

Outils pour le contrôle des écoulements

Jérôme Hœpffner
Post-Doc, IRPHÉ

Avec

Thomas Leweke, Stéphane le Dizès, Uwe Ehrenstein

Mon cursus

- 2001, Maîtrise de mécanique: Université Paul Sabatier

2001 - 2006, Thèse: KTH, Stockholm (Dan Henningson)

2006 - 2007, Post-Doc: IRPHÉ

Page web: www.irphe.univ-mrs.fr/~hoepffner

Email: hoepffner@irphe.univ-mrs.fr

Plan

- 1) Le contrôle
- 2) Exemples
- 3) Les outils adaptés

Pourquoi contrôler les écoulements?

Vehicules:

- Réduire la trainée (empêcher la turbulence)
- Disloquer les tourbillons de sillage
- Eviter le décollement, la recirculation
- ...

En général:

Réduire ou exciter des instabilités
(que l'on a étudiées au préalable)

Différents types de contrôle

Complexité d'implémentation croissante:

- 1) Contrôle passif (pas d'énergie - choix de géométrie)
- 2) Contrôle actif (dépendance énergétique)
- 3) Contrôle rétroactif (dépendance énergétique et mesure)

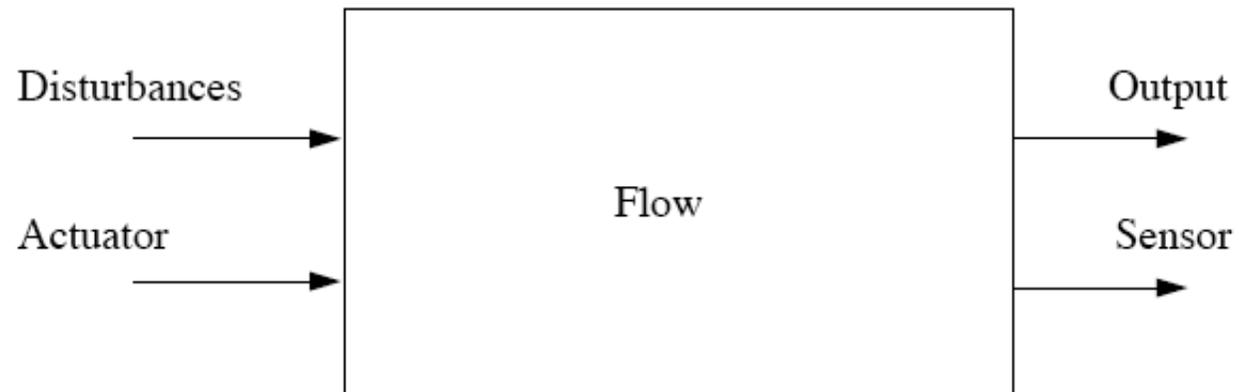
La question:

Comment un modèle entre-t-il en jeu?
(il y a toujours un modèle...)

Éléments de base

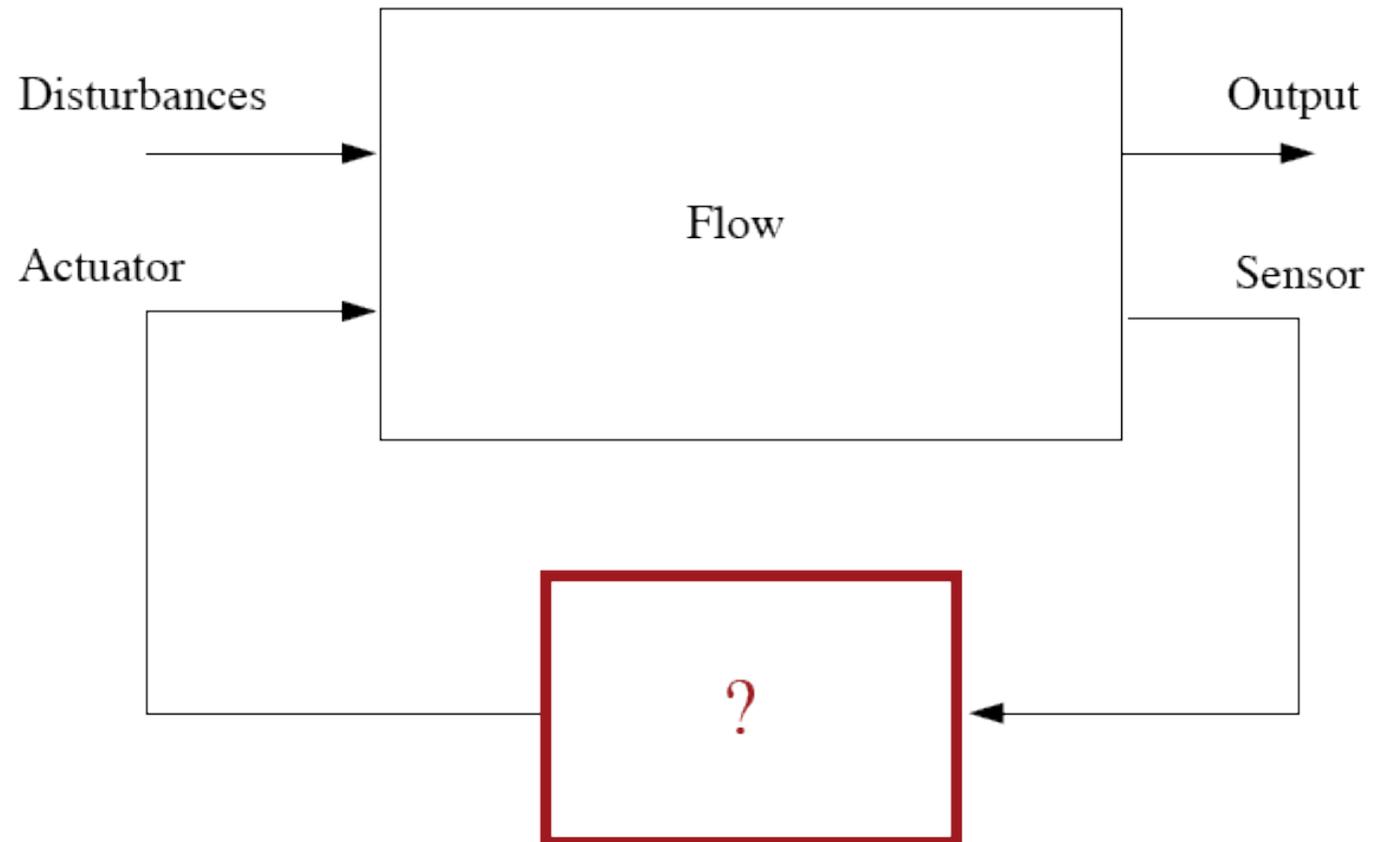
- 1) Quel modèle?
- 2) Que peut-on mesurer?
- 3) Comment peut-on agir?
- 4) A quel prix?
- 5) Avec quelle précision?
- 6) Quelles sont les perturbations?

- * Information et action limitées.
- * Incertitudes de modèle et de bruit.



Rétroaction

Le contrôle est une fonction de la mesure



Une théorie qui marche bien

Rétroaction avec:

Modèle linéaire

Perturbation Gaussienne

Fonction objective quadratique

+ Optimisation

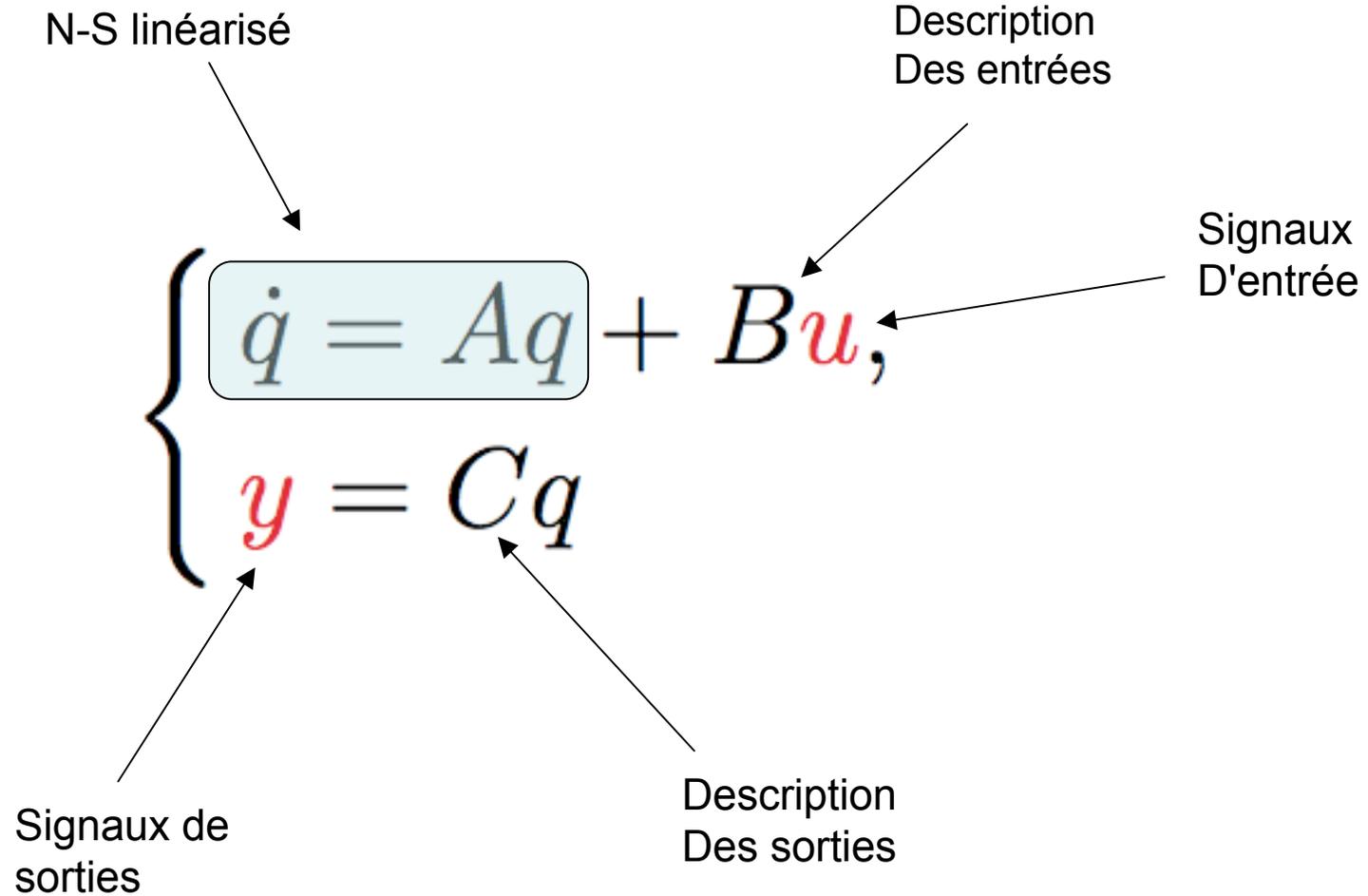
➔ LQG (Linéaire, Quadratique, Gaussien)

Navier-Stokes linéarisé,

Description stochastique des perturbations externes

Minimisation de l'énergie cinétique

Modèle: dynamique, entrées et sorties



Contrôle et estimation

$$\begin{cases} \dot{q} = Aq + Bu, \\ y = Cq \end{cases}$$

On peut contrôler grâce à u ,

➡ rétroaction: u est fonction de l'état: $u=Kq$

Mais on ne connaît pas l'état,

➡ Il faut l'**estimer** grâce à la mesure
(et au modèle dynamique!!!)

1) Contrôle, état connu.

Le contrôle est une fonction de l'état

En rouge: notre contrôle
En magenta: perturbations

$$\text{system} \begin{cases} \dot{q} = Aq + B_1 w + B_2 u, \\ y = Cq + g \end{cases}, \quad \text{estimator} \begin{cases} \dot{\hat{q}} = A\hat{q} - L(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{q} \end{cases}$$

Full information control:

Feedback: $u = Kq$

Closed loop: $\dot{q} = \underbrace{(A + B_2 K)}_{A_c} q + B_1 w$

Estimation:

Estimation error $\tilde{q} = q - \hat{q}$:

$\dot{\tilde{q}} = \underbrace{(A + LC)}_{A_e} \tilde{q} + B_1 w - Lg$

2) Estimation: connaitre l'état

On reconstruit l'état grâce à la mesure, **et au modèle**

En **rouge**: notre contrôle
En **magenta**: perturbations

$$\text{system} \begin{cases} \dot{q} = Aq + B_1 w + B_2 u, \\ y = Cq + g \end{cases}, \quad \text{estimator} \begin{cases} \dot{\hat{q}} = A\hat{q} - L(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{q} \end{cases}$$

Full information control:

Feedback: $u = Kq$

Closed loop: $\dot{q} = \underbrace{(A + B_2 K)}_{A_c} q + B_1 w$

Estimation:

Estimation error $\tilde{q} = q - \hat{q}$:

$\dot{\tilde{q}} = \underbrace{(A + LC)}_{A_e} \tilde{q} + B_1 w - Lg$

Optimisation: Riccati

Minimiser l'énergie cinétique de l'**erreur d'estimation** et de l'**état**

➡ 2 Fonction objective + 2 contrainte
Pour optimiser K et L

Control:

minimize

$$E(\|q\|^2 + \ell^2 \underbrace{\|u\|^2}_{\|Kq\|^2}) = \text{Tr}(PQ + \ell^2 KPK^+)$$

$$\mathcal{L}_c = \overbrace{\text{Tr}(PQ + KPK^+)}^{\text{Objective}} + \overbrace{\text{Tr}[\Lambda((A + BK)P + P(A + BK)^+ + W)]}^{\text{Constraint}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Lambda} \mathcal{L}_c = 0 \\ \nabla_P \mathcal{L}_c = 0 \\ \nabla_K \mathcal{L}_c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A^+ \Lambda + \Lambda A - \Lambda B B^+ \Lambda / \ell^2 + Q, \\ K = B^+ \Lambda / \ell^2. \end{cases}$$

Estimation:

minimize

$$E(\underbrace{\|q - \hat{q}\|^2}_{\|\tilde{q}\|^2}) = \text{Tr}(\tilde{P})$$

$$\mathcal{L}_e = \overbrace{\text{Tr}(\tilde{P})}^{\text{Objective}} + \overbrace{\text{Tr}[\Lambda((A + LC)\tilde{P} + \tilde{P}(A + LC)^+ + \alpha^2 LL^+ + W)]}^{\text{Constraint}}$$

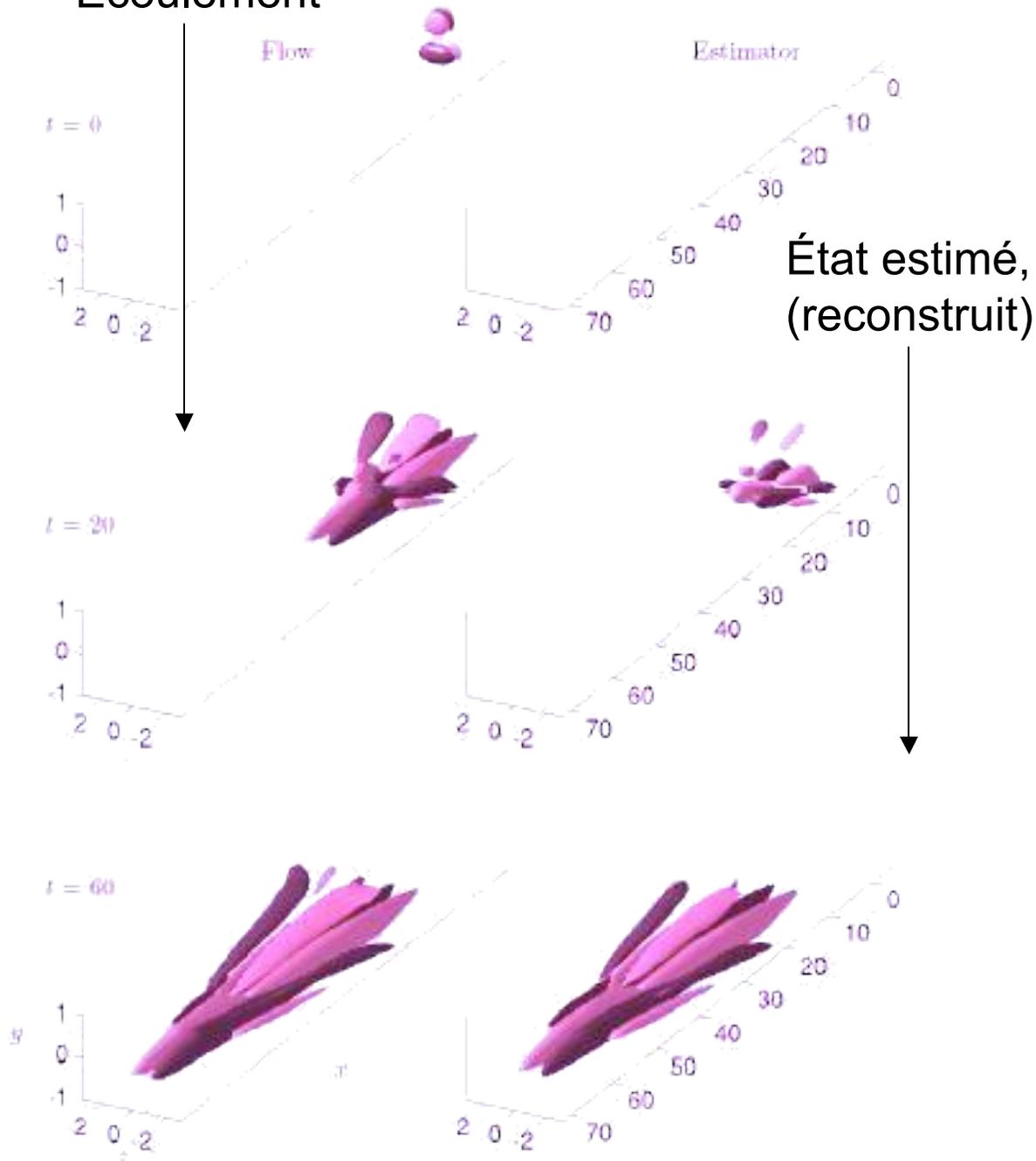
$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\Lambda} \mathcal{L}_e = 0 \\ \nabla_{\tilde{P}} \mathcal{L}_e = 0 \\ \nabla_L \mathcal{L}_e = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A \tilde{P} + \tilde{P} A^+ - \tilde{P} C^+ C \tilde{P} / \alpha^2 + W \\ L = -\tilde{P} C^+ / \alpha^2. \end{cases}$$

➡ Deux équation de Riccati, résolution directe

Exemples

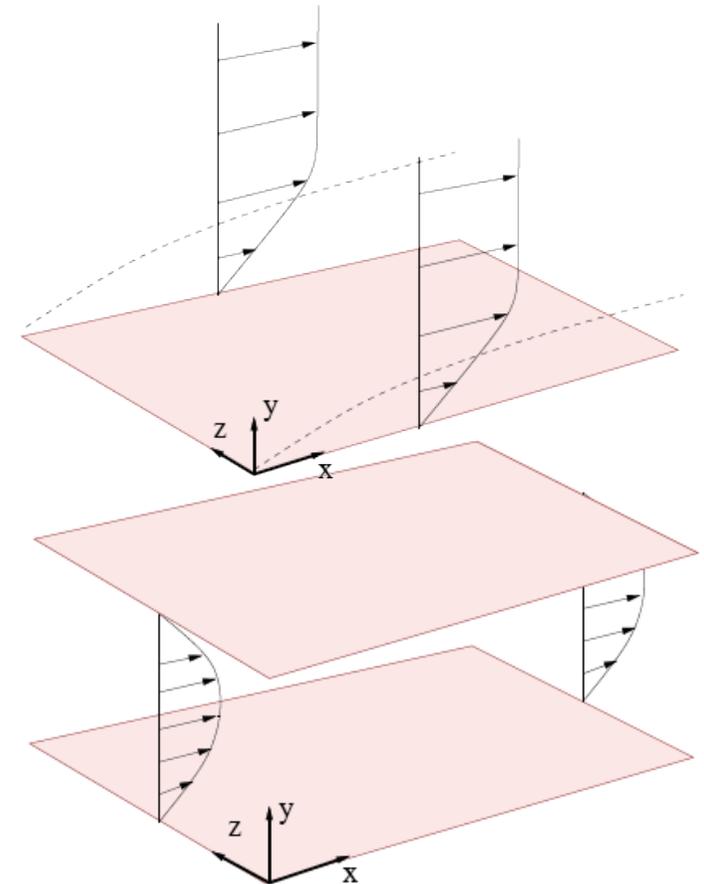
Contrôle et estimation: en numérique
Écoulements faiblement non-parallèles

Écoulement



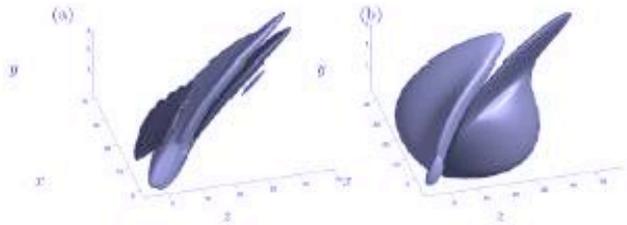
Exemple: estimation

Mesure le frottement
à la paroi et la pression:
Reconstruit l'écoulement

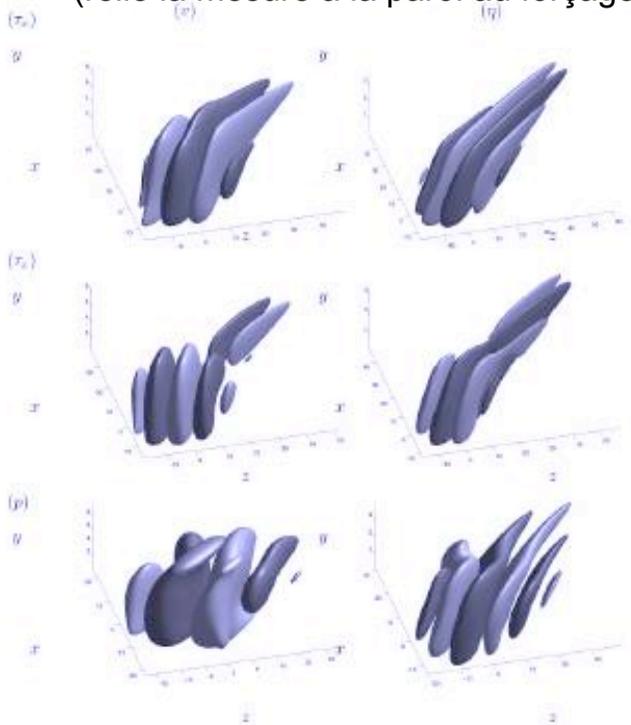


Contrôle et estimation: Couche limite avec flèche

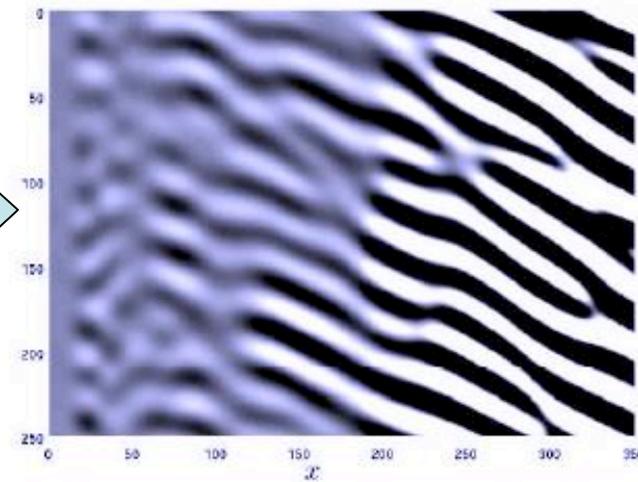
Loi de contrôle:
(relie l'état à la condition limite à la paroi)



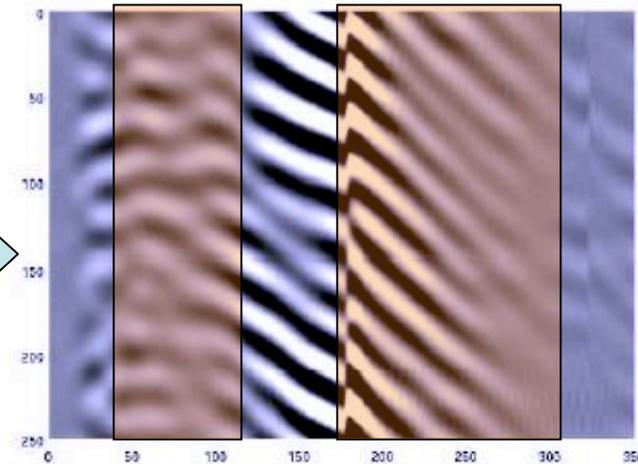
Loi d'estimation:
(relie la mesure à la paroi au forçage dans l'estimateur)



Croissance des ondes
De "cross-flow"



Sans
contrôle



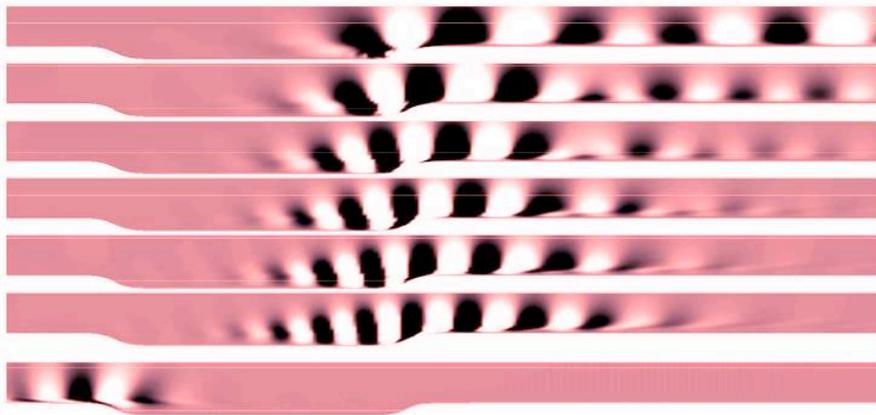
Avec
contrôle

Zone de
mesure

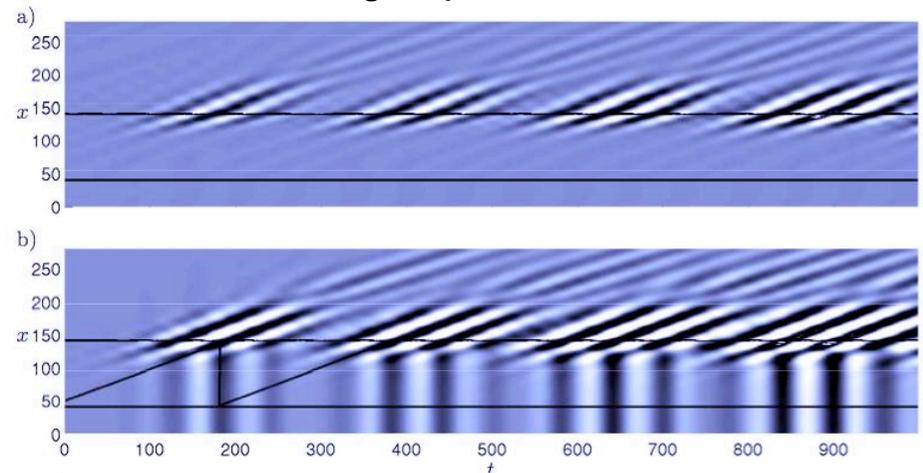
Zone de
contrôle

Écoulement non-parrallèle

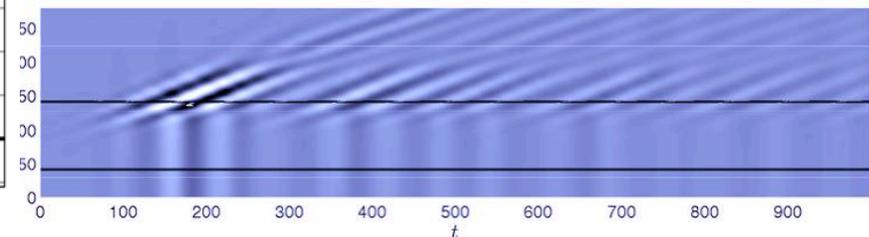
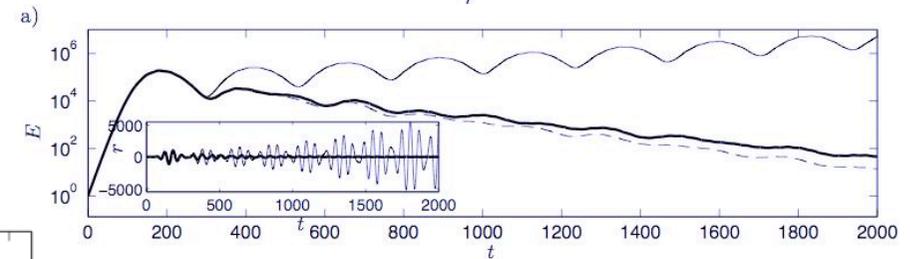
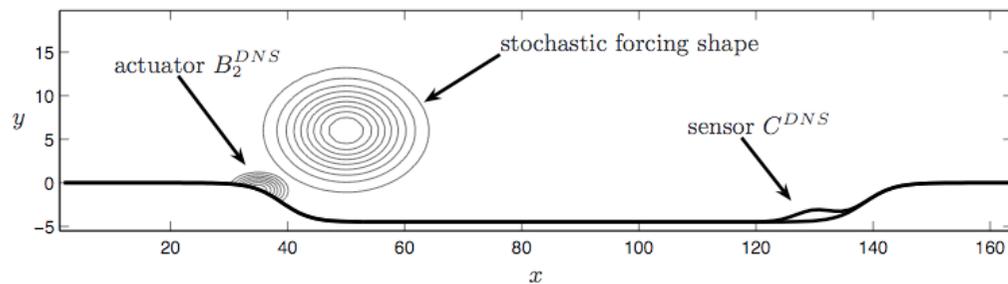
Projection de NS sur les modes propres globaux:



Evolution énergétique:



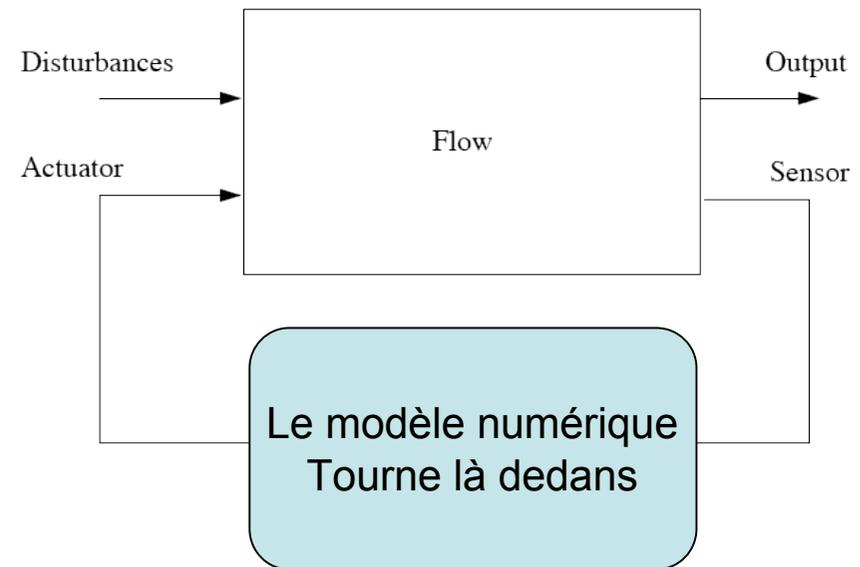
Capteur et actionneur:



Ce qu'il reste à faire

Réduire la dimension du système:

- 1) pour l'optimisation
- 2) Pour le calcul en temps réel



Aussi:

- Actionneurs que l'on peut modéliser.
- Capteurs.

- Boucler la boucle en expérimental.

Réduction de modèle

Navier-Stokes: trop grand pour l'optimisation

Trop grand pour le contrôle en temps réel

1) *Projection sur les modes globaux*

2) *Sur les modes POD*

➔ «Balanced truncation»

- POD système direct excité par les entrées

- POD système adjoint excité par les sorties

Résoudre deux équations de Lyapunov:

$$AP + PA^+ + M = 0$$

The diagram illustrates the Lyapunov equation $AP + PA^+ + M = 0$. Arrows point from labels to the terms in the equation: 'N-S' points to 'A', 'Covariance De l'état' points to 'P', 'N-S adjoint' points to 'A⁺', and 'Covariance du forçage' points to 'M'.

Un outil numérique adapté

(au contrôle et aux études de stabilité
en écoulements non-parrallèles)

Outil numérique

Méthodes matricielles pour manipuler NS en 2D, 3D

Il y a un fossé à combler entre:

- **Les méthodes matricielles** pour les petits systèmes,
(taille mémoire caractéristique: l'opérateur)

- **La simulation** pour les grand systèmes.
(taille mémoire caractéristique: l'état)

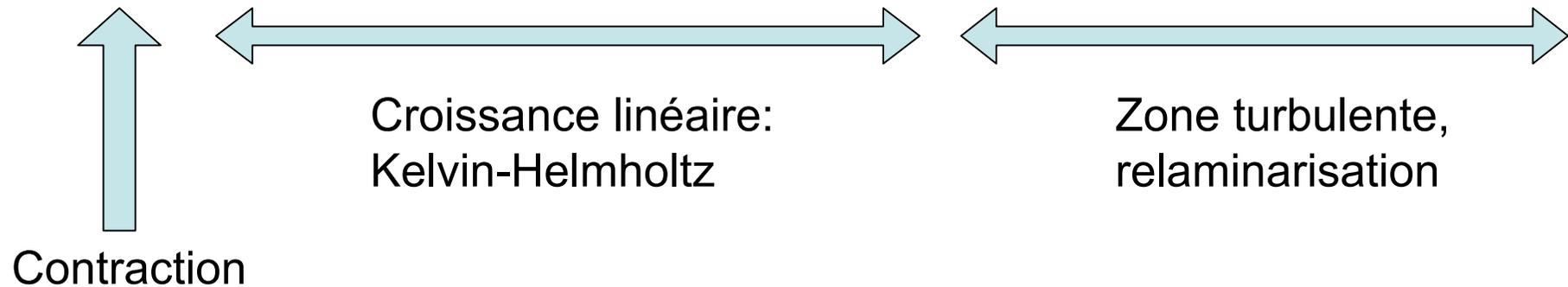
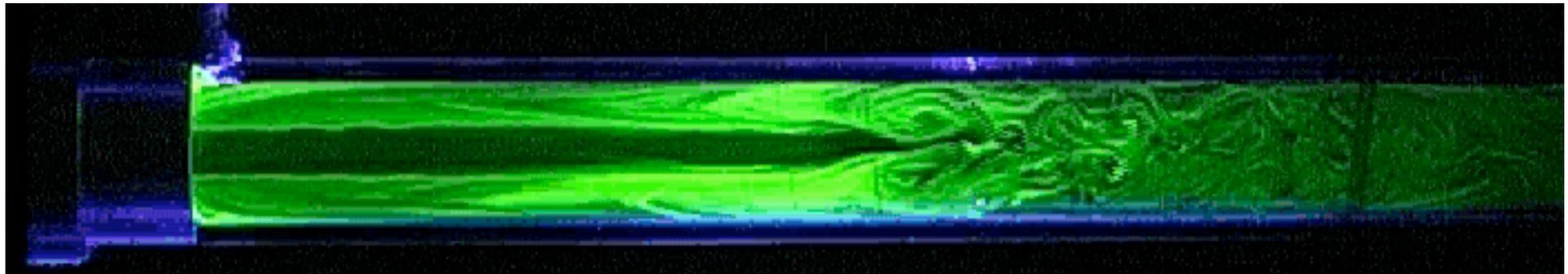
➔ **Matrices creuses**

(grilles orthogonales, variables primitives)

Opérateur \approx 100 états

Cas d'étude: tuyau avec contraction

(avec Martin Griffith, Thomas Leweke)

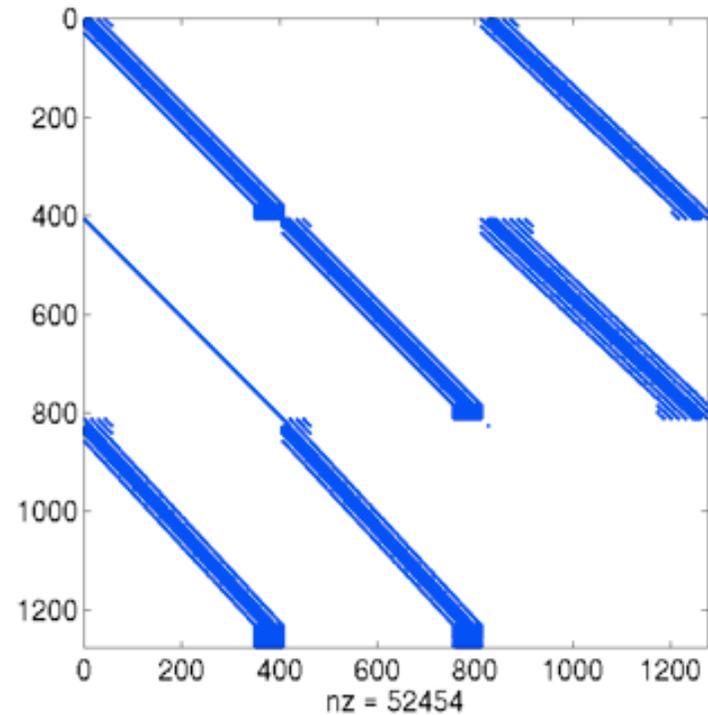
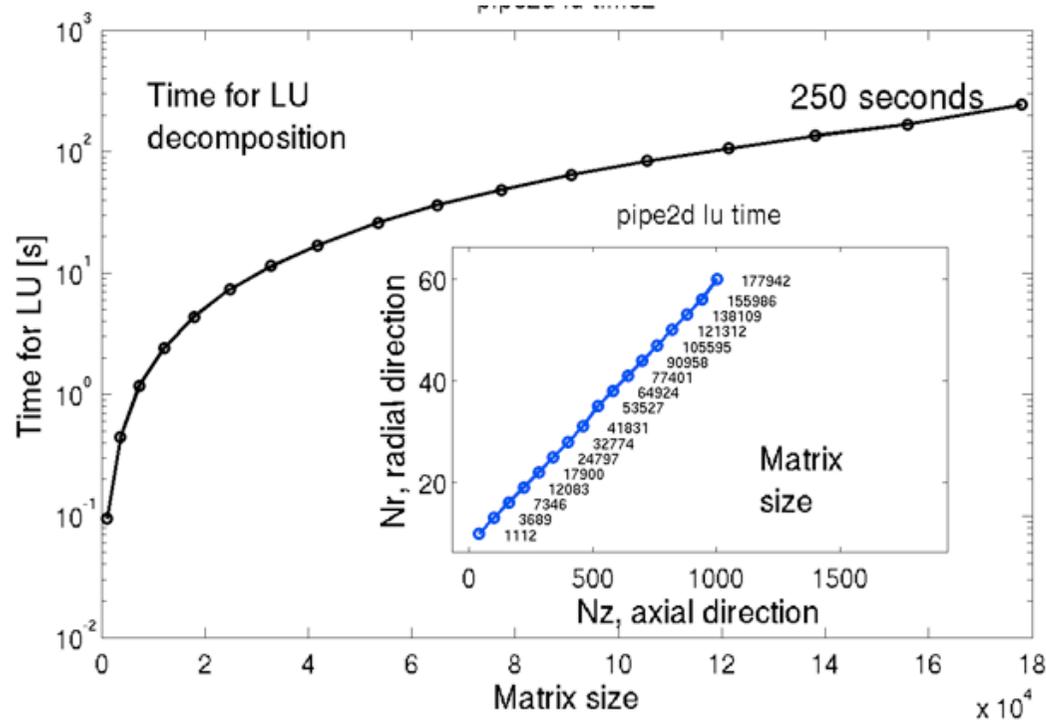
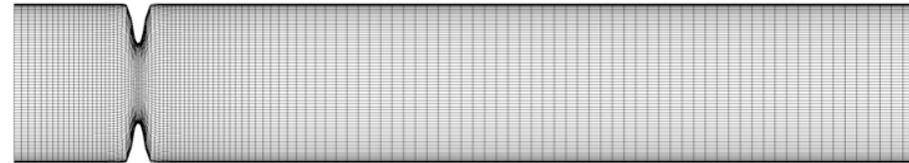


Visualisation plan laser/encre fluorescente

Discrétisation spatiale

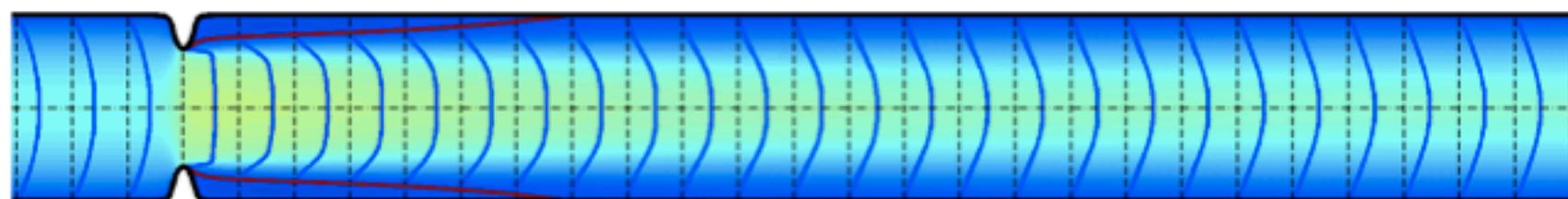
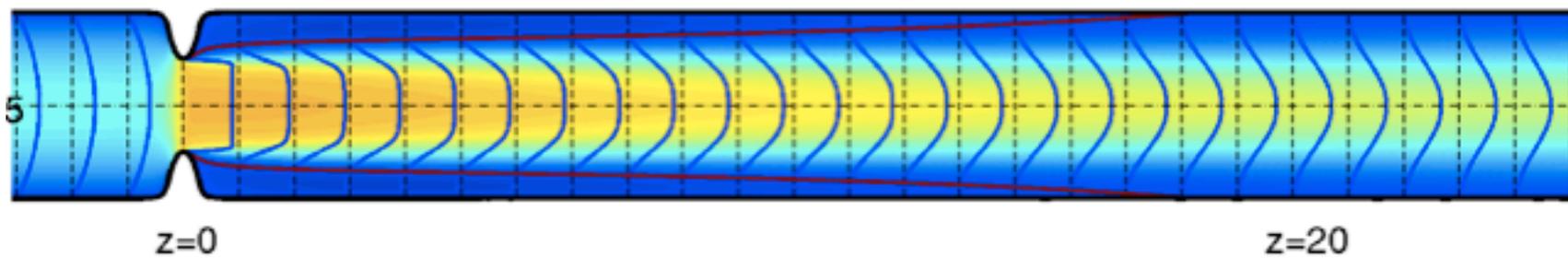
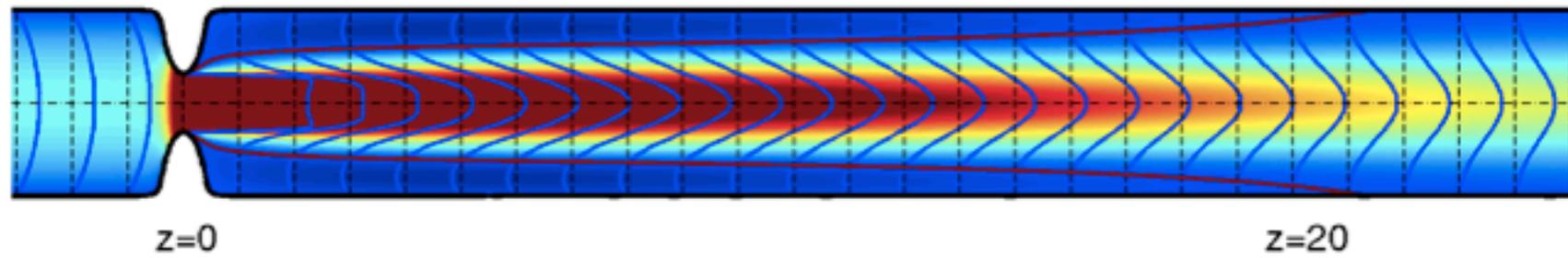
$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{p} \end{pmatrix}}_{\dot{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}}_q$$

Chebyshev / differences finies



Cas d'étude: tuyau avec contraction

Écoulement stationnaire:



Stabilité hydrodynamique: 4 éléments de base

1) Calcul des modes propres

Trouve λ, \hat{q} tels que $\lambda E \hat{q} = A \hat{q}$

2) Calcul du forçage harmonique optimal

Trouve G_T, q_0 tel que $G_T = \max_{q_0} \frac{\|q(T)\|}{\|q_0\|}$, $E q(T) = \int_{t=0}^T A q(t) \partial t - E q_0$

3) Calcul des perturbations initiales optimales

Trouve G_ω, f tel que $G_\omega = \max_f \frac{\|q\|}{\|f\|}$, $\tilde{q} = (i\omega E - A)^{-1} f$

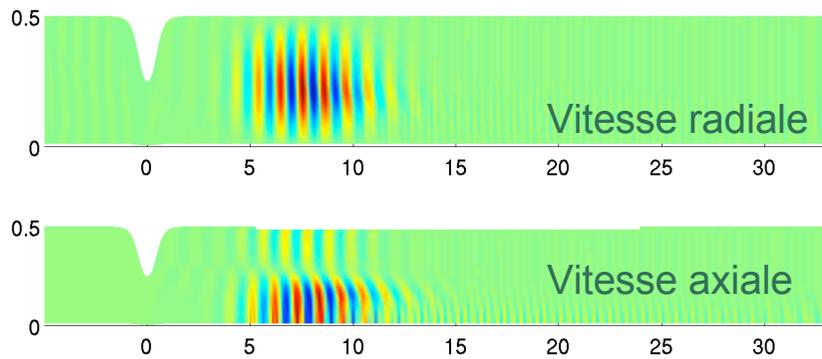
4) Calcul de la réponse au forçage stochastique

$$AP + PA^+ + M = 0$$

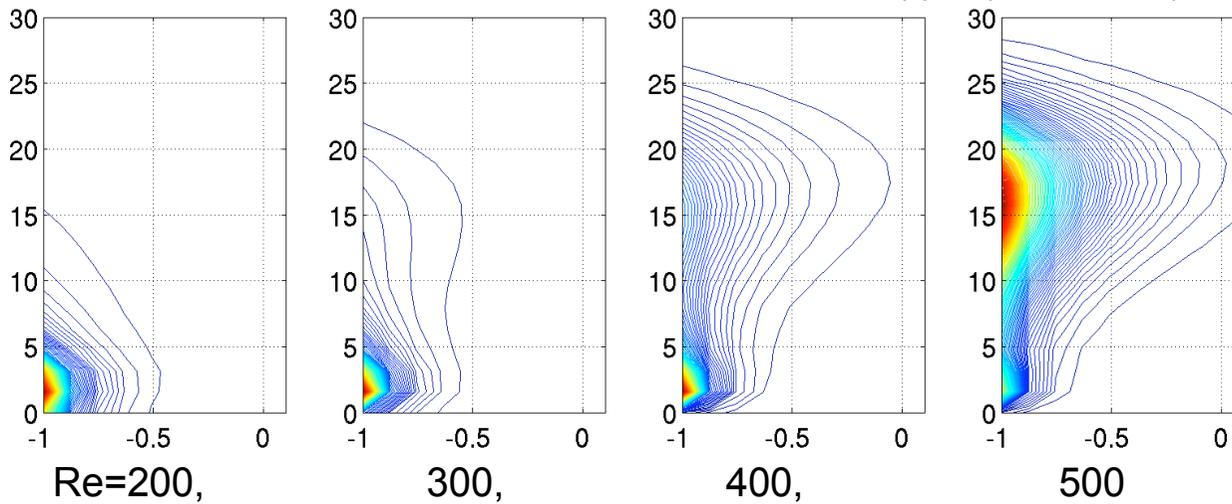
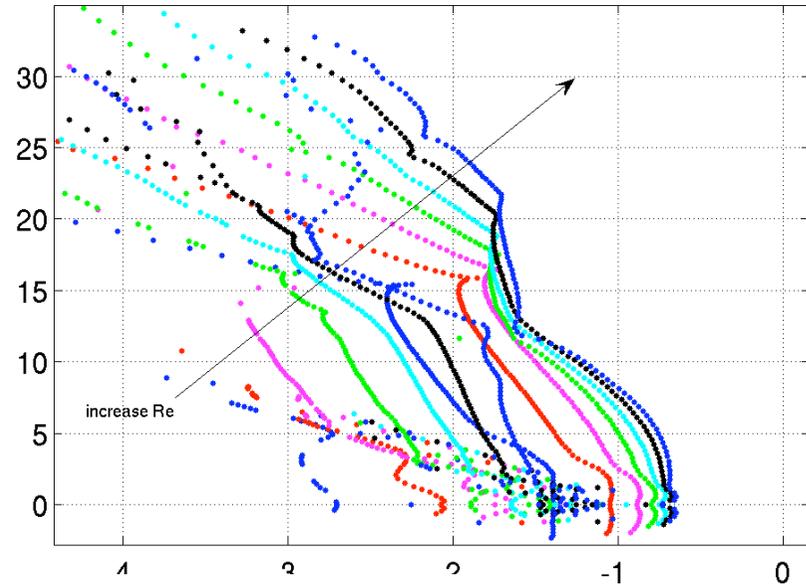
Instabilité: les perturbations croissent et détruisent l'état
Stationnaire ➡ méthodes d'optimisation

Spectre

Un exemple de mode propre:



Spectre pour $Re=200 \dots 800$



Pseudospectre

Optimisation simple

Operateur de marche en temps

Operateur adjoint

$$q(T) = \mathcal{H}_T q_0,$$

$$\frac{\|q(T)\|}{\|q_0\|} = \frac{\langle q(T), q(T) \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} = \frac{\langle \mathcal{H}_T q_0, \mathcal{H}_T q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} = \frac{\langle q_0, \mathcal{H}_T^+ \mathcal{H}_T q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle}$$

$$\left(= \frac{q_0^H \mathcal{H}_T^+ \mathcal{H}_T q_0}{q_0^H q_0} \right)$$

Quotient de Rayleigh

$$\mathcal{H}_T^+ \mathcal{H}_T$$

- 1) Propage dans le temps la condition initiale
- 2) Propage la condition finale en arrière

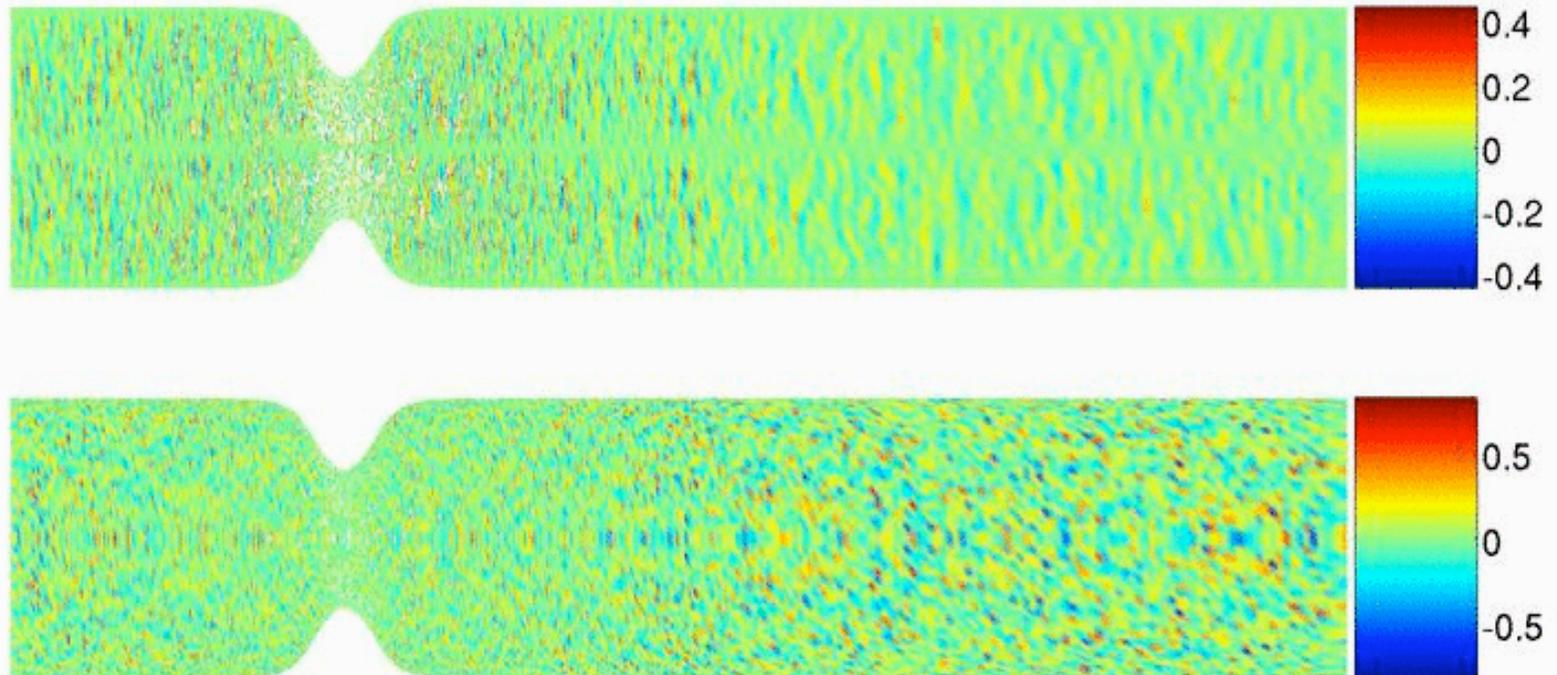
Les extrema du quotient de Rayleigh sont atteint pour ses vecteurs propres

Itération en puissance

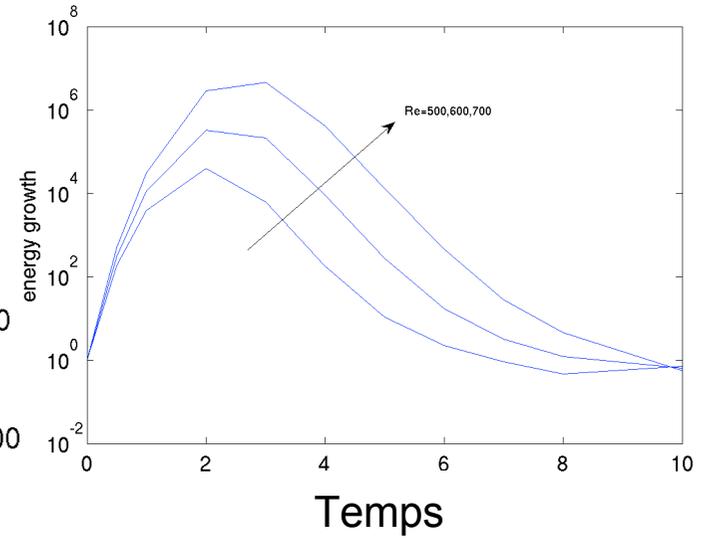
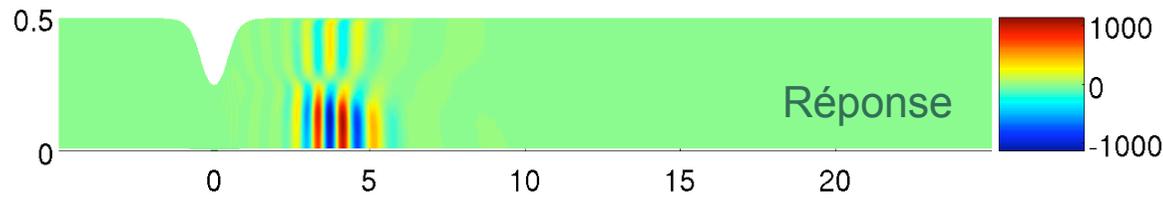
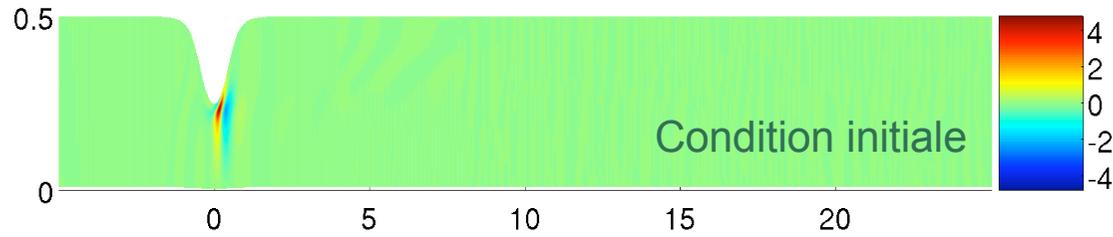
Pour calculer le mode propre le plus amplifié

- 1) Condition initiale aléatoire
- 2) Marche en avant dans le temps
Marche en arrière avec l'opérateur adjoint
- ...

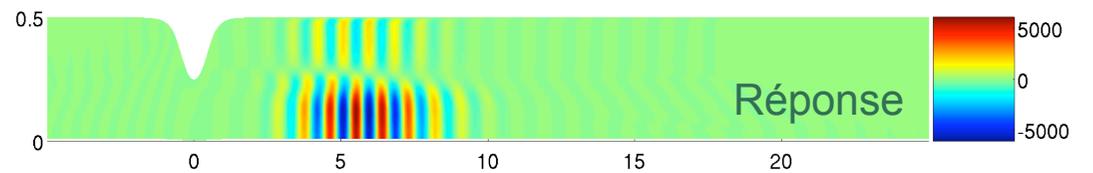
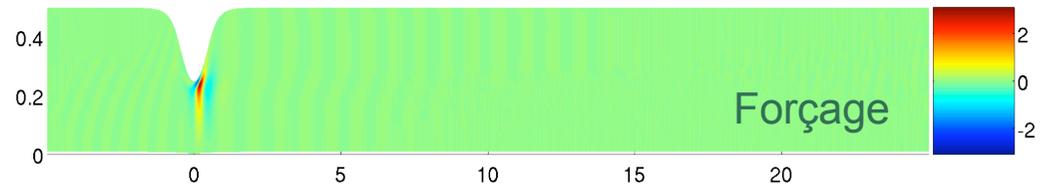
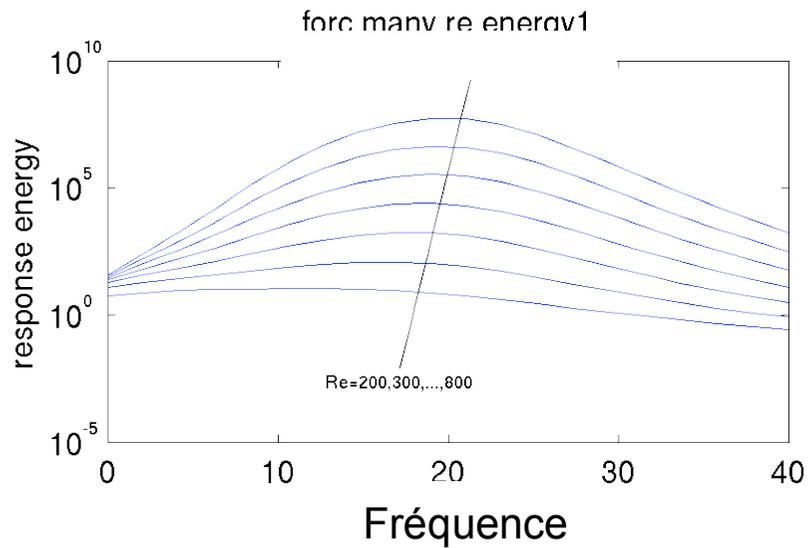
Vitesse radiale
Vitesse axiale



Conditions initiales

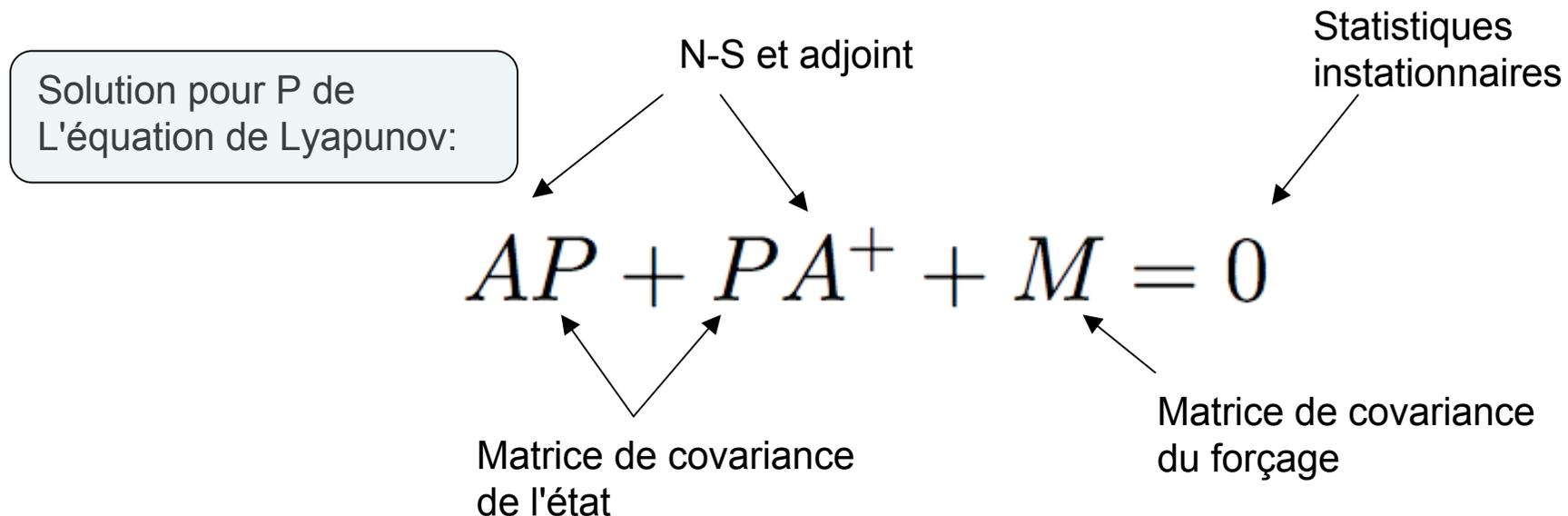


Forçage



Forçage stochastique

- 1) Si il n'y a pas de mécanisme d'instabilité dominant la réponse va dépendre des perturbations.
 - 2) Des perturbations érratiques sont avantageusement représentées par leur statistiques.
- ➡ Quelles sont les statistiques d'un système excité par des perturbations dont on connais les statistiques?



Résolution itérative de Lyapunov

(continuous time) Lyapunov

(discrete time) Lyapunov,
ou équation de Stein

$$AP + PA^H + R^H R = 0 \Leftrightarrow \tilde{A}P\tilde{A}^H + \tilde{R}^H\tilde{R} = 0$$

$$\begin{cases} \tilde{A} = (A - \sigma I)^{-1}(A + \sigma I) \\ \tilde{R} = \sqrt{2\sigma}(A - \sigma I)R \end{cases}$$

Shifting

$$P = \tilde{R}^H\tilde{R} + \tilde{A}\tilde{R}^H\tilde{R}\tilde{A}^H + \tilde{A}^2\tilde{R}^H\tilde{R}\tilde{A}^{2H} + \dots$$

Solution itérative
(de Smith)

$$P = Z^H Z,$$

$$Z = \begin{bmatrix} | & | & | & \vdots \\ \tilde{R} & \tilde{A}\tilde{R} & \tilde{A}^2\tilde{R} & \dots \\ | & | & | & \vdots \end{bmatrix}$$

Solution itérative sous
forme décomposée

Décomposition
racine de la matrice
de covariance

➡ Low-Rank cyclic Smith

Conclusions

Les éléments fondamentaux du contrôle sont:

- 1) Le modèle
- 2) La mesure
- 3) Les actionneurs
- 4) Les incertitudes

Pour la stabilité:

- 1) Le spectre
- 2) Les condition initiales optimales
- 3) Le forçage optimal (et pseudospectre)
- 4) La réponse aux perturbations stochastiques

Développement d'une approche numérique "globale"
En variables primitives et méthodes matricielles.

Merci pour votre accueil!