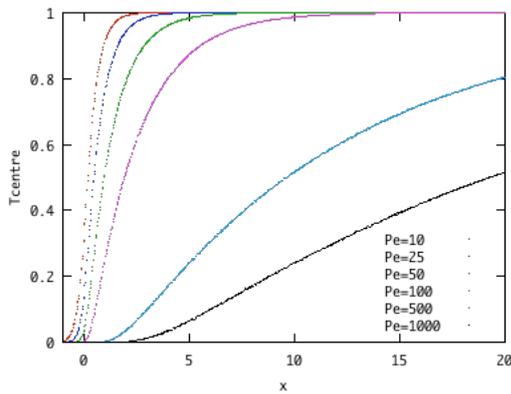


FIGURE 14 – température au centre pour différents Péclets fonction de x .

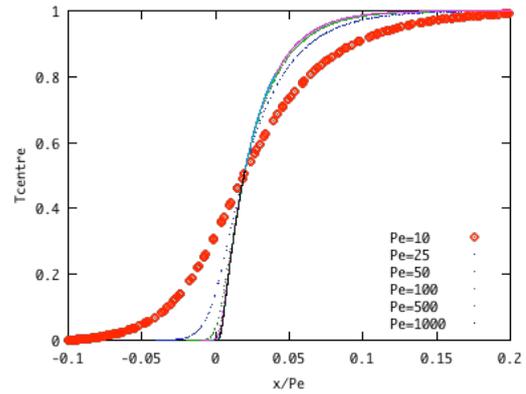


FIGURE 15 – la température au centre pour différents Péclets en fonction de x/Pe .

Retour sur le calcul numérique.

Traçons la température au centre du tuyau pour $Pe = 10, 25, 50, 100, 500$ et 1000 (à gauche).

Sur la figure précédente (à droite), on a tracé la température au centre du tuyau pour différents nombre Pe mais on a changé l'échelle en x (en la divisant par Pe). On retrouve bien que les courbes "collapsent" en une courbe unique pour Pe assez grand (environ $Pe = 75$).

Pour aller plus loin :

- Dans le cas du flux imposé, on peut montrer facilement que la température finit par être linéaire... et on aura assez loin (*i.e.* après une distance d'environ PeR) $Nu = 4,36$.

- On vient de chauffer le fluide, donc ρ et μ vont varier et donc modifier le champ des vitesses! c'est la rétroaction de la température sur le fluide $\mu(T)$. On peut facilement voir que si on suppose que l'élévation de température est faible ($O(\epsilon)$), et que si on pose un développement de la forme :

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \dots$$

que l'on substitue dans les équations, puis on développe en puissances de ϵ ... On obtient à l'ordre ϵ^0 le problème de Poiseuille précédent.

On en déduit que la perturbation introduite par le chauffage est une perturbation régulière...

- On note la liaison avec la PC 1, et la PC 2 : dans la PC 1, on étudie la solution générale de l'équation de la chaleur (ici la solution de Graetz), on observe la "couche limite temporelle" pour les temps courts (ici la solution de Lévêque, vue en PC 2 dans le cas plan).

3.4. Convection forcée externe

Nous venons de voir la convection forcée dans des tubes ou entre des plans, comme l'écoulement est confiné, cette convection forcée est qualifiée de "convection forcée interne". De même, s'il y a juste un obstacle autour duquel le fluide s'écoule, en étant libre de le contourner sans confinement, cette convection forcée est qualifiée de "convection forcée externe". Nous allons donc examiner l'écoulement le plus simple correspondant à cela, il s'agit de l'écoulement sur une plaque plane.

3.4.1 Couche limite thermique incompressible sur une plaque plane à température imposée

3.4.1.1. Equations

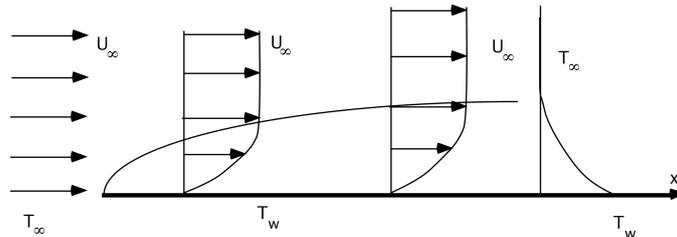


FIGURE 16 – La plaque

Un cas "simple" est celui de la plaque plane maintenue à la température uniforme T_w plongée dans un écoulement uniforme de vitesse U_∞ et de température T_∞ au loin, on suppose que le régime stationnaire est obtenu. On définit le nombre de Reynolds par $Re = U_\infty L / \nu$. Il est grand.

On se place à la distance L du bord d'attaque. Le problème thermique est alors :

$$(\underline{\bar{u}} \cdot \underline{\bar{\nabla}}) \bar{T} = \frac{1}{Pe} \underline{\bar{\nabla}}^2 \bar{T} + 2 \frac{E}{Re} \underline{\bar{D}} : \underline{\bar{D}},$$

et T connue sur la paroi (T_w) et au loin en amont et au loin tout en haut (T_∞). Si $Pe \rightarrow \infty$, à Pr fixé, il ne reste que :

$$(\underline{\bar{u}} \cdot \underline{\bar{\nabla}}) \bar{T} = 0$$

La température de la paroi n'échauffe pas le fluide. On avait le même problème avec l'équation de la dynamique, pour lever ce paradoxe, on avait introduit une couche limite $\delta = L / \sqrt{Re}$. On garde toujours la même échelle en x , mais on agrandit l'échelle transverse en y .

équations dynamiques

Les équations de la dynamique devenaient :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0,$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$$

Avec pour conditions aux limites $\tilde{u}(\bar{x}, 0) = 0$, $\tilde{u}(\bar{x}, \infty) = 1$. On en trouvait une solution semblable pour la fonction de courant ψ :

$$\psi = \bar{x}^{1/2} f(\eta), \quad \xi = \bar{x}, \quad \eta = \tilde{y} / \sqrt{\bar{x}}.$$

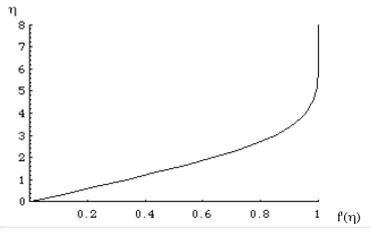


FIGURE 17 – $f'(\eta)$ profil de vitesse : f' en abscisse, η en ordonnée.

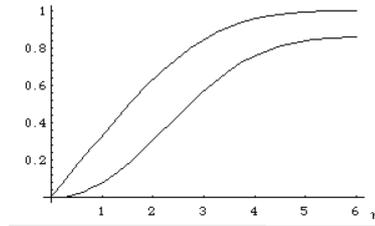


FIGURE 18 – vitesse longitudinale et transversale.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\tilde{u} = f'(\eta), \quad \tilde{v} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(\eta f' - f)$$

La partie dynamique admet donc la solution de Blasius bien connue : $\tilde{u} = f'(\eta)$, avec $\eta = \tilde{y}/\sqrt{\bar{x}}$ et telle que :

$$2f''' + ff'' = 0 \quad \text{avec} \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(\infty) = 1.$$

La résolution numérique par une méthode *ad hoc* de cette équation donne $f''(0) = 0.332$, et le profil de vitesse a l'allure suivante figure 17. On trace sur la figure 18 les vitesses $u(\eta) = f'(\eta)$ et $(\eta f' - f)$. On constate que la vitesse transverse à l'”infini” n'est pas nulle, il y a soufflage... la plaque perturbe le fluide parfait : $v \rightarrow 0.8604U \frac{1}{\sqrt{Re}} \bar{x}^{-1/2}$.

On en déduit l'épaisseur de déplacement δ_1 et le frottement à la paroi :

$$\delta_1 = 1.7208 \frac{L}{\sqrt{Re}} \bar{x}^{1/2}, \quad \text{et} \quad \tau = 0.332 \rho U^2 \frac{1}{\sqrt{Re}} \bar{x}^{-1/2},$$

Ce sont en fait les ordres de grandeur fondamentaux à retenir.

équation de la chaleur

Pour ce qui est de l'équation de la chaleur, il faut calculer $\underline{\underline{D}}$. Il n'y reste que les termes dominants en $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{y}}$, puis après contraction :

$$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} = \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2.$$

Comme on a posé $T = T_\infty + (\Delta T)\tilde{T}$, et $(\Delta T) = T_w - T_\infty$, l'équation de l'énergie s'écrit avec les variables de couche limite dynamique :

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{y}^2} + E \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2.$$

$$\tilde{T}(\bar{x}, 0) = 1, \quad \tilde{T}(\bar{x}, \infty) = 0.$$

Cette équation est en fait plus générale qu'il n'y paraît. Elle peut être appliquée pour un corps quelconque dès lors que la courbure de la paroi n'est pas trop forte. La coordonnée longitudinale x est alors l'abscisse curviligne s , la coordonnée y est prise le long de la normale locale (l'équation dynamique est en revanche différente, car il faut ajouter le terme de gradient de pression lié à la forme du profil).

3.4.1.2. résolution cas $E=0$ Les vitesses s'exprimant avec η , il est raisonnable de penser que s'exprime en fonction de η , posons $\tilde{T} = g(\eta)$. On a alors :

$$2g'' + Prfg' + 2EPrf'^2 = 0.$$

Une solution évidente de cette équation est obtenue pour le jeux de paramètres suivants : $Pr=1$ et $E = 0$! Elle devient $2g'' + fg' = 0$, qui est l'équation de Blasius si $g' = Kf''$, la solution est évidente :

$$g = 1 - f'.$$

Si on garde encore $E = 0$, mais Pr quelconque, $2g'' + Prfg' = 0$, on intègre, après avoir remarqué que $2f'''/f' = -f$:

$$g''/g' = Prf'''/f' \text{ donc } g' = K(f'')^{Pr}.$$

une seconde intégration, en tenant compte de la condition en 0 :

$$g(\eta) = \frac{\int_{\eta}^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}{\int_0^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}$$

Ce qui permet de tracer g pour différents Prandtl Pr à $E = 0$ (en fait il est plus simple de résoudre directement que de faire ce calcul d'intégrale!).

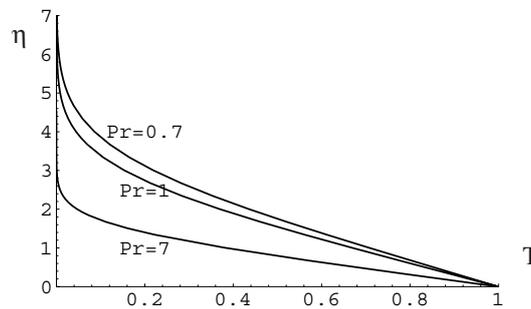


FIGURE 19 – Profils $g(\eta)$ à différents nombres de Prandtl.

- à $Pr=0.7$ $g'(0)=-0.293$
- à $Pr=1$ $g'(0)=-0.332$
- à $Pr=7$ $g'(0)=-0.646$

3.4.1.3. Pr petit

Si le nombre de Prandtl est petit, l'épaisseur thermique est plus grande que l'épaisseur dynamique : le fluide est bon conducteur de la chaleur. Changeons l'échelle de η en $\eta=Y\zeta$, $Y \gg 1$, comme l'équation est linéaire $G(Y) = g(\eta)$.

$$2g'' + Prfg' = 0 \text{ devient } 2Y^{-2}G'' + Y^{-1}PrfG' = 0$$

mais attention loin de la paroi $f \sim \eta$ (η est grand) donc $f \sim Y\zeta$ (ζ est d'ordre un). Par moindre dégénérescence $Y = Pr^{-1/2}$. On peut ensuite montrer, après résolution, que : $g'(0) \sim 0.564Pr^{1/2}$.

3.4.1.4. Pr grand

Si le nombre de Prandtl est très grand, l'épaisseur thermique est plus petite que l'épaisseur dynamique : le fluide est mauvais conducteur de la chaleur. Changeons l'échelle de η en $\eta=Y\zeta$, $Y \ll 1$, comme l'équation est linéaire $G(Y) = g(\eta)$.

$$2g'' + Prfg' = 0 \text{ devient } 2Y^{-2}G'' + Y^{-1}PrfG' = 0$$

mais attention près de la paroi $f \sim \eta$ donc $f \sim (0.33/2)(\zeta^2)Y^2$. Par moindre dégénérescence $Y = Pr^{-1/3}$. On peut alors montrer, après résolution, que $g'(0) = -0.332Pr^{-1/3}$

3.4.1.5. Nusselt

Un grand miracle fait que cette expression (qui est normalement uniquement valide pour Pr grand) est valide dans la plage "utile" (eau - air).

Le flux à la paroi est (compte tenu de l'approximation précédente).

$$\phi = 0.332Pr^{1/3}kL^{-1}R_\infty^{1/2}\frac{T_w - T_\infty}{\bar{x}^{1/2}}$$

Le nombre de Nusselt est :

$$Nu = \frac{\phi L}{k(T_w - T_\infty)}$$

Pour les nombre de Pr supérieurs à environ 0.5, on a donc, pour le nombre de Nusselt à la position x (la dépendance est plutôt en $Pr^{-1/2}$ pour les petits Prandtl) et avec $R_x = U_\infty x/\nu$, on retiendra donc que :

$$Nu_x = 0.332Pr^{1/3}R_x^{1/2}.$$

Le nombre de Nusselt moyen pour une plaque de longueur L (Re et R_L sont identiques), est alors :

$$Nu = 0.664Pr^{1/3}R_L^{1/2}.$$

3.4.2. Flux imposé, $E=0$

Une variante de ce problème est cette fois d'imposer le flux à la paroi. Il est clair que si le flux est constant, on impose : $\phi = -k\frac{\partial T}{\partial y}$, donc $-k(\Delta T)L^{-1}Re^{1/2}[\bar{x}^{-1/2}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta}]$ doit être constant à la paroi, donc varie comme la racine de \bar{x} . La jauge de température est liée à ϕ par $\Delta T = \frac{\phi L}{kRe^{1/2}}$ et la température est de la forme

$$T = T_\infty + \Delta T \bar{x}^{1/2} g(\eta),$$

donc $\phi = -g'(0)k(\Delta T)L^{-1}Re^{1/2}$, il y a une constante de trop, on peut choisir $g'(0) = -1$. L'équation de l'énergie s'écrit

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \bar{y}^2}$$

d'où :

$$2g'' + Pr(fg' - f'g) = 0.$$

avec $g'(0) = -1$.

(exercice : on peut définir une variante, toute distribution de la forme

$$T = T_\infty + \Delta T \bar{x}^n g(\eta),$$

conduit à une équation du type $2g'' + Pr(fg' - 2ng'g) = 0...$ le cas 1/2 est celui de la paroi à flux imposé)

Après résolution de

$$2g'' + Pr(fg' - f'g) = 0, \quad g'(0) = -1, g(\infty) = 0.$$

Ce qui permet de tracer g pour différents Pr à $E = 0$.

à $Pr=0.7$ $g(0)=2.464$

à $Pr=1.0$ $g(0)=2.1789$

à $Pr=7$ $g(0)=1.13$

grosso modo $g(0) \sim 2.18 Pr^{-1/3}$ (formule obtenue par interpolation)

On en déduit la distribution (ici approximative) de température le long de la paroi soumise à un flux constant ϕ :

$$T = T_\infty + \frac{\phi}{k} 2.18 Pr^{-1/3} \bar{x}^{1/2}.$$

et le Nusselt :

$$Nu = Re^{1/2}(0.46 Pr^{1/3}) \bar{x}^{1/2}.$$

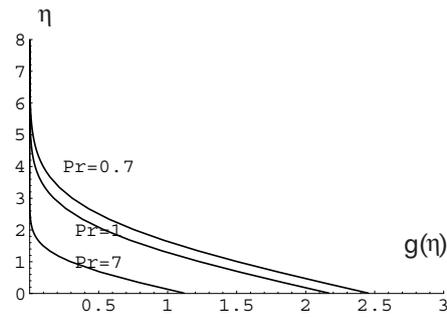


FIGURE 20 – Profil réduit de température $g(\eta)$ à différents Pr .

3.4.3. Cas $E \neq 0$

Le cas de la paroi athermane est un peu plus délicat. Il peut être résolu par une formulation englobant le cas de la paroi de température constante. Il nous faut résoudre :

$$g'' + \frac{Pr}{2} f g' + E Pr f'^2 = 0.$$

La solution générale est de la forme : solution particulière g_2 de l'EASM + solution générale g_1 de l'ESSM.

$$g = g_1 + E g_2$$

par variation de la constante, on obtient $g_2 = Pr \int_{\eta}^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} (\int_0^{\zeta} [f''(\xi)]^{Pr} d\xi) d\zeta$, on constate que $g_2'(0) = 0$ et on a au final :

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = (1 - E g_2(0)) + \frac{\int_{\eta}^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}{\int_0^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} d\zeta} + E Pr \int_{\eta}^{\infty} [f''(\zeta)]^{Pr} (\int_0^{\zeta} [f''(\xi)]^{Pr} d\xi) d\zeta$$

$$\begin{aligned} g_2(0, Pr=0.7) &= 0.42 \\ g_2(0, Pr=1.0) &= 0.50 \\ g_2(0, Pr=7.0) &= 1.25 \end{aligned}$$

Pour $(1 - E g_2(0)) = 0$, on a la température de paroi adiabatique :

$$T_w = T_{aw} = T_{\infty} + \frac{U_{\infty}^2}{c_p} g_2(0).$$

Ce qui permet de tracer g à $Pr = 1$ (pour fixer les idées) et à E non nul.

Sur la figure ci dessus, on trace plusieurs profils de température correspondant à différentes températures de paroi. En "points", le cas $T=T_{aw}$. On voit que si $T < T_{aw}$ le fluide fournit un flux à la paroi de par l'élévation de température causée par la dissipation volumique. Donc même si le fluide est plus froid que la paroi, la paroi est "réchauffée". Souvenons nous que cet effet est très faible (il intervient de manière non négligeable dans le cas compressible où les équations sont plus compliquées).

3.5. Coefficient d'échange

3.5.1 Définition

Dans les paragraphes précédents, on a calculé pour des cas simples l'écoulement et la température autour d'un solide (convection forcée externe) ou entre deux solides (convection forcée interne). A

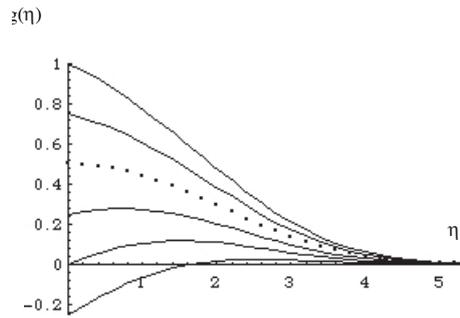
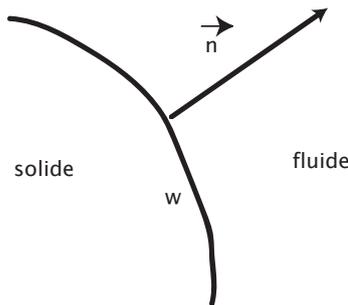


FIGURE 21 – la température fonction de la variable de similitude (le cas en pointillé est le cas adiabatique, ici comme $Pr=1, T_{aw}=0.5$).

température fixée on a trouvé la valeur du flux à la paroi du solide, et à flux fixé, on a trouvé la distribution de température sur la paroi du solide. On a introduit le nombre de Nusselt (flux sans dimension). On rappelle que le but du jeu était de trouver la valeur du coefficient d'échange h , qui rappelle constitue, une simplification de l'extérieur (donc le fluide) pour le solide. Par définition, on avait posé que le coefficient d'échange est tel que



par définition de h on a

$$\underline{q}_w = h(T_w - T_f)\underline{n}.$$

or par définition du flux à la paroi (dans le fluide)

$$\underline{q}_w = -k\left[\frac{\partial T}{\partial n}\right]_w \underline{n},$$

et par définition du Nusselt

$$Nu = \frac{-Lk\partial T/\partial n}{k(T_w - T_f)}$$

h peut être local ($h(x)$) ou global (sur toute la longueur L). On peut donc relier Nu_x et $h(x)$:

$$\text{par définition } h(x) = \frac{kNu_x}{L}.$$

Pour la plaque plane, par exemple, on a vu que le Nusselt moyen $\int_0^L Nu_x dx / L$ est $0.664Pr^{1/3}Re_L^{1/2}$. il n'est pas toujours possible de calculer Nu . Expérimentalement on cherche à tracer Nu sous la forme $Nu = CRe^m Pr^n$. On définit ainsi parfois le nombre de Stanton :

$$St_x = Nu_x / (Re_x Pr),$$

on remarque que pour Pr assez grand on a approximativement $St_x Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$. C'est ce que l'on appelle l'analogie de Reynolds : on peut faire un calcul dynamique, puis ayant le frottement à la paroi on en déduit tout de suite le Nusselt.

3.5.2 Exemples de valeurs

Le coefficient d'échange moyen pour une plaque de longueur L sera donc (en laminaire $R_L < 10^5$) :

$$h = \frac{k}{L} 0.664 Pr^{1/3} R_L^{1/2}.$$

Dans le tuyau on a pour le coefficient d'échange (approché $L/(RPe) > 1/500$) :

$$h_{moyen} = Nu_{moyen} \frac{k}{2R} \sim \frac{k}{2R} \left(3.666 + \frac{0.127(PrR/L)}{1 + 0.0635(PrR/L)^{1/3}} \right).$$

etc.

3.5.3. première entorse et problème "final" :

Nous venons de voir la forme des transferts de chaleur dans le problème assez simple du tuyau et de la plaque plane. Le flux calculé va en fait échauffer (ou refroidir) les parois dont la température va graduellement changer. Nous entrevoyons la difficulté du couplage thermique fluide/solide et ce pour un quelconque problème de plomberie : tout écoulement est contenu dans une conduite, cette conduite est elle même dans l'usine, qui est elle même dans l'atmosphère...

Il faut donc connaître la température au centre du soleil pour obtenir la température de l'écoulement du sang dans le petit orteil d'un esquimau dans son igloo. En fait on peut (et on doit) simplifier et considérer les échanges avec l'extérieur (assez) lointain grâce aux coefficients d'échange. La description de l'écoulement interne sera laissée la plus complexe possible, mais l'extérieur sera modélisé par les coefficients d'échange.

Au travers de la paroi, le flux est conservé, or le flux extérieur est modélisé par un coefficient d'échange, si de plus la paroi est de faible résistance thermique, son écart de température est faible, le flux à imposer est donc tel que :

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h_e (T - T_e).$$

Cette relation a le bon goût si $T_e \gg T$ de dégénérer en $-k \frac{\partial T}{\partial y}$ imposé, ou si h_e est grand ($Bi \gg 1$) de dégénérer en T imposée, ou si h_e petit ($Bi \ll 1$) en une paroi athermane...

Au final, on peut résoudre (bonne approximation si on ne chauffe pas trop) les équations de Navier Stokes incompressibles pour un fluide newtonien :

Convection Forcée

- équations dynamiques

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0.$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla p + \underline{f} + \mu \nabla^2 \underline{u}.$$

- équation de la chaleur en incompressible

$$\rho c_p \left(\frac{\partial}{\partial t} T + \underline{u} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + 2(\underline{\mu} \underline{D} : \underline{D}) + r.$$

- conditions aux limites

adhérence à la paroi,
condition mixte du type :

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h_e (T - T_e).$$

qui peut dégénérer en T imposée ou $-k\frac{\partial T}{\partial y}$ imposé suivant les valeurs de h_e et T_e .

La complication suivante est de prendre en compte la conduction dans la paroi et de modéliser l'extérieur par un coefficient d'échange *etc*

3.6. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre la forme des transferts de chaleur dans le problème assez simple du tuyau et de la plaque plane. Ces deux problèmes sont fondamentaux car ils sont les archétypes de tous les problèmes possibles de transfert thermique : le problème de la convection forcée interne et celui de la convection forcée externe. Si on se donnait une température à la paroi, on en déduisait le flux, quand on s'est donné un flux, on a trouvé l'élévation de température. Cela donne le nombre de Nusselt comme résultat de l'analyse. Puis les coefficients d'échanges moyens ont été calculés.

Il faut bien distinguer les différents niveaux d'approximation de l'équation de la chaleur, par ordre de simplification croissante :

- Navier Stokes complet compressible
- Navier Stokes incompressible
- l'Analyse Phénoménologique épaulée par les Développements Asymptotiques Raccordés (Apédar) qui mène à des problèmes simplifiés mais cohérents
- l'utilisation des coefficients d'échanges qui simplifie trop mais permet de dimensionner rapidement un dispositif.

Il faut ensuite jongler avec les différents niveaux compte tenu de la puissance de calcul disponible.

On retiendra qu'il est impossible de résoudre "tout", on simplifiera l'influence de l'"extérieur" en utilisant les coefficients d'échange, et on essaiera de résoudre le mieux possible l'"intérieur".

Il faut toujours contrôler son degré d'approximation des mécanismes, en se servant de l'Apédar pour faire l'aller et retour entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux. Autrement dit l'analyse phénoménologique des équations permet de vérifier si les ordres de grandeurs issus du calcul sont réalistes ou non, elle prédit l'existence des couches limites et donc les endroits où il faut raffiner le maillage.

3.7. Bibliographie¹

- R.B. Bird, W.E. Stewart & E. N. Lightfoot (1960) "Transport phenomena", ed J. Wiley & sons.
- H. Gersten & H. Herwig (1992) "Strömungsmechanik", Ed. Viewig.
- W. M. Kays, M. E. Crawford Convective Heat and Mass Transfer Mc Graw Hill 1993.
- A. Giovannini & B. Bédard (2012) "Transfert de Chaleur" Cépaduès Ed.
- P.-Y. Lagrée, "Transferts Thermiques et Massiques dans les fluides", cours ENSTA, Convection Forcée.
- A. Leontiev (1985) "Théorie des échanges de chaleur et de masse", ed. MIR.
- J. Padet (1997) "Principes des transferts convectifs", Polytechnica.
- L. Persen (1972) "Boundary layer theory", Tapir Verlag.
- T.J. Pedley (1980) "The fluid mechanics of large blood vessels" (Annex : A hot-film in reversing flows) Cambridge Univ. Press.
- J.F. Sacadura (2015) "Transferts thermiques – Initiation et approfondissement.", éditions Lavoisier.
- H. Schlichting (1987) "Boundary layer theory", Mac Graw Hill.
- L. Graetz, Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten, Annalen der Physik 254, 79 (1882).
DOI : 10.1002/andp.18822540106
- Nusselt, W. : Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge. VDI Z. 54 (1910) 1154-1158

1. fichier C3cvf.tex 5 octobre 2021