

## Ondes gravitationnelles avec et sans viscosité

par

Pierre-Yves Lagrée

LaMoMe CNRS/ Université Paris 6

Boîte 162

4 place Jussieu

75252 Paris

pyl@ccr.jussieu.fr

Ouais^3 <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/lagree.html>

L'objet de ce cours est de poser et de résoudre les équations régissant la propagation de perturbations de l'élévation de la surface d'un fluide dans un champ de pesanteur. C'est à dire les vagues!

En faisant différentes hypothèses on simplifiera par l'analyse asymptotique les équations de Navier Stokes pour aboutir à des systèmes d'équations aux dérivées partielles plus simples.

On rappelle dans un premier temps l'"équation d'onde", puis, après avoir fait apparaître les effets de propagation qui transportent la vague sans la déformer, on fera apparaître ceux de dispersion, qui la cassent en vaguelettes, enfin les effets des non linéarités qui la font déferler. Lorsque ces deux derniers effets se compensent des ondes qui se propagent sans changer de forme peuvent exister, ce sont les solitons.

Les équations de Saint Venant sont ensuite retrouvées dans une optique plus appliquée aux écoulements dans les fleuves et les lagunes.

### 1. système d'équations

#### **1.1. Navier Stokes complet**

Les équations à résoudre sont *a priori* pour le problème de l'écoulement de l'eau sont:

l'incompressibilité

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \right) = \underline{\nabla} p - \rho_\infty g \underline{e}_y + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}.$$

Ces systèmes d'équations sont à résoudre dans les deux milieux que sont l'air et l'eau.

Remarque à ce propos l'équation de conservation de la masse s'écrit bien:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \rho\right).$$

La densité est conservée le long des lignes de courant: l'eau reste de l'eau, et l'air reste de l'air. À la surface: c'est délicat! En toute rigueur, il faut exprimer la continuité des contraintes normales et tangentielles ainsi que des vitesses des deux fluides. On écrit la continuité de la contrainte normale: soit  $\underline{n}$  la normale extérieure à la surface libre:

$$(p - p_e - \sigma K) n_i = \tau_{ij} n_j - \tau_{ij}^e n_j$$

avec  $\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}$ ,  $\tau_{ij}^e = 2\mu^e D_{ij}$   $\sigma$  tension superficielle et  $K$  courbure de la surface. Comme la viscosité dynamique du gaz est faible par rapport au liquide, on néglige le mouvement de l'air

$$(p - p_0 - \sigma K) n_i = \tau_{ij} n_j$$

avec  $p_0$  pression atmosphérique. Cette expression est à projeter sur la normale et la tangente. Nous n'écrivons pas pour l'instant ces équations développées. Nous simplifions tout de suite au cas non visqueux. Le but du cours est de passer d'équations 2D à des équations 1D plus simples (le cas général 3D donne des systèmes 2D, la généralisation va de soit).

## 1.2. équations d'Euler:

Les équations à résoudre sont:

i) l'incompressibilité

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

sous forme développée:

$$\partial u^* / \partial x^* + \partial v^* / \partial y^* = 0,$$

ii) la conservation de la quantité de mouvement:

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \right) = \underline{\nabla} p - \rho_\infty \underline{g} \underline{e}_y$$

sous forme développée:

$$\begin{aligned} \rho(\partial u^* / \partial t^* + u^* \partial u^* / \partial x^* + v^* \partial u^* / \partial y^*) &= -\partial p^* / \partial x^* \\ \rho(\partial v^* / \partial t^* + u^* \partial v^* / \partial x^* + v^* \partial v^* / \partial y^*) &= -\partial p^* / \partial y^* - \rho g \end{aligned}$$

iii) accessoirement irrotationnel (pas de création de vorticité)

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$$

sous forme développée:

$$-\partial u^* / \partial y^* + \partial v^* / \partial x^* = 0.$$

et ce avec les conditions aux limites *ad hoc*:

à la surface on a pour la pression:

$$p^* = p_0 + \sigma \underline{\nabla} \cdot \underline{n} \text{ avec } \underline{n} = -\underline{\nabla}^* \cdot \eta^* (1 + (\underline{\nabla}^* \cdot \eta^*)^2)^{-1/2}$$

la pression est égale à la pression atmosphérique, au saut de pression près dû à la tension de surface. condition dynamique: le saut de pression est tel que:

$$p_1^*(x^*, \eta^*(x^*, t^*), t^*) - p_2^*(x^*, \eta^*(x^*, t^*), t^*) = \sigma \underline{\nabla}^* \cdot \underline{n}_{12}$$

la normale à la surface est:

$$\underline{n}_{12} = (-\partial\eta^*/\partial x^*, 1) / (1 + (\partial\eta^*/\partial x^*)^2)^{1/2}$$

condition cinématique:

Les deux fluides ne "décollent" pas de la surface qui les sépare et ne s'interpénètrent pas: intuitivement, les vitesses normales sont donc continues à la traversée de l'interface:

$$\underline{u}_1^* \cdot \underline{n}_{12} = \underline{u}_2^* \cdot \underline{n}_{12} \text{ en } y^* - \eta^*(x^*, t^*) = 0.$$

On retrouve cette même relation à partir de  $\underline{\nabla}^* \cdot \underline{u}^* = 0$  intégrée sur une petite épaisseur (cf. électromagnétisme! Voir la condition sur la composante normale du champ magnétique B à une interface!). Si

$$F^*(x^*, y^*, t^*) = y^* - \eta^*(x^*, t^*) = 0$$

est l'équation de l'interface, on remarque également que l'interface étant matérielle, F est transporté le long des lignes de courant:

$$\frac{d}{dt^*} F^* = 0 \text{ (dérivée totale)}$$

Par définition de la dérivée lagrangienne

$$dy^*/dt^* = v^*(x^*, \eta^*, t^*) \text{ et } d\eta^*/dt^* = \partial\eta^*/\partial t^* + u^* \partial\eta^*/\partial x^*,$$

$\frac{d}{dt^*} F^* = 0$  s'écrit :

$$\frac{\partial\eta^*(x^*, t^*)}{\partial t^*} + u^*(x^*, \eta^*(x^*, t^*), t^*) \frac{\partial\eta^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} = v^*(x^*, \eta^*(x^*, t^*), t^*)$$

qu'on peut réécrire en faisant apparaître les vitesses normales

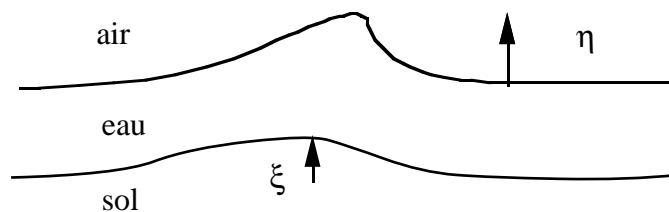
$$\frac{\partial\eta^*}{\partial t^*} = \underline{u}^* \cdot \underline{n} (1 + (\partial\eta^*/\partial x^*)^2)^{1/2}$$

Pour la vitesse

$$v^*(\eta^*) = \partial\eta^*/\partial t^* + u^* \partial\eta^*/\partial x^*$$

sur le fond on a (en  $y^* = -h_0$ ): on a le glissement:  $\underline{u}^* \cdot \underline{n} = 0$ .

$$v^* = u^* \partial\xi^*/\partial x^*.$$



En résumé:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0, \rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \right) = \underline{\nabla} p - \rho_\infty g \underline{e}_y, \underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$$

à la surface:

$$p = p_0 + \sigma \underline{\nabla} \cdot \underline{n}; v(\eta) = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

sur le fond on a

$$v = u \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

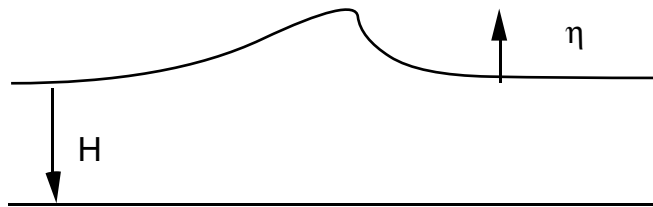
Nous commençons par examiner quelques exemples simples de solutions de ces équations.

## 2. ondes linéaires simples:

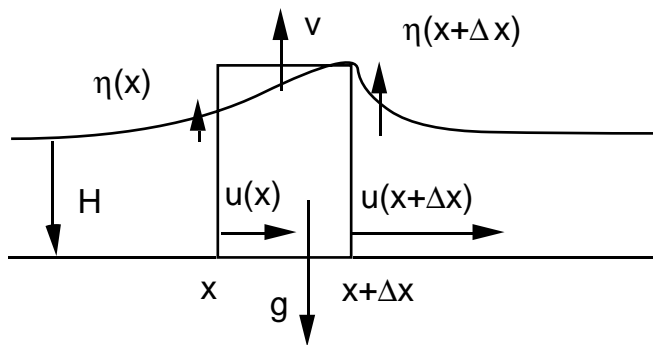
### équations: approche simplifiée

Commençons par la propagation simple. Dans cette première partie nous passons rapidement sur les problèmes pour aboutir à l'équation d'ondes qui est la base de ce cours. Notre démarche ici sera très élémentaire, fondée sur une modélisation 1D, dans les parties suivantes nous précisons les hypothèses faites.

La manière la plus simple est de considérer une étendue d'eau, initialement au repos et d'épaisseur constante  $H$ . Supposons que nous perturbions cette surface, la hauteur devient  $\eta$ :



Cette élévation d'une masse d'eau  $\rho\eta(x)\Delta x$  produit une variation de pression égale à  $g\rho\eta$  par nivellement barométrique.



La somme des forces agissant transversalement est égale à l'accélération de la masse d'eau comprise dans le volume  $S\Delta x$ , d'où, puisque le fluide est poussé de droite à gauche avec la force  $\rho g\eta S$  en  $x$  et de droite à gauche en  $x+\Delta x$

$$\rho g\eta(x)S(x) - \rho g\eta(x+\Delta x)S(x+\Delta x) = \rho\Delta x S \frac{\partial u}{\partial t}$$

On a supposé que la vitesse est constante sur toute la section. En faisant tendre  $\Delta x$  vers 0:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

La conservation du flux, appliquée au précédent petit volume donne par unité de longueur transverse, en introduisant la vitesse transverse  $v$  (faible):

$$-u(x+\Delta x)(h+\eta(x+\Delta x)) + u(x)(h+\eta(x)) - v \Delta x = 0, \text{ avec } v = \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

donc en faisant tendre  $\Delta x$  vers 0:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial(u(h+\eta))}{\partial x}$$

si l'amplitude est petite:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x} h$$

L'élimination de  $u$  donne la fameuse équation d'onde:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \text{ avec } c_0^2 = gh$$

### équations: approche plus rigoureuse

Pour écrire ces relations nous sommes allés un peu vite en besogne dans notre décompositions en tranches. Il est en effet plus correct de bien voir que le volume que l'on a choisi varie avec l'écoulement: il se déforme. Il faut en tenir compte dans  $d(\rho \Delta x u)/dt$ . La dérivée par rapport au temps du volume est en effet telle que, partant d'un volume de longueur  $\Delta x$  entre  $x$  et  $x+\Delta x$  au temps  $t$ , il se trouve au temps  $t+\Delta t$  entre  $x+u(x)\Delta t$  et  $(x+\Delta x)+u(x+\Delta x)\Delta t$ , sa nouvelle longueur est donc:

$$\Delta x + u(x+\Delta x)\Delta t - u(x)\Delta t \sim \Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t\right),$$

la variation de volume (de longueur) par rapport au temps est donc  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . (c'est la divergence de

la vitesse). Avec cette quantité on peut montrer que le raisonnement plus haut permet de trouver les équations Shallow Water correctes telles que nous les établirons plus loin.

### équation d'onde

Revenons à l'équation de d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \text{ avec } c_0^2 = gh$$

En posant  $\xi = x - c_0 t$ , et  $\zeta = x + c_0 t$ , on voit que  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta \partial \xi} = 0$ . Les solutions sont donc de la forme:

$$f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \dots$$

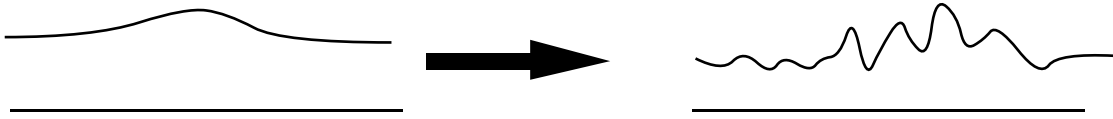
La perturbation de forme  $f$  se déplace vers la droite sans changer de forme à la vitesse  $c_0$  ( $g$  se déplace vers la gauche). Il est d'usage de décomposer le signal en somme d'exponentielles:

$$\exp(ik(x \pm c_0 t)) = \exp(ikx \pm i\omega t).$$

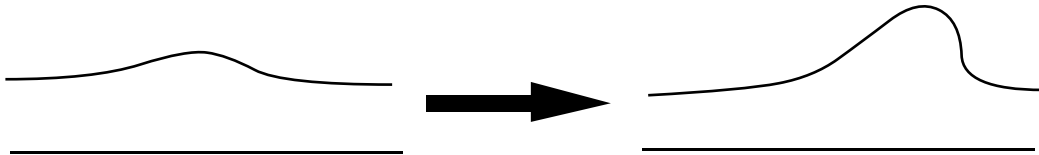
C'est en fait la transformation de Fourier du signal.

$\omega$  est la pulsation  $k$ , la fréquence spatiale,  $c_0 = \omega/k$  est la vitesse de phase, elle est constante.

Par la suite on va voir ce qui se passe lorsque la vitesse de propagation du signal dépend de la pulsation:  $c(k)$ , nous intuitons que, puisque tout signal s'écrit sous forme de série de Fourier, si chaque mode se déplace à sa vitesse  $c(k)$ , alors le signal se décompose. On dit que le milieu est dispersif.



Ce qui peut aussi se passer c'est que  $c$  dépende de  $h$ , les équations sont alors non linéaires. On verra que le haut de la vague va plus vite que le bas. Le signal se raidit, le haut de la vague dépasse le pied d'icelle et la vague déferle (dans la région du déferlement, nos équations ne sont plus valides, personne ne sait de toutes façons résoudre les ENS dans ce cas excessivement sévère).



Enfin, les frottements visqueux atténuent la vitesse, et donc la hauteur...

### 3. ondes linéaires dispersives: houle de Airy ou de Stokes

#### 3.1. équations

##### 3.1.1. ordres de grandeur

##### 3.1.1.1. Premières hypothèses:

Reprenons les hypothèses précédentes et examinons les. Premièrement, nous oublions la viscosité en supposant que le nombre de Reynolds est grand. La surface d'équilibre est plane. L'état de base est donc un fluide immobile. Il ne reste que la stratification de pression:

$$u^*=v^*=0 \quad \text{et} \quad 0 = -\partial p^*/\partial y^* - \rho g$$

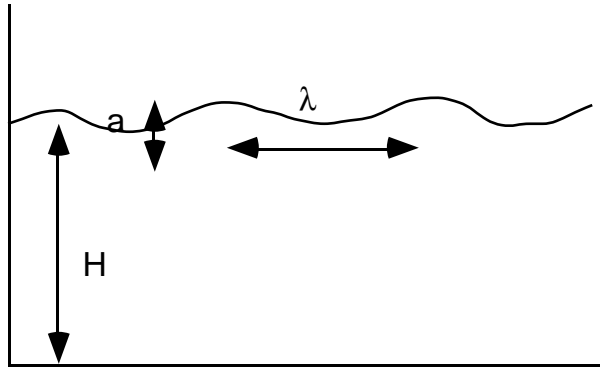
Le fond du récipient est en  $y^*=0$ , la surface libre en  $y^*=H$  où il règne la pression atmosphérique, donc:

$$p^* = p_0 + \rho g (H - y^*).$$

(La pression double chaque fois que l'on s'enfonce de 10m). La perturbation est légère, soit  $a$  son amplitude, et soit  $\tau$  la période des oscillations. En effet si on observe un fêtu de paille à la surface de la mer, ou le bouchon de la ligne de canne à pêche, on constate qu'il n'avance pas avec les vagues mais revient à la même place. La vitesse est  $a/\tau$ . Soit  $\lambda$  la fréquence spatiale, le terme non linéaire  $u\partial/\partial x$  a pour ordre de grandeur par rapport au terme instationnaire  $\partial/\partial t$ :

$$(u\partial/\partial x)/(\partial/\partial t) \sim ((a/\tau)/\lambda)(\tau) = a/\lambda,$$

donc on peut linéariser si  $a/\lambda \ll 1$ . On a aussi  $a/H$  petit: on s'intéresse à de petites perturbations, mais  $H/\lambda$  quelconque.



avec  $a/\lambda \ll 1$   $a/H \ll 1$  mais  $H/\lambda$  quelconque (plus tard on posera  $\varepsilon = a/\lambda$  et  $\delta = H/\lambda$ , ici  $\varepsilon$  est petit  $\delta$  est quelconque).

Reprenons cette estimation avec les équations Euleriennes: la vitesse de déplacement de l'interface est:

$$v^* = \partial \eta^* / \partial t^* + u^* \partial \eta^* / \partial x^*, \text{ linéarisée en } \partial \eta^* / \partial t^*.$$

donc  $(a/\tau)$  est bien la jauge de  $v^*$ . En ordre de grandeur l'incompressibilité:  $\partial u^* / \partial x^* + \partial v^* / \partial y^* = 0$ , donne  $v^*$  et  $u^*$  de même jauge, à condition de mesurer toutes les directions avec la même longueur (ce qui est assez naturel).

### 3.1.1.2. relation de pression:

La pression d'équilibre est:

$$p^* = p_0 + \rho g (H - y^*)$$

On pose  $p_0 + \rho g (H - y^*)$  la valeur hydrostatique (de repos), on étudie les variations autour de cette valeur:

$$p_0 + \rho g (H - y^*) + P^*$$

La pression est donc écrite sous la forme:

$$p^* = p_0 + \rho g (H - y^*) + P^* .$$

à l'interface elle s'écrit exactement:

$$p^*(x^*, y^* = H + \eta^*) = p_0 .$$

Donc

$$p^*(x^*, y^* = H + \eta^*) = p_0 = p_0 + \rho g (H - H - \eta^*) + P^*(x^*, y^* = H + \eta^*)$$

On en déduit que, de manière exacte:

$$P^*(x^*, y^* = H + \eta^*) = \rho g \eta^* .$$

L'ordre de grandeur de  $P^*$  est donc bien  $\rho g a$ , et  $P(x, y = 1 + (a/H)\eta) = \eta$ . La partie "active" de la pression est bien reliée aux variations de l'interface:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{\partial P^*}{\partial x^*} = \rho g \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*}$$

### 3.1.1.3. équations du mouvement

Si l'état de repos est perturbé, pour la vitesse transverse il ne reste que  $P^*$ :

$$\rho(\partial v^*/\partial t^* + u^* \partial v^*/\partial x^* + v^* \partial v^*/\partial y^*) = -\partial P^*/\partial y^* + \rho g \partial y^*/\partial y^* - \rho g$$

écrit de manière linéarisée (si  $\alpha/\lambda \ll 1$ ) cela donne:

$$\rho(\partial v^*/\partial t^*) = -\partial P^*/\partial y^*.$$

comparons en ordre de grandeur  $\rho(\partial v^*/\partial t^*)$  à  $-\partial P^*/\partial y^*$ , cela donne respectivement  $\rho a/\tau^2$  et  $\rho g a/\lambda$ . Cela donne  $1/\tau^2 = g/\lambda$ .

On remarque que l'accélération transverse est négligeable en ordre de grandeur par rapport à l'accélération de la pesanteur:  $a/\tau^2 \ll g$  car

$$1/\tau^2 = g/\lambda = (g/a)(a/\lambda) \ll (g/a) \text{ car } (a/\lambda) \ll 1.$$

L'ordre de grandeur de la variation de pression  $P$  étant estimé à  $\rho g a$  on doit aussi garder

$$((a/\tau)/\tau) \partial u/\partial t \sim (-g a/\lambda) \partial P/\partial x$$

qui est automatiquement vérifié:

$$1/\tau^2 = g/\lambda$$

Remplaçons  $\tau$  par sa valeur  $(\lambda/g)^{1/2}$  dans  $a/\tau$ :

$$a/\tau \sim \sqrt{(a/\lambda)(a/H)} c_0 \text{ où } c_0^2 = gH$$

or  $a/H$  petit et  $a/\lambda \ll 1$ . La vitesse est plus petite que  $c_0$  qui est la vitesse "naturelle" (par analyse dimensionnelle) associée à un fluide au repos de profondeur  $H$ .  $H$  aurait d'ailleurs pu être considéré comme une longueur naturelle. Ici on a choisi  $\lambda$  et le temps associé obtenu "pendulaire"  $(\lambda/g)^{1/2}$ , ce qui semble raisonnable.

### 3.1.2. résumons nous

Achtung, ici  $u^*$  et  $v^*$  sont mesurés par  $(a/\tau)$

$\eta^*$  mesuré par  $a$

$v^*$  mesuré par  $a/\tau$

$u^*$  mesuré par  $a/\tau$

$x^*$  mesuré par  $\lambda$

$y^*$  mesuré par  $\lambda$

$P^*$  mesuré par  $gH (a/H) = c_0^2 (a/H)$ :

$$p^* = p_0 + \rho g (H - y^*) + P^* = p_0 + \rho c_0^2 (1 - y \lambda/H + (a/H) P)$$

ou encore,  $p^*$  mesuré avec  $\rho g H$ :

$$p = p_0/(\rho g H) + 1 - y \lambda/H + (a/H) P$$

$t^*$  mesuré par  $\tau$  et

$$\tau = \sqrt{(\lambda H)/c_0} = \sqrt{(\lambda/g)}$$

Par substitution directe:

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0.$$

$$(\partial u/\partial t + (a/\lambda) u \partial u/\partial x + (a/\lambda) v \partial u/\partial y) = -\partial P/\partial x$$

$$(\partial v/\partial t + (a/\lambda) u \partial v/\partial x + (a/\lambda) v \partial v/\partial y) = -\partial P/\partial y$$



$$v(x,y=(H/\lambda+(a/\lambda)\eta))=\partial\eta/\partial t + (a/\lambda)u\partial\eta/\partial x$$

$$v(x,y=0)=0.$$

$$P(x,y=(H/\lambda+(a/\lambda)\eta))= \eta$$

Linéarisons:  $(a/\lambda)\ll 1$ , d'où, on a:

$$\partial u/\partial t = - \partial P/\partial x$$

$$\partial v/\partial t = - \partial P/\partial y$$

$$\nabla^2 P=0 \text{ et } \partial P/\partial y = - \partial v/\partial t \text{ en } y=H/\lambda \text{ et } v=0 \text{ en } y=0.$$

la condition de pression à l'interface linéarisée en  $(a/\lambda)$  va nous fournir une relation liant  $P$  et  $\eta$ .

En effet:

$$P(x,y=(H/\lambda+(a/\lambda)\eta)) = P(x,y=(H/\lambda)) + (a/\lambda)\eta\partial P(x,y=(H/\lambda))/\partial y + \dots = P(x,y=(H/\lambda))$$

Donc au final:

$$P(x,y=(H/\lambda))=\eta.$$

C'est un exmple d'applatissage des conditions aux limites.

## 3.2. résolution

### 3.2.1. résolution en modes normaux

On cherche des solutions en  $F(y)e^{i(kx-\omega t)}$  (car les équadiffs sont invariantes en  $t$  et  $x$ ), les conditions aux limites portent sur  $y$ . La solution de  $\nabla^2 P=0$  est donc en  $P=e^{\pm ky}e^{i(kx-\omega t)}$ .

Substituons:

$$P = P_+ e^{+ky}e^{i(kx-\omega t)} + P_- e^{-ky}e^{i(kx-\omega t)}$$

donne

$$v = (k/(i\omega)) (P_+ e^{+ky}e^{i(kx-\omega t)} - P_- e^{-ky}e^{i(kx-\omega t)})$$

soit au fond  $v(x,0)=0 \Rightarrow P_+=P_-$  donc

$$v = (P_+ k/(i\omega)) (e^{+ky}-e^{-ky}) e^{i(kx-\omega t)} = -i (2P_+ k/\omega) \text{sh}(ky) e^{i(kx-\omega t)}$$

par l'incompressibilité:

$$u = (P_+ k/\omega) \text{ch}(ky) e^{i(kx-\omega t)}$$

et si on pose

$$\eta=(2P_+) \text{ch}(kH/\lambda) e^{i(kx-\omega t)} = \eta_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

donc

$$u= (k/\omega) \eta \text{ch}(ky)/\text{ch}(kH/\lambda)$$

$$v= -i (k/\omega) \eta \text{sh}(ky)/\text{ch}(kH/\lambda)$$

$$P = \eta \text{ch}(ky)/\text{ch}(kH/\lambda)$$

$$\text{à la surface: } v=-\partial\eta/\partial t=-\partial P/\partial t$$

$$v = -i (2P_+ k/\omega) \text{sh}(kH/\lambda) e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega(2P_+) \text{ch}(kH/\lambda) e^{i(kx-\omega t)}$$

Donc on obtient la fameuse relation de dispersion:

$$\omega^2= k \text{th}(k(H/\lambda))$$

...

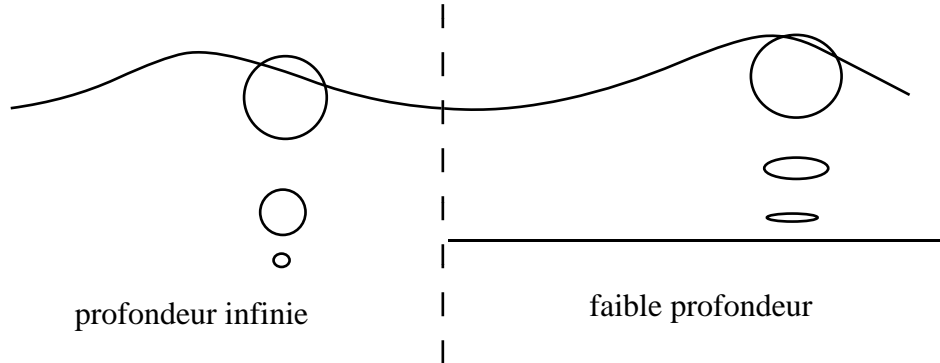
On remarque que l'écoulement est irrotationnel. En général, pour une houle linéaire sans courant, il ne peut y avoir de rotationnel puisqu'il n'y a pas de transport (on rappelle que  $\omega$  est conservé le long des lignes de courant)...

on trouve en redimensionnant  $\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$  qui est bien en ordre de grandeur:

$$1/\tau^2 \sim c_0^2 / \lambda H$$

On trace ici le dessin des trajectoires... Que l'on peut voir en animation sur:

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/HouleA.mov>



En eau très profonde les trajectoires sont des cercles de rayon décroissant rapidement. En eau moins profonde, ce sont des ellipses, le petit axe diminue jusqu'à zéro, le grand axe reste à peu près constant.

Retenons donc la relation de dispersion des ondes linéaires de profondeur quelconque:

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH).$$

### 3.2.2. 2 cas limites

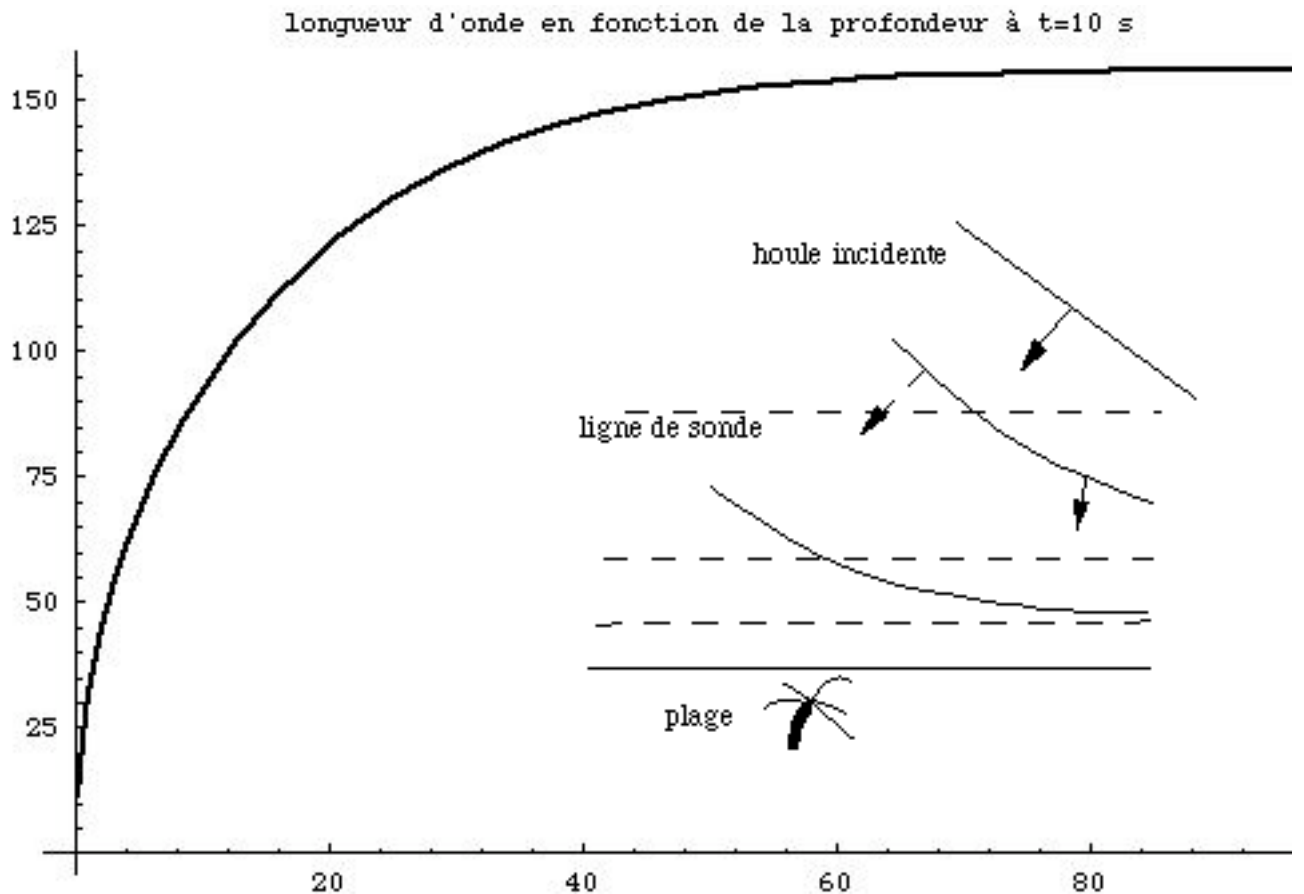
\*) si le fond devient de plus en plus profond:

$$\omega^2 = k \operatorname{th}(k(H/\lambda)) \sim k$$

H n'a plus de raison d'intervenir, et effectivement, il disparaît:

$$1/\tau^2 \sim c_0^2 / \lambda H \text{ est en réalité } 1/\tau^2 \sim g / \lambda.$$

$c_0$  est un artifice de calcul. Sur le graphe suivant on trace  $\lambda$  en fonction de  $h$  à  $\omega$  fixé. Si on se donne exemple une houle océanique de période 10s, on voit qu'elle est de plus en plus courte près de la côte. La vitesse  $2\pi\omega\lambda$  décroît aussi. Ceci permet d'expliquer pourquoi les vagues sont toujours parallèles à la plage! (la courbe suivante montre la longueur d'onde fonction de  $h$  lorsque l'on se donne  $\omega$ , cette courbe serait à modifier près de  $\lambda$  nul: la tension de surface modifie alors la relation de dispersion: ce sont les ondes capillaires de longueur d'onde environ égale à 1.7cm, vitesse  $\sim 23\text{cm/s}$ ).



\*) si le fond est peu profond

$\omega^2 = k^2 (H/\lambda)$  avec  $H/\lambda$  petit, à  $k$  fixé  $\omega$  devient de plus en plus petit. Le milieu n'est plus dispersif. Les ordres de grandeur ne sont plus bons. Posons:

$$y = H/\lambda (Y)$$

ce qui revient à mesurer la profondeur avec  $H$ :  $y^* = \lambda y = HY$ . On constate que puisque, à  $Y = O(1)$   $k = O(1)$  et à  $H/\lambda \ll 1$  on a  $\text{ch}(kH/\lambda) \sim 1$  et  $\text{sh}(Y kH/\lambda) \sim Y kH/\lambda$ , donc:

$$u = (k/\omega) \eta \text{ch}(Y kH/\lambda) / \text{ch}(kH/\lambda) \sim (k/\omega) \eta = (\lambda/H)^{1/2} \eta$$

$$P \sim \eta$$

La vitesse et la pression ne dépendent plus de la profondeur, examinons maintenant la vitesse transverse:

$$v = -i (k/\omega) \eta \text{sh}(Y kH/\lambda) / \text{ch}(kH/\lambda) \sim (i (\lambda/H)^{1/2} \eta Y k) H/\lambda = (i k \eta Y (H/\lambda)^{1/2})$$

On constate que la vitesse transversale devient plus faible que la vitesse longitudinale, le rapport de ces deux vitesses ( $v/u$ ) est d'ordre  $(H/\lambda) \ll 1$ .

Posons  $\Omega = \omega(H/\lambda)^{1/2}$  on a donc:

$$\Omega^2 = k^2.$$

Le milieu n'est plus dispersif...

### 3.2.3. réexaminons les ondes linéaires

Avec ces nouvelles échelles:

$t^*$  mesuré par  $\Omega^{-1} = (\lambda/H)^{1/2} \sqrt{\lambda g} = \lambda/c_0 = \lambda/c_0$

$c_0$  prend ici tout son sens...

donc  $\tau = \lambda/c_0$

$\eta^*$  mesuré par  $a$

achtung, ici  $u^*$  et  $v^*$  ne sont plus mesurés par  $(a/\tau)$

$v^*$  mesuré par  $a/\tau$

$u^*$  mesuré par  $(\lambda/H) a/\tau$

$x^*$  mesuré par  $\lambda$

$y^*$  mesuré par  $H$

$P^*$  mesuré par  $gH (a/H) = c_0^2 (a/H)$ :

$p^*$  mesuré avec  $\rho gH$ :

$p = p_0/(\rho gH) + 1 - y + (a/H) P$

le terme non linéaire est maintenant de poids relatif  $(\lambda/H) a/\tau / \lambda \tau = (a/H)$

Par substitution directe:

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0.$$

$$(\partial u/\partial t + (a/H) u \partial u/\partial x + (a/H) v \partial u/\partial y) = - \partial P/\partial x$$

$$(H/\lambda)^2 (\partial v/\partial t + (a/H) u \partial v/\partial x + (a/H) v \partial v/\partial y) = - \partial P/\partial y$$

$$v(x, y=(1+(a/H)\eta)) = \partial \eta/\partial t + (a/H) u \partial \eta/\partial x$$

$$v(x, y=0) = 0.$$

$$P(x, y=(1+(a/H)\eta)) = \eta$$

et

$$\partial u/\partial y - (H/\lambda) \partial v/\partial x = 0.$$

linéarisation  $(a/H) \ll 1$  et  $(H/\lambda) \ll 1$ :

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0.$$

$$\partial u/\partial y = 0.$$

$$(\partial u/\partial t) = - \partial P/\partial x$$

$$0 = - \partial P/\partial y$$

$$v(x, y=1) = \partial \eta/\partial t ; v(x, y=0) = 0.$$

$$P(x, y=1) = \eta.$$

(Remarquons que  $0 = - \partial P/\partial y$ )

d'où  $v = \partial \eta/\partial t$  y, et  $u = u(x)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

on retrouve l'équation d'onde...

### 3.3. applications

#### 3.3.1. vibrations dans les bassins

On aime bien passer au potentiel de vitesse (suite à la remarque plus haut).

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \phi \text{ et } v = \frac{\partial}{\partial y} \phi.$$

Et ne travailler que sur  $\phi$ . On a alors

$$\nabla^2 \phi = 0$$

la condition à la limite s'écrit alors:

en  $y=0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

en  $y=-h_0(t)$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial h_0(t)}{\partial t}$$

par exemple bassin rectangulaire: solution en sin cos.

bassin cylindrique de rayon R: la solutions'écrit avec les fonctions de Bessel...

$$\phi = \frac{-iA\omega}{k} \frac{\text{ch}(\rho_n(y+h)/R)}{\text{sh}(\rho_n h/R)} J_0(\rho_n r/R) \sin(n\theta) \quad \rho_n \text{ est la } n \text{ ième racine de } J'_0(x)=0.$$

### 3.3.2. Houle non linéaire ...

On consultera Lamb... ou Debnath... ou Lighthill... Le pied des vagues s'applatit, la crête devient plus pointue...



Surface libre de la houle de Gertsner

X: position d'une particule

### 3.3.3. Application à l'hydrodynamique navale

Un bateau se déplace à la vitesse adim  $U_0$ , dans le repère relatif du bateau les équations deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial t} - U_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - U_0 \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\nabla^2 P = 0 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v}{\partial x} \text{ en } y=H/\lambda \text{ et } v=0 \text{ en } y=0.$$

et toujours

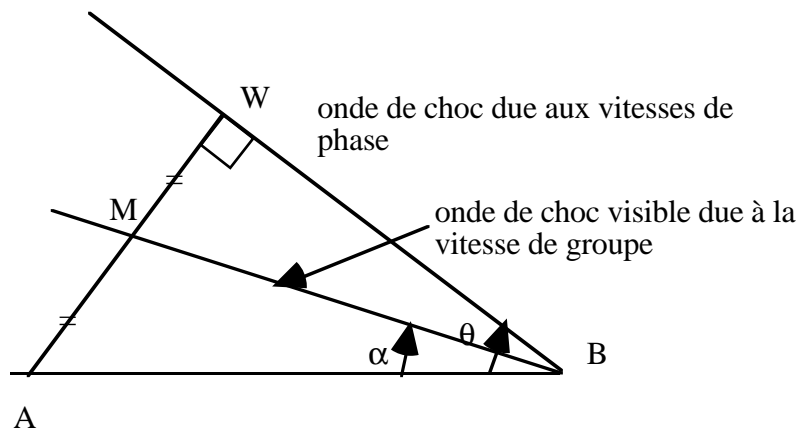
$$P(x, y=(H/\lambda)) = \eta.$$

Condition de rayonnement à l'infini, reste plus qu'à calculer les moments et les forces s'exerçant sur le corps...

Lighthill p286: dans les estuaire, la présence d'eau salée et d'eau douce modifie la relation de dispersion (KH neutre  $\omega^2 = gk(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ ), à longueur identique, la fréquence est diminuée (~de 10% dans le cas eau douce sur mer), la vitesse du bateau augmente donc par rapport à la vitesse des ondes ce qui augmente la traînée de résistance de vague.

sillage du bateau... l'angle de  $19^\circ 5'$  du au fait que la vitesse de groupe est 1/2 de la vitesse de phase... (cf Carnaval de la physique Jear Walker Dunod 1984/ Pour La Science, Avril 1988, Van Dyke an album of fluid motion) .

Lorsque l'on observe un bateau, son sillage est toujours le même, il a la forme d'un V de même angle quelle que soit sa vitesse. L'explication, due à Kelvin 1887 provient de la relation de dispersion  $\omega^2 = kg$ , la vitesse de phase est  $v_\phi = \omega/k = \sqrt{g/k}$  le double de la vitesse de groupe  $v_g = v_\phi/2$ . La droite BW représente l'"onde de choc" due à la vitesse de phase pour "une" fréquence particulière et  $\sin\theta = c_\phi/v$ . La droite BM représente l'onde de choc pour la vitesse de groupe associée et  $\sin\alpha = v_g/v$ . Pour chaque valeur de  $\theta$ , il y a une valeur de  $\alpha$ , ce que l'on veut c'est la valeur maximale de  $\alpha$ . C'est cette valeur maximale qui dessine le sillage.



M est au milieu de AW, posons  $AB=L$ ,  $AM=AW/2=L\sin\theta/2$ , on a donc:

$$\sin\alpha/AM = \cos\theta/BM = 2\sin\alpha/L/\sin\theta$$

et  $\sin(\theta-\alpha)/MW = \sin W/MB = 1/MB = 2\sin(\theta-\alpha)/L/\sin\theta$ , donc:

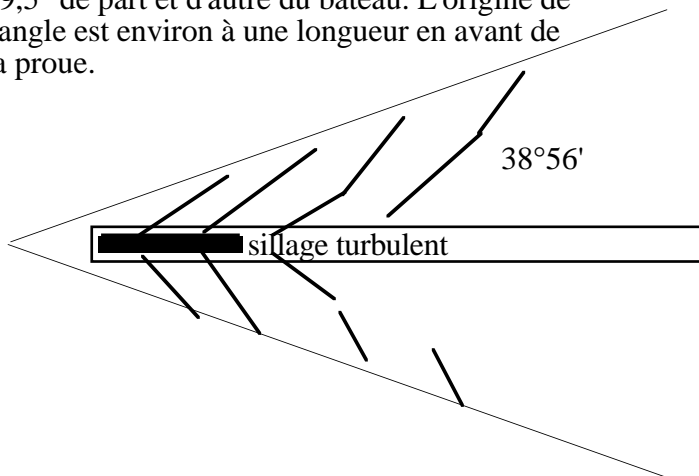
$\cos\theta \cdot 2 \sin(\theta-\alpha)/\sin\theta = 2 \sin \alpha/\sin\theta$ , soit au final:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin 2\theta}{2(1+\cos 2\theta)}$$

Le max de  $\alpha$  est obtenu pour  $\theta \sim 44,72^\circ$  soit un sillage d'angle total

$$2\alpha = 38^\circ 56' 33''.$$

les vagues sont confinées dans un angle de  $19,5^\circ$  de part et d'autre du bateau. L'origine de l'angle est environ à une longueur en avant de la proue.



### 3.4. énergie pour les ondes linéaires dispersives

Posons pour notre onde dans une eau de profondeur infinie:

$$\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t) e^{ky}$$

$$\eta = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\phi_0 = -(k/\omega)\eta_0$$

et évaluons les moyennes, dans un premier temps la moyenne spatiale (sur une longueur d'onde):

$$\langle \sin^2 kx \rangle = \langle \cos^2 kx \rangle = \lambda^{-1} \int_0^\lambda \sin^2 2\pi x/\lambda \, dx = 1/2$$

La moyenne d'un cos au carré est 1/2. En revanche on définit la moyenne sur la profondeur par

$$\langle e^{2ky} \rangle = \int_{-\infty}^0 e^{2ky} dy = 1/(2k)$$

Ayant fait ces remarques évaluons l'énergie totale d'une tranche de longueur  $\lambda$  de fluide:

\* énergie potentielle, elle s'obtient en remarquant que son accroissement est proportionnel à la variation de hauteur  $d\eta$  d'une masse  $(\rho\eta)$ , d'où:

$$E_p = \langle \rho g \eta^2/2 \rangle$$

En moyenne sur une longueur d'onde:

$$\rho g \eta_0^2/4$$

\* énergie cinétique:

$$E_c = \langle \rho (u^2 + v^2) \rangle / 2 = \langle \rho (u^2) \rangle = (1/4) \rho k \phi_0^2 = (1/4) \rho k ((k/\omega)\eta_0)^2$$

Remarque: cas du clapotis, c'est une onde stationnaire il faut diviser par 2.

L'énergie cinétique s'écrit encore puisque  $\omega^2 = gk$ :  $\rho g \eta_0^2 / 4$ . Il y a donc équipartition de l'énergie.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \rho g \eta_0^2.$$

Maintenant que nous avons défini l'énergie, on veut savoir à quelle vitesse elle se déplace.

### 3.5. vitesse de groupe et vitesse de phase ...

#### 3.5.1. phase

L'élévation de la surface de l'eau est de la forme :

$$\eta = \eta_1(x,t) \exp(i(kx - \omega t))$$

$\varphi = (kx - \omega t)$  est la phase,  $\eta_1$  est l'amplitude que nous avons jusqu'à présent pris constante, mais qui peut varier lentement avec  $t$  et  $x$ . On a donc pour  $\varphi$ :

$$k = \partial\varphi / \partial x \text{ et } \omega = -\partial\varphi / \partial t.$$

On remarque que l'on a donc aussi:

$$\partial k / \partial t + \partial \omega / \partial x = 0.$$

On peut faire apparaître une "équation de continuité de la phase", l'équation précédente peut aussi s'écrire en effet:

$$\partial k / \partial t + \partial(kc) / \partial x = 0.$$

Dans un milieu dispersif,  $\omega(k)$ , on a donc:

$$\partial k / \partial t + v_g \partial k / \partial x = 0, \text{ avec } v_g = \partial \omega / \partial k$$

Ce qui signifie que  $k$  est constant le long des courbes  $x, t$  vérifiant  $dx/dt = v_g$ , à  $k$  fixé, ce sont des droites.

#### 3.5.2. Modulation du paquet d'onde...

##### deux sinus purs

On présente deux premières approches simples... la première consiste à faire la somme de deux ondes sinusoïdale de fréquence  $k_0$  et  $k_0 + \Delta k_0$  et d'observer le battement... On fait la somme et on développe grace aux identités trigonométriques:  $\cos p + \cos q = 2 \cos(p+q)/2 \cos(p-q)/2$  ... et comme on peut simplifier en développant puisque l'on suppose que l'écart de fréquences est petit:

$$k_0 + \Delta k_0 / 2 \sim k_0 \text{ et } \omega(k_0 + \Delta k_0) \sim \omega(k_0) + \Delta k_0 \partial \omega / \partial k + \dots$$

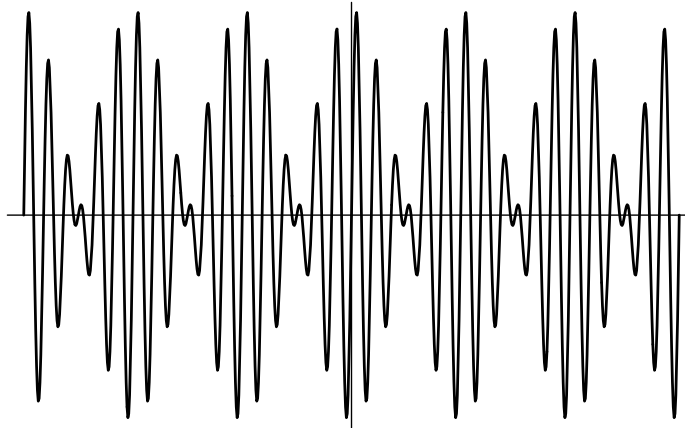
donc la somme de deux ondes de fréquences légèrement différentes donne:

$$\cos(k_0 x - \omega(k_0)t) + \cos((k_0 + \Delta k_0)x - \omega(k_0 + \Delta k_0)t) \sim 2 \cos(k_0 x - \omega(k_0)t) \cos(\Delta k_0(x - t \partial \omega / \partial k) / 2).$$

L'amplitude de l'onde somme  $2 \cos(k_0 x - \omega(k_0)t)$  est modulée par  $\cos(\Delta k_0(x - t \partial \omega / \partial k) / 2)$ , l'enveloppe se déplace à la vitesse  $\partial \omega / \partial k$ . C'est ce que l'on observe sur le dessin suivant:

```
Plot[Sin[Pi x]+Sin[(1+.2)Pi x],{x,-30,30},Frame->None]
```





### La porte

La seconde étape classique lorsque l'on introduit la notion de vitesse de groupe consiste à faire la somme d'un paquet d'ondes de fréquences piquées: une courbe en cloche autour de  $k_0$  de largeur  $\Delta k_0$ .

Une onde est considérée comme la somme de toutes ses fréquences spatiales et alors on peut écrire pour l'évolution d'une onde dont la forme au temps  $t=0$  a été décomposée en modes  $F(k)$ :

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-i(kx-\omega t)} dk$$

On privilégie pour commencer un cas simple:  $F(k)$  présente un pic en  $k_0$  et comme on peut développer:

$$k = k_0 + (k-k_0) \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k} (k-k_0) + \frac{1}{2} \omega_0'' (k-k_0)^2 + \dots$$

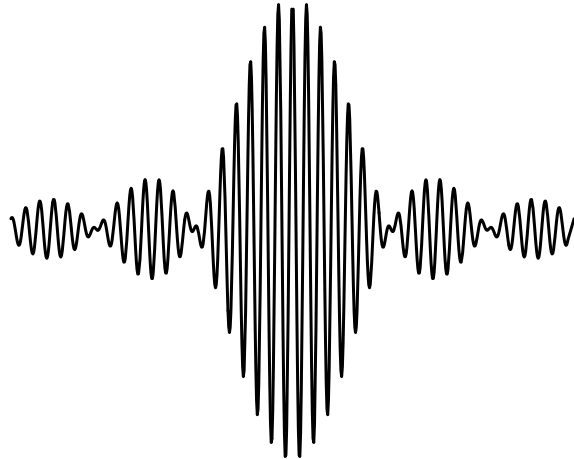
Posons  $\kappa = (k-k_0)$  et  $v_g = \partial \omega / \partial k$  et développons le déplacement  $\eta$  au voisinage de cette fréquence:

$$\eta = \exp(i(k_0 x - \omega_0 t)) \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) \exp(-i\kappa(x - v_g t)) d\kappa$$

exemple: si  $F$  est réduite à la fonction porte  $F(k)=1$  pour  $k_0 - \Delta k_0/2 < k < k_0 + \Delta k_0/2$ , et 0 sinon:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) \exp(-i\kappa(x - v_g t)) d\kappa = \Delta k_0 \operatorname{sinc}((x - v_g t) \Delta k_0 / 2)$$

sinus cardinal...  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$  est une fonction "piquée" en 0. L'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe  $v_g$ , les petites ondes se déplacent plus vite à la vitesse de phase  $c_0$ .



Que se passe t il pour les temps très longs lorsque  $\omega_0 t$  n'est plus négligeable? C'est ce que nous allons voir maintenant...

### 3.5.2 vitesse de groupe.

Le calcul précédent est un peu simpliste, reprenons le. On part de:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

Cette intégrale est en fait difficile à calculer car on l'a vu il y a beaucoup d'oscillations qui se compensent mutuellement. On va appliquer l'idée de la phase stationnaire (méthode du col), pour cela on commence par privilégier un rayon  $x = Vt$ , ce qui permet d'éliminer la dépendance en  $x$ . L'onde  $\eta$  se développe alors en:

$$\int F(k) \exp(i\varphi) dk \quad \text{où } \varphi = Vk - kc(k)$$

La contribution principale de l'intégrale est donc lorsque  $\varphi$  varie peu avec  $k$ , c'est à dire lorsque  $\partial\varphi/\partial k = 0$ . La dérivée s'annule justement pour un certain  $k_0$  tel que:

$$V = v_g = \partial\omega/\partial k \text{ en } k_0$$

On développe au voisinage de ce  $k_0$ :

$$\omega = \omega_0 + v_g (k - k_0) + (1/2)\omega_0'' (k - k_0)^2 + \dots$$

et on injecte dans l'intégrand:

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(kv_g - \omega)t) F(k) \exp(-\omega_0''((k - k_0)/(\sqrt{-2i}))^2 + \dots) dk$$

Or, seule la fréquence  $k_0$  est sélectionnée, en effet  $F(k) = F(k_0) + (k - k_0)\partial F/\partial k + \dots$ , les termes autres que  $F(k_0)$  ont une contribution négligeable, il vient:

$$\eta \sim \exp(i(k_0 v_g - \omega_0)t) F(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\omega_0''((k - k_0)/(\sqrt{-2i}))^2) dk$$

L'intégrale de  $\exp(-\omega_0''((k-k_0)/(\sqrt{-2i}))^2))dk$  est réécrite comme  $(-2i/(\omega_0''t))^{1/2} \exp(-s^2)ds$  soit

en définitive puisque  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2)ds = \pi^{1/2}$ :

$$\eta \sim i\sqrt{2\pi} e^{i\pi/4} (\omega_0''t)^{-1/2} F(k_0) \exp(i(k_0x - \omega_0 t))$$

L'amplitude de la surface surface décroît au loin en  $t^{-1/2}$ , et ce le long du rayon  $v_g$ , en dehors de ce rayon, les ondes sont inexistantes. Le paquet d'onde se déplace bien à la vitesse  $v_g$ .

Pour les Saint Thomas: ils peuvent vérifier *a mano* que la solution de l'équation (que l'on appelle aussi équation de Ginzburg-Landau:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + v \frac{\partial G}{\partial x} - a G - b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t) \text{ est: } G = \frac{e^{at}}{2\sqrt{\pi b t}} \exp(-\frac{(x-vt)^2}{4 b t})$$

et que pour  $t$  tendant vers l'  $\infty$ , cette solution devient  $G = \frac{e^{at}}{2\sqrt{\pi b t}}$  pour  $x=vt$ ,  $G=0$ , sinon. En

identifiant les paramètres

$$\omega = \omega_0 + \omega_0' (k-k_0) + \frac{\omega_0''}{2} (k-k_0)^2 + \dots \text{ ou encore}$$

$$\omega = \omega_0 - \omega_0' k_0 + \frac{\omega_0''}{2} k_0^2 + (\omega_0' - \omega_0'' k_0) k + \frac{\omega_0''}{2} k^2$$

La phase est  $Vk - \omega_0 - \omega_0' (k-k_0) + \frac{\omega_0''}{2} (k-k_0)^2$ , elle est bien extrémale et égale à  $\omega_0$  pour  $V=\omega_0'$ . Heuristiquement, si on remplace:

$$\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$$

On obtient alors une équation linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + (\omega_0' - \omega_0'' k_0) \frac{\partial}{\partial x} \varphi = (-i (\omega_0 - \omega_0' k_0 + \frac{\omega_0''}{2} k_0^2)) \varphi + i \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi$$

et  $v_g=x/t$ , qui est bien de la forme proposée appelée équation de Ginzburg- Landau

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} = a \psi + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ de solution impulsionnelle } \frac{e^{at}}{2\sqrt{\pi b t}} \exp(-\frac{(x-vt)^2}{4 b t})$$

C'est aussi une équation proche de l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi = F(\varphi);$$

### 3.5.3 vitesse de propagation de l'énergie onde linéaire

Classiquement pour l'équation des ondes non dispersives, on montre que l'énergie se déplace à la vitesse  $c_0$ ... En effet pour les ondes linéaires on peut mettre les équations sous forme conservative: variation d'énergie=flux:

$$\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\eta \frac{\partial u}{\partial x} \text{ avec } u \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

donne 
$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\eta^2 + u^2) = - \frac{\partial}{\partial x} (u\eta)$$

Or l'énergie est de la forme  $E = \int |\eta|^2 dx$ , et comme on suit une onde se déplaçant vers la droite  $\eta = u$ ,  $1/2 \int (\eta^2 + u^2) = \int \eta^2 = E$ , et :  $\int u\eta = \int \eta^2 = E$ , on a l'équation d'advection:

$$\frac{\partial}{\partial t} E + 1 \frac{\partial}{\partial x} E = 0$$

la vitesse de propagation de l'énergie est bien 1 ( $c_0$  adim).

### houle de Stokes-Airy

Observons se qui se passe maintenant dans ce cas dispersif, les équations d'évolution, après multiplication par  $u$  pour la première et par  $v$  pour la seconde et par intégration par parties deviennent:

$$u \partial(u)/\partial t = - \partial(Pu)/\partial x - P \partial u/\partial x \quad \& \quad v \partial v/\partial t = - \partial(Pv)/\partial y - P \partial v/\partial y.$$

Si on écrit la condition de surface libre sous la forme  $\eta \partial \eta / \partial t = v(x,0) \eta$ . La somme des trois équations membre à membre fait se dévoiler l'énergie totale ainsi que la divergence de la vitesse qui est nulle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + \eta^2) \right] = - \frac{\partial(Pu)}{\partial x} - \frac{\partial(Pv)}{\partial y} + v(x,0) \eta,$$

puis par intégration en  $y$  de la surface au fond, et comme  $P(x,0) = \eta$ :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

où  $E = \int \frac{u^2 + v^2 + \eta^2}{2} dy$  est l'énergie totale &  $\Phi = \int P u dy$  est le flux d'impulsion. Il ne reste plus qu'à intégrer en  $y$  (facteur  $1/2k$ ) puis à moyenner sur la longueur d'onde (facteur  $1/2$ ) pour obtenir  $\langle E \rangle = \frac{1}{2} \eta_0^2$ , puis de même pour  $Pu$ :

$$\langle \Phi \rangle = \omega \eta_0^2 / (2k) / 2 = \frac{\eta_0^2}{2} \left( \frac{\omega}{2k} \right) = \left( \frac{\omega}{2k} \right) E,$$

mais comme  $\omega^2 = k$ ,  $v_g = \partial \omega / \partial k = \left( \frac{\omega}{2k} \right)$ . On constate que:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v_g \frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

L'énergie de tout une tranche moyennée en espace de la houle dispersive en eau infiniment profonde est transportée à la vitesse  $v_g$ . (On peut faire le même calcul dans le cas d'une profondeur quelconque, mais c'est plus pénible).

### cas général

Observons se qui se passe maintenant dans le cas dispersif général, avec

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad \text{donc} \quad \eta(x,0) = \text{TF}^{-1}(F) \quad \text{et} \quad F = \text{TF}(\eta)$$

$F(k)$  est le mode associé à  $k$  au temps  $t=0$  on a par Parseval, :

$$E = \int |\eta|^2 dx = \int |F(k)|^2 dk.$$

(avec peut être  $\pi$  perdu). Si on considère un paquet d'ondes centré entre  $k_0$  et  $k_0 + \Delta k$  son énergie  $|F(k_0)|^2 \Delta k$  est donc dans l'intervalle  $x_1 = v_g(k_0)t$  et  $x_2 = v_g(k_0 + \Delta k)t$  de longueur  $t|\omega_0''| \Delta k$  (obtenue par D.L. de  $x_2 - x_1$ ), l'énergie par unité de longueur est alors

$$|F(k_0)|^2 / (t|\omega_0''|)$$

Par Parseval, c'est l'amplitude au carré, c'est bien consistant avec le fait que l'amplitude associée soit en  $F(k_0) / (t|\omega_0''|)^{1/2}$  (comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent).

Reprenons l'énergie dans l'intervalle  $x_1$   $x_2$ , elle est proportionnelle à :

$$E(t) = \int_{x_1}^{x_2} F(k) F^*(k) / (t|\omega_0''|) dx$$

Dans un système de coordonnées se développant à la vitesse de groupe: (le long des rayons  $x = \omega'(k)t$  :

$$E(t) = \int_{k_1}^{k_2} F(k) F^*(k) dk$$

si on dérive par rapport au temps, en posant a l'amplitude de  $\eta$  et en faisant attention au fait que les bornes varient

$$\frac{dE}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial a^2}{\partial t} dx + \omega'(k_2) a^2(x_2) - \omega'(k_1) a^2(x_1) = 0$$

et lorsque  $x_2 - x_1$  tend vers zéro :

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial (v_g a^2)}{\partial x} = 0.$$

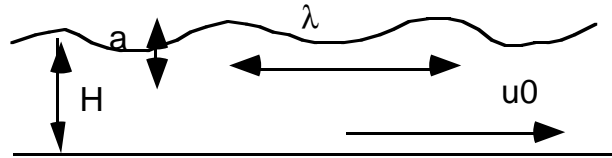
La densité d'énergie est l'amplitude au carré et le flux d'énergie est  $v_g a^2$ , l'interprétation de ce résultat est que l'énergie moyenne se propage à la vitesse de groupe.

## **4. ondes non linéaires non dispersives de surface**

### **4.1. ordres de grandeur dans le cas linéaire**

On étudie maintenant un écoulement en faible profondeur (grande longueur d'onde...). Il s'agit de l'écoulement dans un canal avec une vitesse  $u_0$  donnée (c'est différent par rapport au point de vue de la houle, en mer, où les vitesses transverses et longitudinales étaient les mêmes; on se rapproche ici de ce qui se passe dans un fleuve, où un débit est donné).

On va montrer qu'en faisant  $H/\lambda$  petit puis  $a/H$  petit (au final  $H/\lambda$  petit et donc  $a/\lambda = (H/\lambda)(a/H)$  petit) on retrouve la paragraphe précédent où on avait fait  $a/\lambda$  et  $a/H$  petits puis  $H/\lambda$  petit. Il s'agit de deux manières différentes de passer à  $a/\lambda \ll 1$  et  $a/H \ll 1$  et  $H/\lambda \ll 1$ . Bien entendu on espère retrouver la même chose!



On veut garder toujours  $v^* = (a/\tau)v$  car c'est la condition cinématique de surface. Prenons le cas d'un écoulement (poussé par une marée, piston, débit d'un fleuve...):  $u_0$  est la jauge de  $u$ .  $a/\tau$  est intouchable, mais on a vu que  $u_0$  et  $a/\tau$  ne sont plus forcément du même ordre de grandeur.

$$\partial u^*/\partial x^* + \partial v^*/\partial y^* = 0$$

$v$  varie sur la profondeur  $H$  (passe de  $a/\tau$  à 0) donc  $u_0/\lambda = (a/\tau)/H$ . (c'est le rapport de ces deux vitesses ( $v/u$ ) qui est d'ordre  $(H/\lambda) \ll 1$  comme nous l'avons vu plus haut.)

La quantité de mouvement associée à l'expression de  $P^*$  donne:

$$(u_0/\tau) \partial u/\partial t \sim (g a/\lambda) \partial \eta/\partial x$$

donc

$$(\lambda/\tau)^2 = c_0^2$$

et ainsi  $u_0 = (a/H)c_0$

$$-\partial u^*/\partial y^* + \partial v^*/\partial x^* = 0$$

donne puisque  $u$  varie sur la profondeur  $H$ :  $\partial u/\partial y = (a/\tau)(H/\lambda)/u_0 \partial v/\partial x = (H/\lambda)^2 \partial v/\partial x$

si on prend  $(H/\lambda) \ll 1$ , approximation de grande longueur d'onde,  $\partial u/\partial y = 0$

$\partial u^*/\partial x^* + \partial v^*/\partial y^* = 0$  est intégré sur la section, on peut permuter l'intégrale

$$\begin{aligned} + v &= - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy = - \frac{\partial}{\partial x} (u(1+(a/H)\eta)) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (u(1+(a/H)\eta)) \end{aligned}$$

linéarisons:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x} \text{ avec } \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

donne l'équation des ondes précédente.

#### 4.2. ondes non dispersives non linéaires de surface...

Il s'agit des équations de Saint Venant ou Shallow Water ou équations en eau peu profonde...

#### 4.2.1. ordres de grandeur

achtung, ici  $u^*$  et  $v^*$  sont mesurés par des jauges différentes comme nous venons de le voir à l'instant.

$\eta^*$  mesuré par  $a$

$v^*$  mesuré par  $ac_0/\lambda = a/\tau$

$u^*$  mesuré par  $u_0$

$x^*$  mesuré par  $\lambda$

$y^*$  mesuré par  $H$

$p^*$  mesuré par  $p^* = p_0 + \rho g H y + \rho c_0^2 (a/H) P = t^*$  mesuré par  $\tau$  et

$\tau = \lambda/c_0$

et  $u_0/c_0 = (a/H)$

$H/\lambda \ll 1$  est l'hypothèse fondamentale ici

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0.$$

$$\partial u / \partial y - (H/\lambda) \partial v / \partial x = 0.$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} u + (a/H) u \frac{\partial}{\partial x} u + (a/H) v \frac{\partial}{\partial y} u \right) = - \frac{\partial}{\partial x} P$$

$$(H/\lambda)^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} v + (a/H) u \frac{\partial}{\partial x} v + (a/H) v \frac{\partial}{\partial y} v \right) = - \frac{\partial}{\partial y} P$$

$P = \eta$  et  $v = \partial \eta / \partial t + (a/H) u \partial \eta / \partial x$  en la surface libre

et  $v =$  sur le fond on a  $v = \varepsilon F u \partial \xi / \partial x$  en  $y=0$

si on pose  $\delta = (H/\lambda) \ll 1$  et  $\varepsilon = (a/H)$  il ne reste que (remarquons que  $0 = - \partial P / \partial y$ )

$u(x,t)$  ( $\partial u / \partial y = 0$ )

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} u + \varepsilon u \frac{\partial}{\partial x} u \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \eta$$

et  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \eta + \varepsilon u \frac{\partial}{\partial x} \eta \right) - \varepsilon F u \partial \xi / \partial x =$

Cette dernière vient de

$$v = - \int_{\xi}^{1+\varepsilon \eta} \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

or nous avons le résultat bien connu portant sur les dérivations d'intégrales:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^R (f) dy = \int_0^R \frac{\partial}{\partial x} (f) dy + \frac{\partial}{\partial x} R f$$

Cette relation très utile se démontre simplement, soit  $F$  une primitive de  $f$ :

$$F(x,y_2)-F(x,y_1) = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$$

donc, si  $y_i(x)$ :

$$\partial F(x,y_2(x))/\partial x - \partial F(x,y_1(x))/\partial x = \partial F/\partial x + \partial F/\partial y (\partial y_2/\partial x) - \partial F/\partial y (\partial y_1/\partial x)$$

(c'est la règle de Leibnitz).

$$v = - \frac{\partial}{\partial x} ((1+\eta-\xi)u) + u \frac{\partial}{\partial x} \eta$$

or  $v = \frac{\partial}{\partial t} \eta + u \frac{\partial}{\partial x} \eta$ , on en déduit la relation finale pour  $\eta$ .

#### 4.2.2. équations finales

On obtient donc (fond plat):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u + \varepsilon u \frac{\partial}{\partial x} u\right) = - \frac{\partial}{\partial x} \eta$$

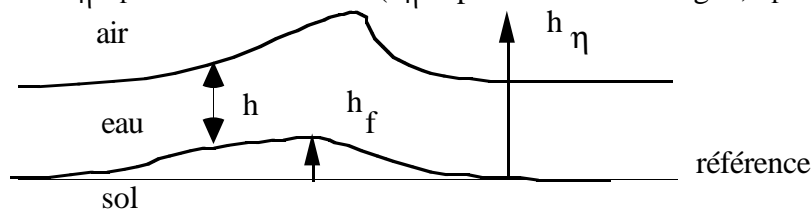
$$\frac{\partial}{\partial t} \eta + \frac{\partial}{\partial x} (u(1+\varepsilon\eta)) = 0$$

si on repasse aux dimensions (fond plat):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u\right) = -g \frac{\partial}{\partial x} h$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0$$

si on préfère poser  $h_\eta - h_f = h$  la hauteur d'eau ( $h_\eta$  déplacement de la vague,  $h_f$  forme du fond),



on a dans le cas où le fond n'est pas plat:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u\right) = -g \frac{\partial}{\partial x} h_\eta$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0$$

Ce sont les équations de Saint Venant.

#### 4.2.3. caractéristiques et applications

##### 4.2.3.1. invariant de Riemann

Le but du jeu est d'écrire les équations sous la forme dite caractéristique. On les écrit d'abord sous forme conservative:



$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + gh\right) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0.$$

$$U = (u, h)^t; \quad F = \left(\frac{u^2}{2} + gh, (uh)\right)^t$$

Mais on peut aussi l'écrire  $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0$ .

$A = \partial F / \partial U = ((u, g), (h, u))^t$ . Le système est dit hyperbolique si A est diagonalisable (c'est le cas et les valeurs propres  $\lambda_{G,D}$  sont  $u \pm \sqrt{gh}$ ) et de vecteur propre à gauche G et à droite D:

$$G \cdot (A - \lambda_G I) = 0 \quad . \quad (M - \lambda_D I) \cdot D = 0 \quad \text{et} \quad G \cdot D = I$$

donc  $G \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + G \cdot A \cdot F(\partial U; \partial x) = 0$  est aussi  $G \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_G G \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0$

Le long de la caractéristique de vitesse  $\lambda_G$  on a:

$$G \cdot \frac{dU}{dx} = 0.$$

c'est une équation différentielle ordinaire. Si cette équation est intégrable, le résultat est une fonction qui est constante le long de la caractéristique, elle est appelée invariant de Riemann:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u + \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u + 2\sqrt{gh}) = 0$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u - \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u - 2\sqrt{gh}) = 0$$

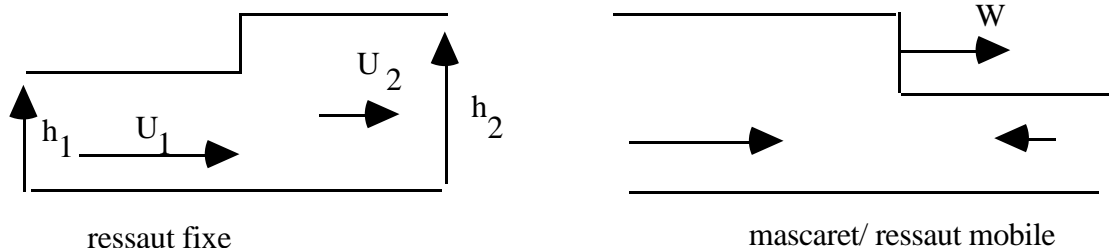
Pour les ondes non linéaires on a conservation des invariants de Riemann  $u \pm 2\sqrt{gh}$  le long des caractéristiques aux vitesses caractéristiques  $(u \pm \sqrt{gh})$

#### 4.2.3.2. rupture d'un barrage

au temps  $t=0$ , un barrage se casse...

#### 4.2.3.3. cas du ressaut

Le ressaut mobile... ou fixe... cf. Hulin Guyon Petit



Les équations SV peuvent être écrites sous la forme globale:

$$\frac{d}{dt} \int_D h dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_D (uh) dx + \int_D \frac{d}{dx} \left( \frac{\rho g h^2}{2} \right) dx = 0$$

Sachant que si une discontinuité traverse à la vitesse  $W$  un élément matériel que l'on suit dans son déplacement:

$$\frac{d}{dt} \int_D C dx = \int_D \left( \frac{\partial}{\partial t} C + \frac{\partial}{\partial x} (Cu) \right) dx - [C(W-U)]$$

où  $[\ ]$  est le saut au travers de la discontinuité. On a donc:

$$W = (U_1 h_1 - U_2 h_2) \text{ et si } F = (u - W) / \sqrt{gh} \quad F^2 = (1 + \sqrt{(1 + 8F_1^2)^3} / (64F_1^4)) \dots$$

#### 4.2.3.3. Le déferlement

Ce ressaut est une solution discontinue, cette discontinuité s'interprète comme le déferlement de ce ressaut sur une distance plus courte que la distance choisie  $\lambda$ . Nous allons montrer ici dans un cas simplifié et linéarisé comment une vague régulière se raidit pour donner un choc: le déferlement. On en déduit que pour une onde se déplaçant vers la droite ( $u - 2\sqrt{gh}$ ) est constant donc si la surface n'est pas perturbée au loin:

$$u = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}$$

L'équation en eau peu profonde:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} = 0$$

avec  $h = h_0 + \eta$  et  $u = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}$  devient;

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (h_0 + \eta) \sqrt{\frac{g}{h_0 + \eta}} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

en développant pour les petites amplitudes:

$$(3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}) = \sqrt{gh_0} (3(1 + \eta/h_0)^{1/2} - 2) = \sqrt{gh_0} (1 + (3/2)\eta/h_0 + \dots)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 (1 + (3/2)\eta/h_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \text{ en adim: } \frac{\partial \eta}{\partial t} + (1 + \frac{3}{2}\epsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

Si on fait le changement de variables  $\xi = x - t$  et  $\tau = t$ , on se place dans le repère de l'onde qui se déplace à la vitesse 1 (au premier ordre). On a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

donc:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \eta + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0$$

il faut donc poser  $T = \tau/\epsilon$ , c'est à dire que la jauge en temps est très grande. C'est un temps long.

On obtient alors l'équation de Burgers:

$$\frac{\partial}{\partial T} \eta + \frac{3}{2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0$$

pour simplifier les notations on pose  $t=T$  et  $x=(2/3)\xi$ . L'équation d'advection

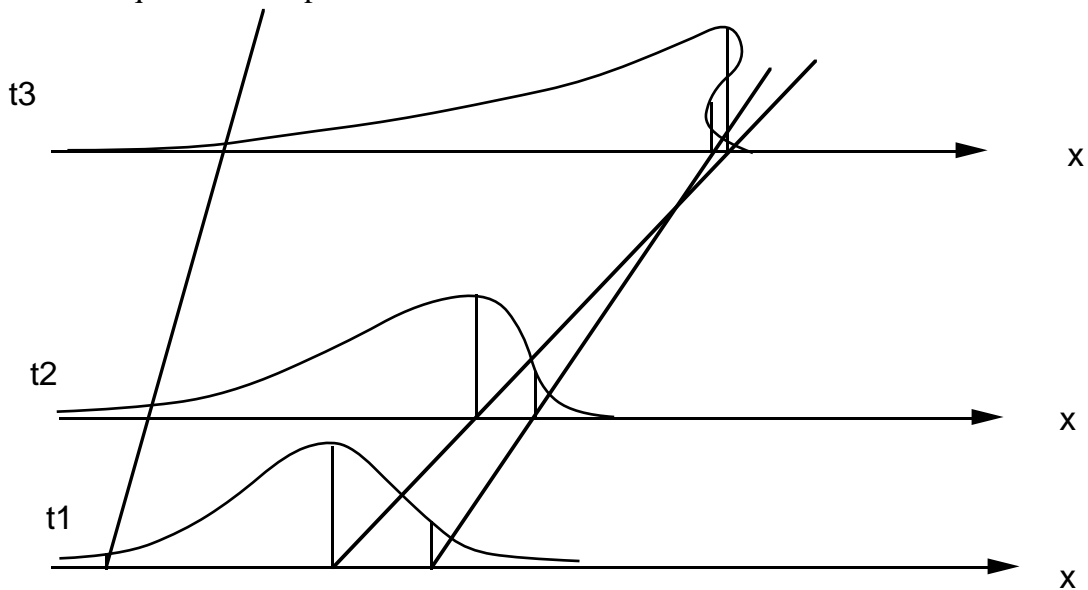
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

peut se résoudre connaissant  $\eta(x,t=0)=\eta_0(x)$  la distribution initiale. Le long des droites:  $x=\eta_0(\xi)t+\xi$  (passant en  $t=0$  en  $x=\xi$  là où la hauteur était  $\eta_0(x=\xi)$ ) la hauteur est conservée:

$$\eta(x,t)=\eta_0(\xi) = \eta_0(x-\eta_0(\xi)t)$$

On vérifie  $\partial u/\partial t = \eta_0'(\xi)(\partial \xi/\partial t)$  et  $\partial u/\partial x = \eta_0'(\xi)(\partial \xi/\partial x)$ , or

$\partial \xi/\partial x = 1/(\eta_0'(\xi)t+1)$  et  $(\partial \xi/\partial t) = -\eta_0(\xi)/(\eta_0'(\xi)t+1)$ . OK. La queue de la vague s'étale de plus en plus tandis que le haut dépasse l'avant.



Lorsque le haut dépasse le bas, le choc se produit lorsque l'on résout nos équation (car  $\eta$  est une fonction de  $x$ , la méthode des caractéristique introduit 3 valeurs).

Les équations SW ne sont en réalité plus valides: il se passe des phénomènes à des échelles courtes. un bricolage; la viscosité qui va lisser le choc. On ajoute un terme de viscosité artificielle en  $v\partial^2 u/\partial x^2$ :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Cela fait apparaître une échelle courte  $v$ .

#### 4.3.2. note sur la marée

\* Amplification de l'onde de marée dans un bassin.

dans un bassin rectangulaire, de longueur  $L$ , en  $x=0$  on donne  $\eta_0 \cos(\omega t)$

$$\eta = \eta_0 \cos(\beta x) / \cos \beta L \cos(\omega t); \beta = \omega/c.$$

Il y a donc résonance pour  $\beta L = \pi/2 \dots$  Marées importantes dans la baie de Fundy (Canada) et en Manche

\* Variations lentes du fond  $u \partial/\partial x$  petit, il reste:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( gh \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

\*Amphidromie de Kelvin

Si on tient compte de Coriolis... point d'amplitude de marée nulle (ex dans la Manche).

## 5. écoulements avec Viscosité

### 5.1. amortissement visqueux des ondes linéaires

#### 5.1.1. amortissement volumique:

Posons

$$\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t) e^{ky}$$

$$\eta = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\phi_0 = -(k/\omega)\eta_0$$

et définissons des moyennes

$$\langle \sin^2 kx \rangle = \langle \cos^2 kx \rangle = \lambda^{-1} \int_0^\lambda \sin^2 2\pi x/\lambda \, dx = 1/2$$

en revanche on définit

$$\langle e^{2ky} \rangle = \int_{-\infty}^0 e^{2ky} dy = 1/(2k)$$

De manière très simple, on peut estimer l'amortissement des ondes gravitationnelles comme Landau (Landau p130 §25), variation de l'énergie pour tout un volume de contrôle:

$$\rho de/dt = \sigma : D = -p dV + 2 \mu D : D$$

Il nous faut évaluer

$$\langle 2 \mu D : D \rangle = ?$$

Or par définition:

$$D_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad D_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial y} u \right)$$

D'où l'on tire la dissipation:

$$\langle 2 \mu D : D \rangle = - \int \left[ \mu \left( \frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial y} u \right)^2 + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] d\tau$$

Or,  $\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t) e^{ky}$  dans le cas de la houle de Stokes,  $\phi_0$  dépend du temps:  $\phi_0(t) = (k/\omega)\eta_0(t)$  varie lentement sur une période...

$$\frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial y} u = -2 k^2 \phi_0 \sin(kx - \omega t) e^{ky}$$

donc (moyenne sur une période pour x), et  $\phi_0$  varie lentement avec le temps on intègre sur toute la profondeur... Donc la dissipation

$$\langle 2 \mu D:D \rangle = [\mu (4) (1/2) + 4\mu (1/2)] \langle \phi_0^2 \rangle k^4 / (2k) = 2 \phi_0^2 k^3$$

varie comme le cube de k (cf Lamb § 348) or cette dissipation correspond à la diminution d'énergie:

$$\frac{d}{dt} E = \langle 2 \mu D:D \rangle$$

L'énergie mécanique totale E est la somme de l'énergie cinétique + potentielle, c'est aussi:

$$2 * \text{l'énergie cinétique} = 2 \langle \rho (u^2 + v^2) \rangle / 2 =$$

donc la valeur moyenne de l'énergie E est

$$2 \langle \rho (u^2) \rangle = 2 \rho k^2 \phi_0^2 (1/2) 1/(2k)$$

sa variation par rapport au temps est donc telle que

$$\frac{d}{dt} (\phi_0^2) \rho k / (2) = -2 \phi_0^2 k^3$$

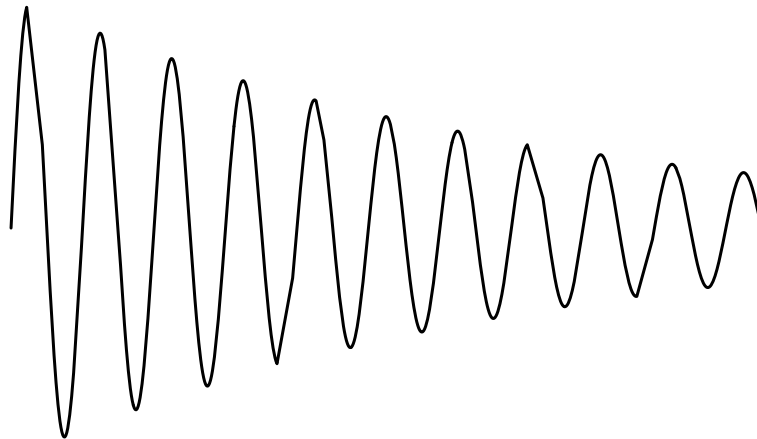
$$\frac{d}{dt} (\phi_0^2) = -4 \nu k^2 \phi_0^2$$

d'où une décroissance avec un temps caractéristique de  $1/(4\nu k^2) = g^2/(4\nu\omega^4)$

or l'amplitude de la vague est  $\eta_0$  et  $\phi_0 = k\eta_0$ , donc

$$\frac{d}{dt} (\eta_0) = -2 \nu k^2 \eta_0$$

une décroissance avec un temps caractéristique de  $1/(2\nu k^2) = g^2/(2\nu\omega^4) = 0.71\lambda^2$  ( $\lambda$  en cm)  
onde capillaire durée de vie courte si  $\lambda = 100\text{m}$  houle océanique, durée de vie 900 jours)



## 5.1.2. si maintenant on se place près d'une paroi

### 5.1.2.1. profil dans la couche limite

La vitesse longitudinale est de la forme  $u = u_0 \cos(kx - \omega t)$  (vitesse de glissement), problème de Stokes: près de la paroi (en fait en variables de couche limite)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} u \right) = - \frac{\partial}{\partial x} P + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \quad \Leftrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} u \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} U_0 \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$$

On cherche des solutions complexes en  $u - U_0 = A \exp(Ky + i(kx - \omega t))$  d'où

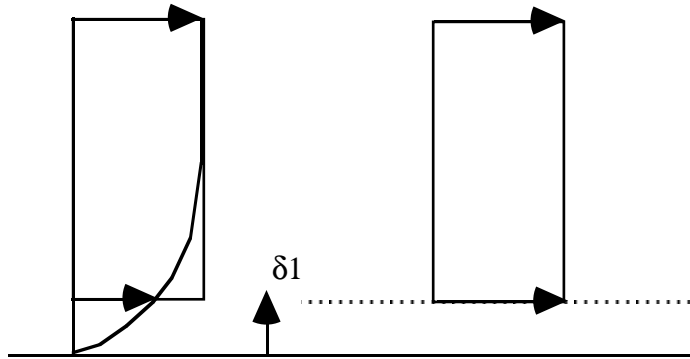
$$-i \omega = \nu K^2 \quad \text{d'où} \quad K = \pm(1-i)\beta \quad \text{avec} \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

La solution est donc en  $\exp(-(1+i)\beta y + i(kx - \omega t))$ , soit en réel:

$$u = u_0 \cos(kx - \omega t) - u_0 \cos(kx - \omega t - \beta y) e^{-\beta y}$$

Il est ensuite intéressant d'étudier le second ordre de cette équation. On constate que les termes en  $\cos(kx - \omega t)^2$  sont présents, ils produisent donc en moyenne un léger courant de dérive. La valeur de ce courant est fondamentale pour la connaissance du transport des particules en

suspension. Si on veut,  $\delta_1 u_0 = \int_0^\infty (u_0 - u) dy$  définit une épaisseur de déplacement  $\sqrt{(\nu/\omega)}$   $(1+i)/\sqrt{2}$



c'est comme si le mouvement était un peu moins profond que prévu: le fond est en  $-h_0 + \delta_1$ , la profondeur diminue de  $\delta_1$ . Donc si  $\omega_0 = ((g + \sigma k^2/\rho)k h(kh))^{1/2}$ , le vrai  $\omega$  devient (Lighthill p231):

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 (1 - \omega_0^{-1} \delta_1 \partial \omega_0 / \partial h + \dots) \\ \omega &= \omega_0 (1 - (\nu/2\omega)^{1/2} (1+i) k / \text{sh}(2kh)) \end{aligned}$$

Comme on a:

$$\omega = (\omega_0 - (\omega\nu/(8h^2))^{1/2} (2kh)/\text{sh}(2kh)) - i ((\omega\nu/8)^{1/2} h^{-1} (2kh)/\text{sh}(2kh))$$

la perte d'amplitude a un temps caractéristique de l'inverse de  $((\omega\nu/8)^{1/2} h^{-1} (2kh)/\text{sh}(2kh))$  négligeable en eau profonde. En eau peu profonde:

$$\omega = (\omega_0 - (\omega_0\nu/(8h^2))^{1/2}) - i (\omega_0\nu/(8h^2))^{1/2} = (\omega_0 - \gamma) - i \gamma = \omega'_0 - i \gamma$$

L'amplitude se comporte donc en  $\exp(-i(\omega'_0 - i\gamma)t) = \exp(S t)$

L'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude ( $\text{Re}(u) = (1/2)(u + u^*)$ ), donc à

$$\left( \frac{\exp(S t) + \exp(S^* t)}{2} \right)^2$$

si on développe, on trouve sans peine ( $S = -i\omega'_0 - \gamma$ ;  $S^* = i\omega'_0 - \gamma$ ):

$$e^{-2\gamma t} (\cos 2\omega'_0 t) / 2 + (1/2) e^{-2\gamma t}$$

la valeur moyenne, sur une période  $1/\omega'_0$  est telle que le premier terme est nul, il ne reste que la décroissance lente en  $e^{-2\gamma t}$ . On en déduit que :

$$\frac{d}{dt} u_0^2 = - 2 \gamma u_0^2$$

est la perte d'énergie par unité de temps.

### 5.1.2.2. dissipation près de la paroi

On retrouve ce résultat si on calcule directement la dissipation:

$$\langle 2 \mu D:D \rangle = - \int [\mu (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} u)^2 + 2\mu (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2\mu (\frac{\partial v}{\partial y})^2] d\tau =$$

Le terme dominant est:

$$\mu \langle (\frac{\partial}{\partial y} u)^2 \rangle = \mu u_0^2 \beta/2 (1/2)/H$$

car

$$\langle e^{-2\beta y} \rangle = H^{-1} \int_0^{\infty} e^{-2\beta y} dy = 1/(2\beta H)$$

D'où:

$$\frac{d}{dt} \langle \rho (u^2) \rangle = du_0^2/dt (\rho)(1/2)/(2\beta H)$$

Et en ré-assemblant, et en posant  $\gamma = \sqrt{\frac{\omega v}{8H^2}}$  :

$$\frac{d}{dt} u_0^2 = - 2 \gamma u_0^2$$

Ce qui est ce que l'on venait de trouver.

### 5.1.2.3. note utile par la suite pour les solitons

*etc.* Miles: il se donne une onde élémentaire  $\eta(t) = \eta_0(t)$  variant lentement sur une période. Donc

$$\frac{d}{dt} \eta_0^2 = - 2 \sqrt{\frac{\omega v}{8H^2}} \eta_0^2 = -2 \gamma \eta_0^2$$

$\gamma$  coeff d'atténuation. On remarque que si on limite le canal en largeur, le même calcul sur les bords donne: un  $\gamma$  total de:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega v}{8H^2}} (1 + \frac{2d}{b})$$

Si on prend une onde somme de toutes ses composantes de Fourier:

$$\eta = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} A(\kappa, t) e^{i\kappa x} d\kappa$$

avec  $x = x - \int_0^t c dt$  où  $c$  est la vitesse de phase qui est légèrement différente de  $c$ . La généralisation

de l'équation pour un mode donne:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} |A(\kappa, t)|^2 d\kappa = -2 \alpha \int_0^{\infty} |\kappa d|^{1/2} |A(\kappa, t)|^2 d\kappa \quad \text{et} \quad \alpha = (\kappa d)^{-1/2} \gamma$$

L'onde solitaire est  $a \operatorname{ch}(3a/4d^3)^{1/2}x)^{-2}$  et  $c=c(1+(a/2d))$  comme nous le verrons par la suite, la décomposition en modes donne:

$$A = (4/3)\pi d^3 \kappa \operatorname{cosch}(\pi(d^3/3a)^{1/2}\kappa)$$

on en déduit après des calculs:

$$a(t)=a_0(1+C (a_0/d)^{1/4}\alpha t)^{-4}$$

$C=0.2372\dots$  (s'exprime avec  $\Gamma$  et la fonction de Riemann...)

qui démontre le résultat dit de "Keulegan". Le résultat est que la viscosité diminue peu l'amplitude...

### 5.3. saint venant visqueux démarche naturelle

#### 5.3.1. équations de NS

Moindre dégénérescence des équations d'Euler si  $x$  et  $y$  sont mesurés avec  $h_0$  et les vitesses  $u$  et  $v$  mesurées avec  $c_0$ . Le Reynolds vaut alors  $R=c_0h_0/\nu$ .

on a le système:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v &= 0. \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}v + u\frac{\partial}{\partial x}v + v\frac{\partial}{\partial y}v\right) &= -\frac{\partial}{\partial y}P + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v \end{aligned}$$

Les équations à la surface libre sont alors:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y}u + \frac{\partial}{\partial x}v\right) \left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial y}v - \frac{\partial}{\partial x}u\right) \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ (p_0 - p) \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) + (2/R) \left(\frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial x}u\right) \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial y}u \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}v \frac{\partial h}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

et

$$v = \frac{\partial}{\partial t}h + u \frac{\partial}{\partial x}h$$

la contrainte tangentielle nulle et la contrainte normale égale à la pression atmosphérique.

Au fond: adhérence.

#### 5.3.2. équations de couche limite associées:

en  $y \rightarrow 0$   $u(x,y) \rightarrow U_e(x)$ , c'est la vitesse de glissement. On introduit  $\delta_0$  (à ne pas confondre avec le précédent),  $\delta_0 = R^{1/2}$ .

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0.$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u\right) = -\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y}P$$

C.L.

$$u(x,y=0)=v(x,y=0)=0 \text{ et } u(x,y \rightarrow \infty) \rightarrow U_e(x)$$

### 5.3.3. vitesse au fond

Examinons plus précisément le raccord. Il s'agit là de l'analyse de STEWARTSON 64 (voir Cousteix p 123, il préfère garder l'équation de l'entraînement ...), partons de l'équation de l'incompressibilité:

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0.$$

on la soustrait à  $\frac{\partial}{\partial x}U_e$ . d'où:

$$\frac{\partial}{\partial y}v = \frac{\partial}{\partial x}(U_e - u) - \frac{\partial}{\partial x}U_e.$$

donc

$$v(\infty) - v(0) = \frac{\partial}{\partial x}(U_e \delta_1) - \frac{\partial}{\partial x}U_0 y = U_e \frac{\partial}{\partial x} \delta_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}U_e\right) (\delta_1 - y)$$

y est ici mesuré avec  $1/R^{1/2}$  ainsi que v.

On voit que la vitesse n'est pas bornée à l'infini, pour lever ce problème on passe au fluide parfait. Dans le fluide parfait au voisinage de la paroi, on a:

$$U = U_e + \frac{\partial}{\partial y}U_e y + \dots$$

et

$$V = V_{e0} + \frac{\partial}{\partial y}V_e y + \dots \text{ où } y \text{ est mesuré avec } L.$$

donc,:

$$V = V_{e0} - \frac{\partial}{\partial x}U_e y +$$

La démarche classique s'arrête là, on dit que  $V_{e0}=0$ . Mais en réalité la vitesse induite par la couche limite et qui est ressentie par le fluide parfait comme une vitesse à la paroi (vitesse de transpiration, elle est en  $1/R^{1/2}$ ) est donc obtenue par :

$$V_{e0} = \frac{\partial}{\partial x}(U_0 \delta_1).$$

Remarque, si on a effectué la transformation de Prandtl complète, les équations étaient, pour la couche limite, les mêmes, mais:

$$y \text{ est } y-f(x,t),$$

et

$$v \text{ est } v - \frac{\partial f}{\partial t} - u \frac{\partial f}{\partial x}.$$

donc:

$$V_0 = \frac{\partial}{\partial x} (U_0 \delta_1) + \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x}.$$

saint venant visqueux serait de tenir compte non seulement du  $\partial/\partial t$  mais du  $\partial/\partial x$ ...

l'intégration de  $\partial_x u = -\partial_y v$  sur toute la section donne la même équation que la précédente raccordée avec le fluide parfait.

#### 5.4. Nouveau Problème interactif

équation de fluide parfait + vitesse de transpiration...

...

### 6. Les solitons

#### 6.1. première approche du soliton.

##### 6.1.1. dispersion

Partons de la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

et développons la dans le cas peu dispersif (eau peu profonde) et longueur d'onde grande  $kh \rightarrow 0$

$$\omega^2 = gk(kh - (kh)^3/3 + (2/15)(kh)^5 - \dots)$$

$$\omega^2 = (gh) k^2 (1 - \frac{1}{3}(kh)^3 + \dots)$$

donc puisque l'on pose  $c_0 = \sqrt{gh}$

$$\omega = \pm c_0 k (1 - \frac{1}{6}(kh)^2 + \dots)$$

On en déduit, en prenant la valeur + qui est celle des ondes se propageant vers la droite, que cela correspond à l'équation de dispersion de l'évolution linéaire de:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

##### 6.1.2. non linéarité

On a vu pour les ondes non linéaires que la conservation des invariants de Riemann  $u \pm 2\sqrt{gh}$  le long des caractéristiques aux vitesses caractéristiques ( $u \pm \sqrt{gh}$ )

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u + \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u + 2\sqrt{gh}) = 0$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u - \sqrt{gh}) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u - 2\sqrt{gh}) = 0$$

On en déduit que pour une onde se déplaçant vers la droite ( $u - 2\sqrt{gh}$ ) est constant donc si la surface n'est pas perturbée au loin:

$$u = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}$$

L'équation en eau peu profonde:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0$$

avec  $h = h_0 + \eta$  et  $u = 2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}$  devient;

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + (2\sqrt{gh} - 2\sqrt{gh_0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (h_0 + \eta) \sqrt{\frac{g}{h_0 + \eta}} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + (3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

en développant pour les petites amplitudes:

$$(3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}) = \sqrt{gh_0} (3(1 + \eta/h_0)^{1/2} - 2) = \sqrt{gh_0} (1 + (3/2)\eta/h_0 + \dots)$$

### 6.1.3. équation KdV

miraculeusement on peut additionner les deux effets et on obtient:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h_0} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

C'est la fameuse équation KdV. Les effets de dispersion qui tendent à détruire le paquet d'onde sont compensés par les effets linéaires qui font se raidir et se ramasser la vague.

### 6.1.4. intervention de la viscosité

Pour la viscosité on a vu que le défaut de vitesse induisait une épaisseur fictive équivalente: l'épaisseur de déplacement et on a trouvé la contribution dispersive de la viscosité, on y fait tendre  $kh$  vers 0.

$$\omega = \omega_0 (1 - (v/2\omega)^{1/2} (1+i) k/sh(2kh))$$

devient

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 - (v\omega_0)^{1/2} (1+i)^{1/2} 1/(2h) = \\ \omega = (\omega_0 - (v\omega_0)^{1/2}) - i (v\omega_0)^{1/2} = (\omega_0 - \gamma) - i \gamma = \omega'_0 - i \gamma \end{aligned}$$

astuce comme  $k = \pm \omega_0/c$

$$(v\omega_0)^{1/2} / h = c(v|k|/(ck^2h^2))^{1/2} k = c k R^{-1/2} |k|^{-1/2} \text{ avec } R = ch/v. \text{ Donc:}$$

$$\gamma = (v\omega_0)^{1/2} / 2^{1/2} 1/(2h) = c k R^{-1/2} (|k|h)^{-1/2} 2^{-1/2}$$

donc si on veut  $kh$  petit  $R$  doit être très grand.  $kh \gg R^{-1}$ , reste:

$$\omega = \omega_0 - c (ik) R^{-1/2} (i|k|h)^{-1/2} 2^{1/2}$$

en revanche si on a  $H(x)x^{-1/2}$  sa TF est  $((1-i)/\sqrt{2}) \sqrt{\pi} (k^2)^{-1/4}$  (résultat Mathematica)

par TF inverse, on a donc la TF  $^{-1}$  de  $(i|k|)^{-1/2}$  qui est donc  $H(x)x^{-1/2}/\sqrt{\pi}$ :

Il vient donc un terme source supplémentaire qui est proportionnel à  $\partial\eta/\partial x$ , il y a une convolution avec  $TF^{-1}((i|k|)^{-1/2})$  qui est du genre  $H(x)/\sqrt{x}$ . On obtient donc au final l'équation des solitons avec dispersion visqueuse (Kakutani & Matsuuchi 75)

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h_0} \eta \frac{\partial\eta}{\partial x} - c R^{-1/2} h^{-1/2} \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^x \frac{\eta'(\xi)}{(x-\xi)^{1/2}} d\xi = 0$$

on précise par la suite les difficultés...

Note on a exactement la même chose en acoustique on parle de dérivée "1/2":

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h_0} \eta \frac{\partial\eta}{\partial x} - c R^{-1/2} h^{-1/2} \frac{\partial^{1/2}\eta}{\partial x^{1/2}} = 0$$

autres cas exotiques

dans le cas de Benjamin Ono, on réinterprète le développement de  $\omega$  en puissances de  $k$ :

$$\omega = (kc) (1 - \beta k^2 + \dots)$$

qui est l'expression valable pour les solitons en se demandant ce qui se passe si on écrit:

$$\omega = (kc_0) (1 - \gamma|k| + \dots)$$

Réécrit avec les TF inverses

[sachant que  $\text{sign}(k) = |k|/k$ , on veut la TF de  $(\text{sign}(k)k)^{-1/2}$

$TF(1 + \text{sign}(k)) = TF(H)$

or  $TF(df/dx) = (ik) TF(f)$  si  $f=H$  sachant que  $TF(\delta) = 1$ ,  $TF(H) = 1/(ik)$

$TF(\text{sign}(k)) = -\delta + 1/(ik)$

$TF(vp(1/x)) = \text{sign}(k)$

rappel Schwartz exercice V10 p 234, si  $1/2 < k < 1$ :

$$TF(r^{-k}) = \pi^{k-1/2} \frac{\Gamma(\frac{1-k}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} (k/2\pi)^{k-1}$$

] cela donne alors

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial\eta}{\partial x} + C \eta \frac{\partial\eta}{\partial x} + c_0 \gamma \text{FP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta'(\xi)}{x-\xi} d\xi = 0$$

## 6.2. dérivation des équations

On repart des équations d'Euler complètes. Nos analyses précédentes ont mis en lumière deux petits paramètres  $\varepsilon$  et  $\delta$ . Que se passe-t-il si leurs effets sont cumulés? Nous venons en fait de le voir plus haut! la non linéarité jaugée par  $\varepsilon$  raidit le signal, elle crée de nombreux modes, en

revanche la dispersion étale le signal... Nous injectons directement ces paramètres dans les équations et nous mettons en œuvre la moindre dégénérescence.

Nous supposons que la forme de la vague puisse s'écrire  $\eta_0 F(x/\lambda)$  et  $\varepsilon = \eta_0/h_0$  et  $\delta = h_0/\lambda$ , sont nos petits paramètres. N'ayant *a priori* que  $g$  et  $h_0$  comme paramètre avec dimension fondamentaux, on se sert d'eux pour les jauges. On ne connaît pas pour l'instant le temps que l'on pose égal à  $\tau(h_0/g)^{1/2}t$ , le potentiel sera de la forme  $\phi_0 h_0 (gh_0)^{1/2}$ ,  $\tau$  et  $\phi_0$ , sans dimensions, sont deux fonctions pour l'instant inconnues de  $\varepsilon$  et  $\delta$ .

Ce que nous allons retrouver c'est que l'on passe de la houle où le temps est mesuré par  $(h_0/g)^{1/2}$  à SV (ou SW) où il est mesuré par  $(h_0/g)^{1/2}\delta^{-1}$ , de même  $\phi$  change de jauge, il passe de  $\eta_0(h_0g)^{1/2}$  à  $(h_0g)^{1/2}\lambda$ . (soliton: resp  $(\lambda/h_0)(h_0g)^{1/2}$ , le même que SV et le potentiel est en  $(h_0g)^{1/2}h$  ( $\eta_0/h_0)(\lambda/h_0)$ ).

Les équations écrites avec le potentiel de vitesse (comme il est classique de la faire) deviennent

$$\delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi = 0$$

en  $y = -1$ :  $\partial\phi/\partial y = 0$ , à la surface libre en  $y = \varepsilon\eta$ :

$$\eta + \phi_0/(\varepsilon\tau) \frac{\partial\phi}{\partial t} + (1/2) (\phi_0^2/\varepsilon) \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - (\tau\phi_0/\varepsilon) \frac{\partial\phi}{\partial y} + \delta^2 \tau \phi_0 \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$$

et à  $t=0$ ,  $\phi=0 = \frac{\partial\phi}{\partial t}$  et  $\eta=F(x)$

i) si  $\varepsilon \ll 1$  et  $\delta=1$  ondes de faible amplitude, on doit choisir  $\phi_0/(\varepsilon\tau)=1$  et  $(\tau\phi_0/\varepsilon)=1$ , donc  $\phi_0=\varepsilon$  et  $\tau=1$ . On retrouve Stokes...

ii) si  $\delta \ll 1$  et  $\varepsilon=1$  c'est Shallow water, on prend  $\tau\phi_0\delta^2=1$  on choisit aussi  $\phi_0=\tau$  de sorte que  $\phi_0=\tau=1/\delta$

le temps est bien  $\lambda/(gh_0)^{1/2}$ .

au fond en  $y=-h(x)$ ,  $\partial\phi/\partial y = -\delta^2(\partial\phi/\partial x) \partial h/\partial x$

Si on pose  $\eta+h=H$ :

$$u_t + H_x + uu_x = h'$$

$$H_t + (uH)_x = 0.$$

iii)  $\delta \ll 1$  et  $\varepsilon \ll 1$  cas où  $\varepsilon$  et  $\delta$  sont petits: système de Lamb... En développant  $\phi$  en série, au premier ordre  $\phi=f(x)$ , d'où:

$$\delta^2 f'' + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi = 0$$

$$\phi = f(x) + \delta^2 \left( -(y+y^2/2) f''(x) \right)$$

si on choisit  $\phi_0 = \varepsilon/\delta$  et  $\tau = 1/\delta$ , on trouve

$$\begin{aligned} u_t + \eta_x &= 0 \\ \eta_t + u_x &= 0. \end{aligned}$$

A l'ordre suivant, cela donne:

$$\begin{aligned} u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x &= O(\varepsilon \delta^2) \\ \eta_t + u_x + \varepsilon \eta u_x + \frac{\delta^2}{3} u_{xxx} &= O(\delta^4). \end{aligned}$$

Il est alors intéressant de choisir  $\varepsilon = \delta^2$ , si on considère maintenant une vague qui se déplace vers la droite à la vitesse 1, son profil change peu, il faut attendre très longtemps pour la voir se déformer, le changement d'échelle correcte sera de choisir comme nouvelles variables  $z = x - t$  et  $\tau = t/T$ ,

en substituant

$$\begin{aligned} -u_z + \eta_z + \varepsilon u u_z + T^{-1} u_\tau &= 0 \\ -\eta_z + u_z + T^{-1} \eta_\tau + \varepsilon (u \eta_z + \eta u_z + \frac{1}{3} u_{zzz}) &= 0. \end{aligned}$$

reste à identifier  $T = 1/\varepsilon$  et développer  $u$  en posant  $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$  et  $\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + \dots$  avec  $u_0 = \eta_0$ , on en déduit:

$$-u_{1z} + \eta_{1z} = u_0 u_{0z} + u_{0\tau} \quad \text{et} \quad \eta_{1z} - u_{1z} = \eta_0 \tau + u_0 \eta_{0z} + \eta_0 u_{0z} + \frac{1}{3} u_{0zzz}.$$

l'équation de Korteweg-DeVries (1895) s'en déduit:

$$\eta_\tau + \frac{3}{2} \eta \eta_z + \frac{1}{6} \eta_{zzz} = 0.$$

Elle est valable lorsque  $\delta = \varepsilon^2$  et pour des temps d'ordre  $(h_0/g)^{1/2}/\delta^3$

avec dimension, on a fait apparaître l'onde en  $f(x-t)$  mais localisée d'où  $(x-t)/(T^{-1}) \dots$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h_0} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

équations de Boussinesq:

Il s'agit en fait exactement du même système obtenu à partir de l'équation du potentiel écrite en  $u$ , cela donne:

$$\begin{aligned} u_t + \varepsilon u u_x + \eta_x - \frac{1}{2} \delta^2 u_{txx} &= 0, \\ \eta_t + (u(1 + \varepsilon \eta))_x - \frac{1}{6} \delta^2 u_{xxx} &= 0. \end{aligned}$$

Il apparaît une subtile différence de  $\delta^2!$  (cf Debnath p142-157), en cherchant la solution sous la forme  $u = \eta + \varepsilon u_e + \delta u_d$ , on trouve

$$\eta_t = -\eta_x \quad \text{et} \quad u = \eta - \varepsilon/4 \eta^2 + \delta^2/3 \eta_{xx}$$

et enfin:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (1 + \frac{3}{2} \varepsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} \delta^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

On remarque que les équations de Boussinesq linéarisées (Whitham section 13.11) ont une relation de dispersion avec un terme en plus.

On peut aussi écrire les équations de Boussinesq sous la forme dimensionnée:

$$u_t + uu_x + g\eta_x - \frac{1}{3}h^2 u_{txx} = 0,$$

$$\eta_t + (u(h))_x = 0.$$

Nous avons codé:

$$u_t + \varepsilon uu_x + \eta_x = 0,$$

$$\eta_t + (u(1 + \varepsilon \eta))_x - \frac{1}{6} \delta^2 \eta_{txx} = 0.$$

qui est une forme similaire.

### équations de conservation

Une équation de conservation est de la forme:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x},$$

On vérifie sans peine que KdV (sous forme canonique:  $\frac{\partial \eta}{\partial t} - 6\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$ )

admet des intégrales premières:

conservation de la "masse"  $A = \eta$ ,  $F = \eta_{xx} - 3u^2$ .

conservation de l'énergie"  $A = \eta^2/2$   $F = \eta \eta_{xx} - (1/2)u_x^2 - 2u^3$ .

idem pour Boussinesq...

## 6.3. solutions classiques

### 6.3.1. équation d'advection

la solution de l'équation d'advection

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

est si  $\eta(x, t=0) = \eta_0(x)$ :

$$\eta(x, t) = \eta_0(x - \eta_0 t)$$

### 6.3.2. la solution KdV...

Par intégration...

on cherche des solutions en  $\eta = f(x - Ct) = f(s)$

$$f'' = 6Cf - 9/2 f + 2 + \text{cste}$$

si pour  $s \rightarrow \pm\infty$   $f$  et ses dérivées sont nulles:

$$(f')^2 = 6Cf^2 - 3f^3$$

Il est alors facile de voir que  $\alpha/\cosh(\beta s)^2$  convient!! avec  $\alpha=2C$  et  $\beta=(3C/2)^{1/2}$ . C'est l'onde solitaire:

$$a \operatorname{ch}\left[\left(\frac{3a}{4d^3}\right)^{1/2}\left(x-\left(1+\frac{a}{2d}\right)t\right)\right]^{-2}$$

ou, on peut aussi trouver des ondes cnoïdales... succession de bosses...

### 6.3.3. KdV linéaire

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\delta^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

par invariances par dilatations on obtient les solutions semblables...

la solution est:

$$\eta(x,t)=t^{-1/3} \operatorname{Ai}\left[\frac{(x-t)}{t^{1/3}} \left(\frac{2}{\delta^2}\right)^{1/3}\right]$$

### 6.3.4. Burgers

#### 6.3.4.1. Le "choc"

L'équation est:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

on pose  $\xi=(x-ct)/v$ ,

$-cF'+HFF'+F''=0$  donc  $-cF+F^2/2+F'=cst$  donc si on fait  $c=0$  et  $F(\pm\infty)=\pm 1$ ,  $cst=1/2$

d'où la solution de 1 à -1:  $-\operatorname{th}(x/v)$

s'il y a mouvement  $c=(h_2-h_1)/2$  et  $\eta = (h_2+h_1)/2 + (1/2)(h_2-h_1)\operatorname{th}((x-ct)/v)$

#### 6.3.4.2. solution générale de Burgers

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - v \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

transformation de Hopf:

$$\eta = -2v \frac{\partial \operatorname{Log}(F)}{\partial x}$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial t} - v \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = g(t) F$$

et enfin:

$$F(x,t) = \frac{1}{4\pi vt} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4vt}\right) F(x,0) dz$$

### 6.3.5. Benjamin Ono



$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + C \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + c_0 \gamma \text{FP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta'(\xi)}{x-\xi} d\xi = 0$$

dont il existe des solutions  $\eta = a\lambda^2 / ((x-ct)^2 + \lambda^2)$   $a = 4(c-c_0)/C = 4c_0\gamma/C/\lambda$

### Structure du Mascaret

(Whitham section 13.11 et Lighthill)

### Stabilité des vagues

DLp413 Benjamin Feir.

## 7. saint venant pratique

Classiquement on présente les équations de NS, et on fait une formulation pseudo intégrale (cf Hervouet)

On intègre en fait les équations de Navier Stokes transversalement... On suppose cependant que  $u$  varie peu avec  $y$ . On fait apparaître le terme de frottement au fond:  $\mu \partial u / \partial y$ . Il s'agit en fait des équations de Ka'rma'n où on suppose que  $\delta_1 = 0$ .

On préfère poser  $h_\eta - h_f = h$  la hauteur d'eau ( $h_\eta$  déplacement de la vague,  $h_f$  forme du fond), on a dans le cas où le fond n'est pas plat:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u \right) = -g \frac{\partial}{\partial x} h_\eta + F_x + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h v_t \left( \frac{\partial}{\partial x} u \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0$$

Dans la force  $F_x$  on met les frottements visqueux:

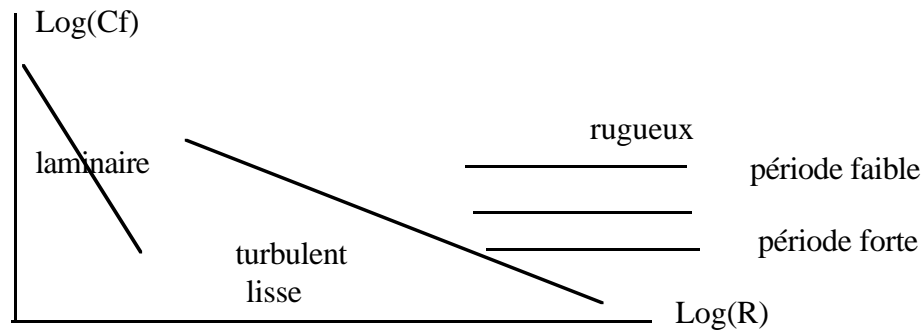
$$F_x = -g u^2 / R_H C^2$$

$C$  coefficient de Chézy... Ce coefficient est historique, On le retrouve en supposant qu'un fluide s'écoule le long d'une paroi inclinée sous l'action des forces de pression, et que l'écoulement est stationnaire et invariant par translation. On a alors l'équilibre entre la pression est le frottement visqueux, et comme on travaille sur la valeur intégrée:

$$0 = -\rho g h \frac{\partial}{\partial x} h + \tau_0.$$

Si on introduit le coefficient de frottement:  $\tau_0 = C_f \rho \frac{U^2}{2}$ . Par définition  $C^2 = 2g / C_f$ .  $C$  est tabulé... Voir par exemple dans Comolet p 351 des valeurs numériques. Bien entendu  $C_f$  varie avec la rugosité et le nombre de Reynolds: on retrouve ce que l'on a vu en couche limite sur les problèmes de fermeture des équations de Ka'rma'n... Le miracle dans le cas des écoulements fluviaux est celui de la rugosité. En effet la rugosité, en imposant son échelle caractéristique fixe le  $C_f$  à une valeur constante, la force  $F_x$  est donc strictement proportionnelle à  $U^2$ . Cette valeur

est d'autant plus faible que la taille de la dimension caractéristique de la rugosité est faible. (loi de Droblenkov?  $c_f=0.0139(e/L)^{1/7}$ )



on peut mettre un terme de dispersion, mais attention à l'endroit où on le met!  
On peut mettre aussi Coriolis, ou encore la force du vent...

## 5.2. action du Vent:

### 5.2.1. création des vagues par le vent

C'est un problème difficile! Le critère de Kelvin Helmholtz avec tension de surface donne une valeur de  $\Delta U = 646\text{m/s}$  qui est trop élevée... Jeffreys (1925) propose de trouver un mécanisme empirique. Pour cela nous devons nous souvenir du paragraphe sur la dissipation visqueuse des vagues, le vent doit en effet la contrecarrer pour lever la mer. Si on a une surpression due au vent de l'ordre de  $P_0 \cos(kx-ct)$ , le travail fourni est

$$P_0 \cos(kx-ct) \frac{\partial}{\partial t} \eta$$

en moyenne:

$$(1/2) P_0 k c \eta_0$$

Le vent donne de l'énergie à un taux  $P_0 k c \eta_0 / 2$

donc, outre le terme de dissipation visqueuse que nous avons vu plus haut, il faut ajouter un terme de source à l'équation de décroissance de l'énergie que nous avons vue plus haut:

$$\frac{d}{dt}(\eta_0) = -2 \nu k^2 \eta_0 + \frac{P_0}{2 \rho c}$$

Il y a donc une surpression minimale qui permet de lever les vagues...

Une autre interprétation consiste à dire que  $T = P_0 \cos(kx-\omega t)$  est de la forme

$$T = k \eta_0 \beta \rho_e (U-c)^2 \cos(kx-\omega t) = \beta \rho_e (U-c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

proportionnelle à la pente du profil et au carré de  $(U-c)$  vitesse relative de la vague par rapport au vent.  $\beta$  coefficient d'abri  $\sim 0,28$  (empirique!)

On obtient une croissance si  $c(U-c)^2 > 4\nu g \rho_e / \beta$

à  $U$  donné, minimal si  $c = U/3$  donc

$$U = (27 g \rho_e / \beta)^{1/3}$$

on trouve  $U = 1,07 \text{ m/s}$  et  $c = 0,36 \text{ m/s}$  et  $\lambda = 0,081 \text{ m}$

cet ordre de grandeur est plus proche de la réalité que le précédent. (2 noeuds)  
(Lacombe).

En pratique, l'action du vent est modélisée par une loi empirique portant sur  $F_x$ .

### 5.2.2. création d'un courant marin par le vent.

Un autre exemple est celui de la levée par le vent d'un courant (*cf* couche d'Ekman)

A l'échelle géophysique, la rotation de la terre de vitesse angulaire constante  $\Omega$  a une influence considérable sur des phénomènes tels que la mise en mouvement des océans par une rafale de vent, ou sur l'orientation de la circulation atmosphérique au voisinage du sol. Ces phénomènes se produisent sur une échelle horizontale assez faible pour que l'effet de courbure de la terre soit négligé, et de plus on admettra qu'il n'y a que des variations en  $z$  (invariances par translation dans le plan). On cherche en fait une solution exacte des équations de Navier Stokes qui correspond bien aux deux situations physiques que l'on va étudier. Le mouvement considéré est celui d'une mer de profondeur infinie sur la quelle souffle un vent uniforme de direction fixe. On admettra que l'action du vent se réduit à une tension longitudinale  $T$ .

## techniques numériques

cas de l'équation d'onde

différences finies explicite instable

différences finies implicite stable

résolution en Fourier explicite instable, implicite stable.

attention pour le terme  $u_{xxx}$ ! et  $\eta_{xxx}$ !!!

*etc...*

Le tout est programmé en C dans KSKDV.c

```

/*OK 04/06/97 */
/* compilation LINUX: */
cc -O3 -I/usr/X11R6/include *.c -L/usr/X11R6/lib -lX11 -lXext -lm */
/*OK 23/05/97 */
/*OK 26/09/95 vers 19 Sept 95 */
/* 26/09/95 */
/* */
/* Resolution de SOLITON LAMB p 173 */
/* du du 3 du d du du du */
/* -- + --- - eps u -- + -- --- = visc --- */
/* dt dx 2 dx 6 3 2 */
/* dx dx */
/* biblio Frish She Thual JFM 1986 pp221 240 */
/* Hyman NICOLAENKO Physica 18D 1986 113-126 */
/* Manneville Physics Letters V84A n3 (1981) */
/* */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "math.h"
#include "rgraph2.h"

```

```

#include "param.c"
#ifdef powerc
#include <sioux.h>
#else
#define pi 3.14159
#endif
/*#include "unix.h"*/
double dx,dt,t,Lx,UN;
double epsilon,delta2,visc,sigma;
double* u=NULL;
double* TFu=NULL;
double* TFdu=NULL;
double* TFdu2=NULL;
double* uo=NULL;
double* Espect=NULL;
double* e=NULL;
double eit;
double Pi;
FILE *g;
FILE *fs;
int nx,NL;
float x,x0,xbas,ybas,xhaut,yhaut;
int npix,npjy,af;
void energie(int it,int itmax);
void tracsauv(int it);
void axes(float *xbas,float *x0,int *nx,float *dx,
          float *ybas,float *xhaut,float *yhaut,int *npix,int *npjy);

/*void MainEvent(void);*/
/*
void main(void)
{
int i,it,itt,itmax,ittmax;
int nbt;
int ilarge;
float epsilarge;
float fdx,fdt,s,fepsilon;
double omega;
double u0;
/* Place the window's top left corner at (5,40).
#ifdef powerc
SIOUXSettings.toppixel =40;
SIOUXSettings.leftpixel =10;
SIOUXSettings.rows = 10;
//SIOUXSettings.columns = 40;
#endif

/* ouverture des fichiers de sauvegarde */
g = fopen("F.IN", "r");
printf("Bench\n");
printf("PPC60 3 it en 16s PPC66 11s\n");
printf("1 it PPC60=5.3 PPC66=3.6 355=3.2 370=2.2 (1/2)3BT= 2.5\n");
printf("3BT=11s Cyrix133/P166=13s LinuxPPC66MHz=17s MWCPPC66=33s\n");
printf("PII 200 3s Cyrix166 4.3 LinuxPPC66MHz=15s\n");
printf("
Resolution de LAMB\n");
printf("
2 2\n");
printf(" du du 3 du d du du\n");
printf(" -- + --+ - eps u -- + -- --- = visc ---\n");
printf(" dt dx 2 dx 6 3 2\n");
printf(" dx dx\n");
printf("
Par decomposition spectrale\n");
printf("
I k (2 Pi j/N)\n");
printf("u = / u e\n");
printf(" k --- j\n");
printf("
\n");
printf("
\n");
printf("
\n");

```

```

printf("      ^ n+1 ^ n  2      3      2 ^ n+1 \n");
printf("donc u      = u - (d /6 I k - visc k )u      \n");
printf("      -1      ^ n \n");
printf("      -dt(TF(u TF (-Ik)u)) \n");
printf("      \n");
printf("      \n");
printf("      \n");
printf("      \n");
printf("      autre methode \n");
printf("      ^      ^      ^ \n");
printf(" du/dt=Lu + s \n");
printf("      L partie lineaire \n");
printf("      ^ \n");
printf("      s terme source non lineaire \n");
printf("      \n");
printf("      est resolu a la main! \n");
printf("      \n");
printf("      \n");
printf("      Ldt \n");
printf("      ^      Ldt^      ^ e - 1 \n");
printf("      u(t+dt)= e      u(t) +s ----- \n");
printf("      \n");
/* lecture du fichier donnees */
fscanf(g,"dt=%f      \n",&fdt);
dt=fdt;
printf("pas de temps dt=%f\n",dt);
fscanf(g,"itmax=%i      \n",&itmax);
fscanf(g,"ittmax=%i      \n",&ittmax);
printf("affichage toutes les %i iter, soit dt=%f \n",ittmax,dt*ittmax);
printf("itmax=%d      t max=itmax*ittmax*dt= %7f \n",itmax,itmax*ittmax*dt);
fscanf(g,"nx=%i      \n",&nx);
x0=0;
Pi=atan(1)*4;
/*Lx=3*Pi; PI */
printf("nombre de points: nx=%d,      ",nx);
fscanf(g,"Lx=%lg \n",&Lx);
dx=2*Lx/nx;
printf("pas d'espace: dx=%f,      ",dx);
printf(" %g < domaine < %g =%g \n",-nx*dx/2,nx*dx/2,Lx);
fscanf(g,"UN=%lg \n",&UN);
printf(" si %g=1 dans rep labon sinon repere de l'onde \n",UN);
fscanf(g,"epsilon=%lg \n",&epsilon);
printf("parametre non lineaire epsilon=%lg\n",epsilon);
fscanf(g,"visc=%lg \n",&visc);
printf("parametre visqueux=%g\n",visc);
visc=visc*pow(Pi/Lx,2);
/* (Pi/Lx) pour etre entre -L et L*/
fscanf(g,"delta2=%lg \n",&delta2);
printf(" delta au carre =%lg\n",delta2);
delta2=delta2*pow(Pi/Lx,3);
/* (Pi/Lx) pour etre entre -L et L*/
fscanf(g,"sigma=%f \n",&fepsilon);
sigma=(double)feepsilon;
printf("tension de surf =%g\n",sigma);

NL=1;

fscanf(g,"ilarge=%d \n",&ilarge);
printf("si (ilarge=%d)=1 toutes les frequences en C.I. \n",ilarge);
epsilarge=.00000001;
fscanf(g,"epsilarge=%f \n",&epsilarge);
printf("epsilarge=%f amplitude de la perturbe \n",epsilarge);
fscanf(g,"omega=%lg \n",&omega);
printf(" omega=%lg \n", omega);
dt=dt ;
printf("pas de temps dt=%f\n",dt);
printf("affichage toutes les %i iter, soit dt=%f \n",ittmax,dt*ittmax);
printf("itmax=%d      t max=itmax*ittmax*dt= %7f \n",
      itmax,itmax*ittmax*dt);

```



```

    u[i]= (cos(x ));
    }

    uo[i]=u[i];}
/* fin C.I.                                     */

for (it=0; it<=itmax; it++)
{
/* =====*/
for (itt=1; itt<=ittmax; itt++)
{
/* avancee */
    next( );
    t=t+dt;
    MainEvent();
}
/* =====*/
    printf(" t= %7f ",t);
    reffecran();

/* les traces et les sauvegardes                */
    tracsauv(it);

    getchar();
}/* fin boucle temps */
fclose(fs);
}

/*-----*/

/*-----*/
void tracsauv(int iterf)
{
FILE *f;
double um;
int i;
extern int nx;
extern double *u,epsilon,UN;
extern double dx,dt,t;
extern float x,x0,xbas,ybas,xhaut,yhaut;
extern int npix,npjy,af;
float xp,yp;
int icoul;
double u0;

f = fopen("F.OUT","w");
x0=0;
xp=18;
yp=0;
icoul=80;
/* trace l'axe 0 */
metligne(xbas,ybas,xhaut,yhaut,npix,npjy,x0,yp,xp,yp,icoul);
/* on calcule la moyenne */
um=0;
for (i=1; i<=nx; i++)
{um=um+u[i];}
um=um/nx;
for (i=1; i<nx; i++)
{
/* on commence par les traces et les sauvegardes */
x=(i)*dx+x0;
xp=x;
yp=(u[i]-0) ;
fprintf(f," %f %f \n",xp,u[i]);
icoul=80-3*i*2;icoul=1;
// metpoint(xbas,ybas,xhaut,yhaut,npix,npjy,xp,yp,icoul);
metligne(xbas,ybas,xhaut,yhaut,npix,npjy,x-dx,u[i-1],xp,yp,icoul);
u0=2;
}
}

```

```

        x=-Lx +((i)*dx );
        yp= u0*pow(1/cosh(sqrt(3)*sqrt(u0)*(-(t*(3*(UN) + 3*epsilon*u0/2)))/3 + (x+3*Lx/4
    ))/2),2);

        icoul=150;
        metpoint(xbas,ybas,xhaut,yhaut,npix,npjy,yp,0*(yp-u[i]),icoul);

    }
    fclose(f);
    /* favorable au multi tache!!!!!!*/
    #include "QT.c"
}

/*-----*/
void axes(float *xbas,float *x0,int *nx,float *dx,
        float *ybas,float *xhaut,float *yhaut,int *npix,int *npjy)
{
    /* trace des axes */
    int i;
    float xp,yp;
    *xbas=*x0-1;
    *ybas=-2;
    *xhaut=*x0+*nx*( *dx) ;
    *yhaut=3;
    *npix= 350;
    *npjy= 250;
    for (i=0;i<*npix; i++)
    {xp=i* *xhaut * 2 * 1.f / *npix;yp=0;
    metpoint(*xbas,*ybas,*xhaut,*yhaut,*npix,*npjy,xp,yp,i);
    xp=0;yp=i*( *dx);
    metpoint(*xbas,*ybas,*xhaut,*yhaut,*npix,*npjy,xp,yp,i);
    }
}

```

### Puis dans nKSKDV.c

```

/* 26 05 97
/* 26/09/95
/* utilisation de Numérique Recipies (en Fortran!) p 390!
/* dfour1.c
/* transformee de Fourier en DOUBLE precision
/*      j=N-1
/*
/*      ^      \
/*      u = /  u  e      I k (2 Pi j/N)
/*      k      --- j
/*      j=0
/*
/* remarquer que les valeurs sont prises en xj=(2 Pi j/N)
/*
/* La TF inverse s'ecrit alors
/*      k=N-1
/*
/*      \      ^      -I k (2 Pi j/N)
/*      u = /  u  e
/*      j      --- k
/*      k=0
/*
/* La derivation s'ecrit alors
/*      k=N-1
/*
/*      d      \      ^      -I k (2 Pi j/N)
/*      -- u = /  u  (- I k) e
/*      dx j      --- k
/*      k=0
/*
/*
/*      ACHTUNG !!!!!
/*      les variations sont entre -Pi et Pi
/*      => correction des dérivées

```





```

Lr= 36/(36 + Power(delta2,2)*Power(dt,2)*Power(k,6) +
72*dt*Power(k,2)*visc + 36*Power(dt,2)*Power(k,4)*Power(visc,2)) +
36*dt*Power(k,2)*visc/
(36 + Power(delta2,2)*Power(dt,2)*Power(k,6) +
72*dt*Power(k,2)*visc + 36*Power(dt,2)*Power(k,4)*Power(visc,2));
Li=-6* delta2*dt*Power(k,3)/
(36 + Power(delta2,2)*Power(dt,2)*Power(k,6) +
72*dt*Power(k,2)*visc + 36*Power(dt,2)*Power(k,4)*Power(visc,2));

TFu[2*i+1]=ur*Lr-ui*Li;
TFu[2*i+2]=ur*Li+ui*Lr;

#else
/* du/dt = L u dans le cas lineaire de KS, ou L.=-4*d4./dx4 -a d2./dx2 */
/* s'integre exactement */
/* ici L=(-delta2 /6*pow( -I k,3) - visc*k*k); */
/*du/dt = L u + s; s est le terme non lineaire */
/* d'ou l'exponentielle (L'astuce est dans Frish She Thual 86 */
/*printf("\n");
printf("          Ldt          \n");
printf("          Ldt          e - 1          \n");
printf("          u(t+dt)= e u(t) +s -----          \n");
printf("          L          \n");*/
/* avec 1/L = (Lr- i Li)/(Lr*Lr + Li*Li) */

#undef BO
Lr= - k*k*visc ;
Li= - delta2/6*k*k*k ;
#ifdef BO
Li= - delta2/6*k*k*k - k*k*(Pi/Lx)*(Pi/Lx);
#endif

eRL = exp(Lr*dt);
expLr= eRL*cos(dt*Li);
expLi= eRL*sin(dt*Li);

RL=Lr*Lr+Li*Li;
invLr= Lr/RL;
invLi= -Li/RL;
expLrml=expLr-1;

zr=invLr*expLrml - invLi*expLi ;
zi=invLr*expLi + invLi*expLrml ;

udur= (-TFdu2[2*i+1]);
udui= (-TFdu2[2*i+2]);

ur= TFu[2*i+1];
ui= TFu[2*i+2];

TFu[2*i+1]=ur*expLr - ui*expLi + zr*udur - zi*udui ;
TFu[2*i+2]=ur*expLi + ui*expLr + zr*udui + zi*udur ;

#endif

#ifdef BO
Lr= - k*k*visc ;
Li= + delta2/6*k*k*k + k*k*(Pi/Lx)*(Pi/Lx);

eRL = exp(Lr*dt);
expLr= eRL*cos(dt*Li);
expLi= eRL*sin(dt*Li);

RL=Lr*Lr+Li*Li;
invLr= Lr/RL;
invLi= -Li/RL;
expLrml=expLr-1;

```



```

ft2[2]=0;
for (i=1; i<=nx/2;i++)
{
  ft2[2*i+1]=-i*i *ft[2*i+1];
  ft2[2*i+2]=-i*i *ft[2*i+2];
  ft2[2*(nx-i)+1]=-(i*i)*ft[2*(nx-i)+1];
  ft2[2*(nx-i)+2]=-(i*i)*ft[2*(nx-i)+2];
}
}
/* ===== */

/* CL CL CL CL CL CL CL CL CL CL */

```

Un exemple de fichier d'entrée:

F.IN

```

dt=0.001
itmax=100
ittmax=100
nx=256
Lx=15
UN=1
epsilon=.0000
visc=0.00
delta2=.25
sigma=.0
ilarge=0
epsilarge=0.1
omega=0.05

```

Il faut aussi le fichier "macXgraphpyl2.c"

```

#ifdef powerc
/* Mac Mac Mac Mac Mac Mac Mac Mac Mac Mac */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "rgraph2.h"
#include <Windows.h>
#include <SegLoad.h>
#include <StandardFile.h>
/* attention couleur */
#include <Palettes.h>
/* attention resource */
#define windowID 1000
extern char* errbuf;
/* event?*/
#include "Events.h"

/*static float aspx, aspy, echx,echy,ech,rxmin,rxmax,rymin,rymax;*/
static int carre, lacouleur;
static WindowRecord wgRecord0;
static WindowPtr grafWindow0;
static Rect boundsRect;

int getcolor();

/*int scalx(float x);
int scaly(float y);*/

/*----- ecriture dans un fichier pict -----*/
static short theVol; //procedure Sauve

```

```

static char Buff[512]; //procedure Sauve
static PicHandle fichierPic; //procedure Sauve

//-----

void initgraphique(int f)
{
/* ancien
   boundsRect.top = 45;
   boundsRect.left = 15;
   boundsRect.right = 460;
   boundsRect.bottom = 460 ;
   grafWindow0=NewCWindow(&wgRecord0, &boundsRect, "\pGraphics",true, 8, NULL,
true, 0);*/
/* nouveau dans la ressource */
   grafWindow0=GetNewCWindow(windowID, nil, (WindowPtr) -1);
   DrawControls(grafWindow0);
/* std*/
   SetPort(grafWindow0);
   ShowWindow(grafWindow0);
   BringToFront(grafWindow0);
/*
   aspX = boundsRect.right - boundsRect.left -10;
   aspy = boundsRect.bottom - boundsRect.top - 10;
   carre = aspX == aspy;*/
   lacouleur = getcolor();

   if (f==99)
   {InitialiseSauve();
   }

}
/*-----*/
void sbe(void)
{
   SendBehind(grafWindow0, nil );
}
/*-----*/
void sbf(void)
{
   BringToFront (grafWindow0);
}
/*-----*/
void closegraphique(void)
{
   CloseWindow(grafWindow0);
}
/*-----*/
void reffecran(void)
{
   EraseRect(&(grafWindow0->portRect));
}
/*-----*/
int getcolor(void)
{
}
/*-----*/
void putpixel(int ix,int iy, int couleur)
{
   PmForeColor(couleur);
   MoveTo(ix, iy);
   LineTo(ix,iy);
/*
MainEvent();

```

```

*/
}
/*-----*/
void metpoint(float xbas,float ybas,float xhaut,float yhaut,
              int npix,int npiy,float x,float y,int c)
{
int ix,iy;
if (c>150){c=c-149;}
if (c>150){c=c-149;}
ix=npix*(x-xbas)/(xhaut-xbas);
iy=npiy-npiy*(y-ybas)/(yhaut-ybas);
/*printf(" %6i %6i %6f %6f \n",ix,iy,x,y);
poynte(ix,iy);*/putpixel(ix,iy,c);
}
/*-----*/
void metligne(float xbas,float ybas,float xhaut,float yhaut,
              int npix,int npiy,float xl,float yl,float x2,float y2,int c)
{
int ix1,iy1,ix2,iy2;
if (c>150){c=c-149;}
if (c>150){c=c-149;}
ix1=npix*(xl-xbas)/(xhaut-xbas);
iy1=npiy-npiy*(yl-ybas)/(yhaut-ybas);
ix2=npix*(x2-xbas)/(xhaut-xbas);
iy2=npiy-npiy*(y2-ybas)/(yhaut-ybas);
/*printf(" %6i %6i %6f %6f \n",ix,iy,x,y);
poynte(ix,iy);*/
PmForeColor(c);
MoveTo(ix1, iy1);
LineTo(ix2,iy2);
}
/*-----*/

/*-----
procedure pour initialiser ecrire le fichier
-----*/
void InitialiseSauve(void)
{
    fichierPic = OpenPicture(& grafWindow0->portRect);
}

/*-----
procedure pour ecrire le fichier
-----*/
void Sauve(const Str255 name)
{
    short ref;
    long theSize = 512;

    ClosePicture();

    FSDelete(name, theVol);
    if (Create(name,theVol, 'dPro', 'PICT') != noErr) {SysBeep(1); return;};
    if (FSOpen(name, theVol, &ref) != noErr) {SysBeep(1); return;};
    if (FSWrite(ref, &theSize, Buff) != noErr) {SysBeep(1); return;};
    theSize = GetHandleSize(((Handle)fichierPic));
    HLock(((Handle)fichierPic));
    FSWrite(ref, &theSize, *((Handle)fichierPic));
    HUnlock(((Handle)fichierPic));
    FSClose(ref);

    KillPicture(fichierPic);
}

void MainEvent(void)

```

```

{
    EventRecord    event;
    Boolean        eventOccured;

    /*KeyPressed = false;          */          /* set to false every time
through          */

    /*if(WNE_available)
        eventOccured = WaitNextEvent(everyEvent,&event,10,nil);
    else {*/
        SystemTask();
        eventOccured = GetNextEvent(everyEvent, &event);
    /*}*/

/*
    if(eventOccured) {
        switch(event.what) {
            case nullEvent:
                break;
            case mouseDown:
                DoClick(&event);
            break;
            case mouseUp:
                break;
            case keyDown:
                DoKey(&event);
            break;
            case keyUp:
                break;
            case autoKey:
                DoKey(&event);
            break;
            case updateEvt:
                DoUpdate(&event);
            break;
            case diskEvt:
                break;
            case activateEvt:
                DoActivate(&event);
            break;

            case networkEvt:
                break;
            case driverEvt:
                break;
            case applEvt:
                break;
            case app2Evt:
                break;
            case app3Evt:
                break;
            case osEvt:
                DoMfinder(&event);
            break;
            default:
                break;
        }
    }*/
}
/*-----*/

```

```

#else

```

```

#ifdef PC
/* PC PC PC PC PC PC CP C PC PC PC CP C PC PC PC CP C PC PC PC CP */
#include <graphics.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "rgraph.h"
/*
#include <unix.h>
*/

```

```

#define PATH "c:\\borlandc\\bgi"

```

```

static float echx,echy,rxmin,rxmax,rymin,ymax;
static int carre, lacouleur;

void erreur(char *s)
{
    printf("%s \n",s);exit(0);
}

void *safecalloc(long nb, long size)
{
    void* p=NULL;
    static long total = 0;
    p = calloc(nb, size);
    if (p == NULL)
    { printf("Out of Memory!\n");
      exit(0);
    }
    return p;
}

void safefree(void** f)
{
    if(*f){ free(*f); *f=NULL;}
}

void reffecran(void)
{
    cleardevice();
}

void closegraphique(void)
{
    closegraph();
}

void initgraphique(void)
{
    int gdriver = DETECT, gmode, errorcode, aspx, aspy;
    initgraph(&gdriver, &gmode, PATH);

    if ((errorcode = graphresult()) != grOk)
    {
        fprintf(stderr, "Erreur graphique: %s\n", grapherrormsg(errorcode));
        exit(1);
    }
    getaspectratio(&aspx, &aspy);
    carre = aspx == aspy;
    lacouleur = getcolor();
}

void cadre(float xmin,float xmax,float ymin,float ymax)
{
    rxmin = xmin;
    rxmax = xmax;
    rymin = ymin;
    rymax = ymax;

    echx = getmaxx() / (xmax - xmin);
    echy = getmaxy() / (ymax - ymin);
}

void rattente(int waitm)
{
    if(waitm) getch();
}

```



```

void couleur(int c)
{
    setcolor(lacouleur = c);
}

void couleurint(int c)
{
    setfillstyle(SOLID_FILL, c);
}

void couleurfond(int c)
{
    setbkcolor(c);
}

int scalx(float x)
{
    return (x - rxmin) * echx;
}

int scaly(float y)
{
    return (rymax - y) * echy;
}

void raffpoly(int n, float *poly)
{
    int i, *poly0;

    if(poly0=malloc(2*n*sizeof(int)), !poly)
    {
        fprintf(stderr, "Erreur d'allocation dans raffpoly\n");
        return;
    }
    for(i=0; i<n; i++)
    {
        poly0[2*i]=scalx(poly[2*i]);
        poly0[2*i+1]=scaly(poly[2*i+1]);
    }
    fillpoly(n, poly0);
    free(poly0);
}

void pointe(float x, float y)
{
    putpixel(scalx(x), scaly(y), lacouleur);
}

void rmoveto(float x, float y)
{
    moveto(scalx(x), scaly(y));
}

void rlineto(float x, float y)
{
    lineto(scalx(x), scaly(y));
}

void cadreortho(float centrex, float centrey, float rayon)
{
    int xasp,yasp;

    getaspectratio(&xasp,&yasp);

    if (getmaxx() * (float)xasp > getmaxy() * (float)yasp)
    {
        rymin = centrey - rayon;
        rymax = centrey + rayon;
        echy= getmaxy() / (2 * rayon);
        echx= (echy * xasp) / yasp;
    }
}

```

```

    rxmin= centrex - getmaxx() / (2 * echx);
    rxmax= centrex + getmaxx() / (2 * echx);
}
else
{
    rxmin = centrex - rayon;
    rxmax = centrex + rayon;
    echx = getmaxx() / (2 * rayon);
    echy = (echx * yasp) / xasp;
    rymin = centrey - getmaxy() / (2 * echy);
    rymax = centrey + getmaxy() / (2 * echy);
}
}

void cercle(float centrex, float centrey, float rayon)
{
    float theta;

    if (carre)
        circle(scalx(centrex), scaly(centrey), rayon * echx);
    else
    {
        rmoveto(centrex + rayon, centrey);
        for(theta = 0; theta < 6.3; theta += 0.05)
            rlineto(centrex + rayon * cos(theta), centrey + rayon * sin(theta));
    }
}

int getprog(char* fn,int argc, char** argvptr)
{
    int i;
    /* UNIX */
    if(argc<1)
    {
        printf("no program name\n");
        exit(0);
    }
    for(i=0;i<=strlen(argvptr[1]);i++)fn[i] = argvptr[1][i];
    argc=2;
    return argc;
}

void execute(char* what)
{
    // exec(what); link with unix lib
}
/* UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX UNIX
*/

#else

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

#ifdef HPPA
#ifndef __GNUC__
typedef char *caddr_t;
#endif
#endif

#include <X11/Xlib.h>
#include <X11/Xutil.h>
#include <X11/Xos.h>

/*#include "rgraph2.h"*/
#define reel float

```

```

static Display *display;
static Window win;
static XSizeHints size_hints;
static XEvent report;
static GC gc;
static XFontStruct *font_info;

static reel echx,echy,ech,rxmin,rxmax,rymin,rymax;
static int lacouleur, screen, width, height, currx, curry, xp, yp;

void message(char *s)
{ printf("%s \n",s);}

void erreur(char *s)
{ message(s); exit(0);}

void *safecalloc(long nb, long size)
{
    void* p=NULL;
    p = calloc(nb, size);
    if (p == NULL) printf("Run out of Memory!\n");
    return p;
}

void safefree(void** f)
{
    if(*f){ free(*f); *f=NULL;}
}

void rflush()
{
    XEvent report;
    XNextEvent(display, &report);
    if (report.type == Expose)
        while (XCheckTypedEvent(display, Expose, &report));

    XFlush(display);
}

void rattente(int waitm)
{
    XEvent report;
    do XNextEvent(display, &report);
        while (report.type != ButtonPress && report.type != KeyPress);
}

int xerror()
{
    fprintf(stderr, "Probleme avec X-Windows\n");
}

void initgraphique(int f)
{
    XEvent report;
    display = XOpenDisplay(NULL);
    font_info = XLoadQueryFont(display, "9x15");
    XSetErrorHandler((XErrorHandler)xerror);
    XSetIOErrorHandler((XIOErrorHandler)xerror);
    screen = DefaultScreen(display);
    width = DisplayWidth(display, screen) - 100;
    height = DisplayHeight(display, screen) - 160;
    win = XCreateSimpleWindow(display, RootWindow(display, screen), 50, 80, width,
height, 4, BlackPixel(display, screen), WhitePixel(display, screen));

    size_hints.flags = PPosition | PSize;
    size_hints.x = 0;
    size_hints.y = 0;
    size_hints.width = width;
    size_hints.height = height;
}

```

```

XSetStandardProperties(display, win, "graphe", NULL, NULL, NULL, 0, &size_hints);
XSelectInput(display, win, ExposureMask | ButtonPressMask);
gc = XCreateGC(display, win, 0, NULL);
XSetFont(display, gc, font_info->fid);
XSetForeground(display, gc, BlackPixel(display, screen));
XMapWindow(display, win);
do XNextEvent(display, &report); while (report.type != Expose);
}

void closegraphique()
{
    XUnloadFont(display, font_info->fid);
    XFreeGC(display, gc);
    XCloseDisplay(display);
}

void couleur(int c)
{
    /*Xsetcolor(lacouleur = c);*/
}

int scalx(reel x)
{
    return (x - rxmin) * echx;
}

int scaly(reel y)
{
    return (rymax - y) * echy;
}

void poynte(int xp,int yp)
{
    couleur(xp);
    XDrawLine(display, win, gc, xp, yp, xp, yp);
}

/*-----*/
void metligne(float xbas,float ybas,float xhaut,float yhaut,
              int npix,int npiy,float x1,float y1,float x2,float y2,int c)
{
    int ix1,iy1,ix2,iy2;
    if (c>150){c=c-149;}
    if (c>150){c=c-149;}
    ix1=npix*(x1-xbas)/(xhaut-xbas);
    iy1=npiy-npiy*(y1-ybas)/(yhaut-ybas);
    ix2=npix*(x2-xbas)/(xhaut-xbas);
    iy2=npiy-npiy*(y2-ybas)/(yhaut-ybas);
    couleur(ix1);
    XDrawLine(display, win, gc, ix1,iy1,ix2,iy2);
}
/*-----*/
void MainEvent(void)
{
}
/*-----*/
void sbf(void)
{
}
/*-----*/
void TextSize(void)
{
}
/*-----*/
void DrawText(void)
{
}
/*-----*/
void ExitToShell(void)
{printf("STOP STOP STOP !!!!!!!!!!!!!\n");
}

```

```

getchar;getchar;getchar;getchar;getchar;getchar;getchar;
}
/*-----*/

void metpoint(float xbas,float ybas,float xhaut,float yhaut,
             int npix,int npiy,float x,float y)
{
int ix,iy;
ix=npix*(x-xbas)/(xhaut-xbas);
iy=npiy-npiy*(y-ybas)/(yhaut-ybas);
/*printf(" %6i %6i %6f %6f \n",ix,iy,x,y);*/
poynte(ix,iy);
}

void reffecran()
{
XClearWindow(display,win);
}

int getprog(char* fn,int argc, char **argv)
{
strcpy(fn,argv[1]);
printf(" file : %s\n",fn);
return argc;
}

void execute (char * str)
{
system(str);
}

#endif /*PC ou UNIX*/
#endif /* final*/

```

## param.c

```
#define nmax 1024
```

et enfin les fichier de numerical recipies:

dfour1.c et nrutil.c

```

#include <math.h>
#define SWAP(a,b) tempr=(a);(a)=(b);(b)=tempr

void dfour1(double data[], unsigned long nn, int isign)
{
    unsigned long n,mmax,m,j,istep,i;
    double wtemp,wr,wpr,wpi,wi,theta;
    double tempr,tempi;

    n=nn << 1;
    j=1;
    for (i=1;i<n;i+=2) {
        if (j > i) {
            SWAP(data[j],data[i]);
            SWAP(data[j+1],data[i+1]);
        }
        m=n >> 1;
        while (m >= 2 && j > m) {

```

```

        j -= m;
        m >>= 1;
    }
    j += m;
}
mmax=2;
while (n > mmax) {
    istep=mmax << 1;
    theta=isign*(6.28318530717959/mmax);
    wtemp=sin(0.5*theta);
    wpr = -2.0*wtemp*wtemp;
    wpi=sin(theta);
    wr=1.0;
    wi=0.0;
    for (m=1;m<mmax;m+=2) {
        for (i=m;i<=n;i+=istep) {
            j=i+mmax;
            tempr=wr*data[j]-wi*data[j+1];
            tempi=wr*data[j+1]+wi*data[j];
            data[j]=data[i]-tempr;
            data[j+1]=data[i+1]-tempi;
            data[i] += tempr;
            data[i+1] += tempi;
        }
        wr=(wtemp=wr)*wpr-wi*wpi+wr;
        wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi;
    }
    mmax=istep;
}
}
#endif SWAP

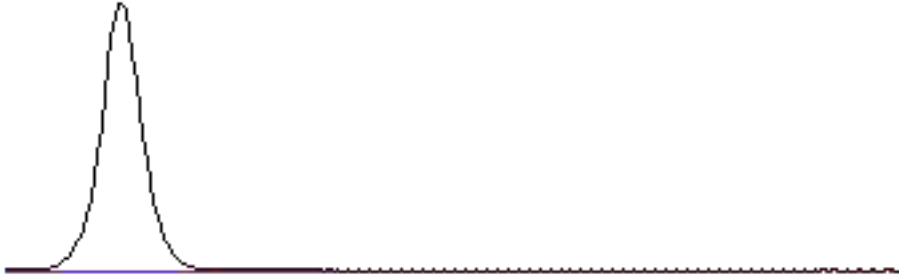
/* (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software 3^03. */

```

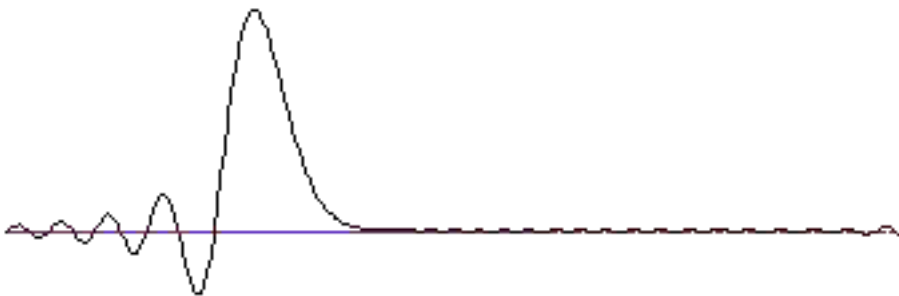
*EXEMPLES DE RESOLUTION*

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\delta^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

exemple propagation d'un pulse donné au temps  $t=0$ :



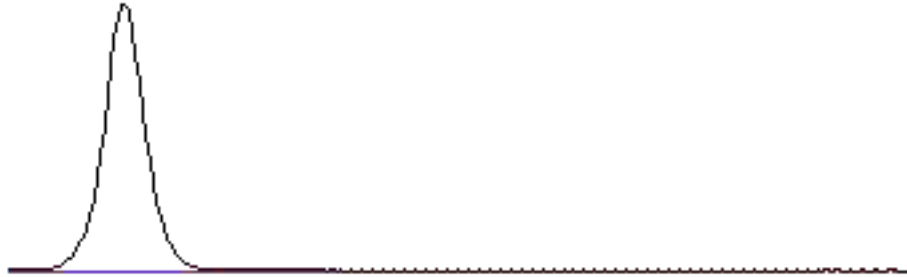
il se déplace en se dispersant si on ne met pas de termes nonlinéaires



<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/airyc.mov>

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

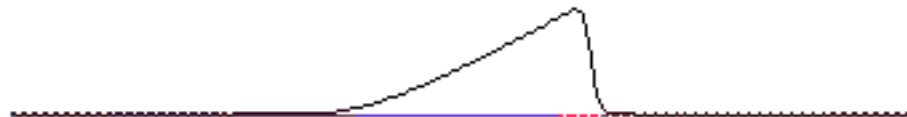
Si maintenant on ne met pas de dispersion mais uniquement des termes non linéaires.  
exemple propagation d'un pulse donné au temps t=0:



il se déplace en se raidissant



et en s'atténuant, le choc est étalé sur quelques points  
<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/raid.mov>



un soliton:

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/SIEF/SIEF97/soliton.mov>

## **8. transport de sédiments...**

On lira le livre de Yalin... On consultera les documents EDF. L'idée à retenir, est que les sédiments sont emportés comme des scalaires passifs par la couche limite turbulente...

...

## **9. films visqueux**

### **9.1. ressaut très visqueux**



Watson 64 Higuera 94 Higuera 96  
résolu par Higuera...

...

## 9.2. stabilité d'un film

cf Yih 1963 et Chang & al 95.

KS

...

## 9.3. Biblio

- Baines P.G. (1995): "Topographic effects in stratified flows". Cambridge Monographs on Mechanics
- Comolet R. (1982): "Mécanique expérimentale des fluides" Masson.
- Cousteix (1989) "Couche limite laminaire" et "Turbulence et couche limite" éditions CEPADUES
- Debnath L. (1994) "Nonlinear Water Waves" Academic Press.
- Euvrad D. (1988) "Résolution numérique des équations aux dérivées partielles", Masson
- Euvrad D. Fernandez G. Jami A. & Soize C. (1985) "Problèmes d'hydrodynamique navale et méthodes numériques associées" cours ENSTA du dép. de Math. Appli. édition 85
- Guyou S (1996) "modélisation des écoulements côtiers et estuariens" thèse université de Caen.
- Hulin Guyon Petit (1991) "hydrodynamique physique" édition CNRS.
- "L'almanach du marin breton" 1986.
- Lacombe H. (1965) "cours d'océanographie physique" Gauthier Villard
- Lamb (1980) "Elements of Soliton theory" John Wiley
- Landau Lifshitz (1989) "Mécanique des fluides" ed du globe/MIR
- Lighthill J. (1978) "Waves in fluids" Cambridge Univ. press
- Mei C.C. (1989) "the applied dynamics of ocean surface waves" adv series on Ocean Eng. Vol I, World Scientific
- Newell A. C. (1985): "Solitons in mathematics and physics", SIAM RCSAMn°48
- Ockendon Tayler (1983) Inviscid fluid flows, springer
- Pedlovsky "Geophysical fluid Dynamics", Springer
- Simpson J. E. Gravity Currents Ellis horwood 87
- Stewartson
- Tritton "Physical Fluid Dynamics ", Van Nostrand Reinhold
- Whitham
- Yalin M.S. (1992) "River Mechanics" Pergamon Press

historique:

mars 97 v pap/ fev 98 avril mai / 01/07/98 / 01/03/99

1