Jérôme Hoepffner,   Maître de conférences,
Institut Jean le Rond D'Alembert, T55-65, Bureau 518
jerome.hoepffner@upmc.fr.
http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/enseignement

TD2: stabilité M1, approche numérique

A partir d'un système d'équations, obtenir les q, A, E, C de l'état, de la dynamique et des contraintes.

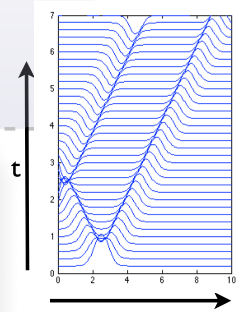
Deux examples: $Eq_t = Aq, \quad Cq = 0$

- Fluide au repos entre deux plans infinis:

$$\begin{aligned} \rho u_t &= -p_x + \mu\Delta u, \\ \rho v_t &= -p_y + \mu\Delta v, \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} u|_0 &= 0 \\ u|_L &= 0 \\ v|_0 &= 0 \\ v|_L &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow q = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \mu\Delta & 0 & -\partial_x \\ 0 & \mu\Delta & -\partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} I|_L & 0 & 0 \\ I|_0 & 0 & 0 \\ 0 & I|_L & 0 \\ 0 & I|_0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Corde vibrante sur une longueur finie:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \Longrightarrow v = u_t, \quad q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2\partial_{xx} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ I_L & 0 \end{pmatrix}$$



Condition initiale pour une corde vibrante

Ex.1 **Température**
Modes propres de la diffusion de la température entre deux plans infini, diffusivité constante dans le domaine, et température imposée aux parois. Ecrire q, A, E, C.

$$T_t = \mu(T_{xx} + T_{yy}), \quad T(0) = 0, T(L) = 0$$

Ex. 2 **Tuyau d'arrosage**
On suppose un domaine fini x dans [0,L], écrire les matrices q, E, A, C.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + (1-\chi)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Ex. 3 **Stabilité d'un écoulement:**
Ecrire q, E, A, C, pour la stabilité d'un écoulement parrallèle entre deux plans infinis. U, Uy représentent l'écoulement de base (données du problème).

$$\begin{aligned} u_t + Uu_x + vU_y &= -p_x + \Delta u/Re, \\ v_t + Uv_x &= -p_y + \Delta v/Re, \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} u|_L &= 0 \\ u|_0 &= 0 \\ v|_L &= 0 \\ v|_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ex. 4 **Rayleigh-Bénard**
Un fluide au repos entre deux plan horizontaux. Le fluide advecte la température, et la température diffuse. De plus, la température agit sur la densité: instabilité de Rayleigh-Bénard. Ecrire q, E, A, C.

$$\begin{aligned} \rho u_t &= -p_x + \mu\Delta u, \\ \rho v_t &= -p_y + \mu\Delta v - \rho g d\theta, \\ u_x + v_y &= 0 \\ \theta_t + vT_y &= \Delta\theta \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} u|_0 &= 0 \\ u|_L &= 0 \\ v|_0 &= 0 \\ v|_L &= 0 \\ T|_0 &= 0 \\ T|_L &= 0 \end{aligned}$$

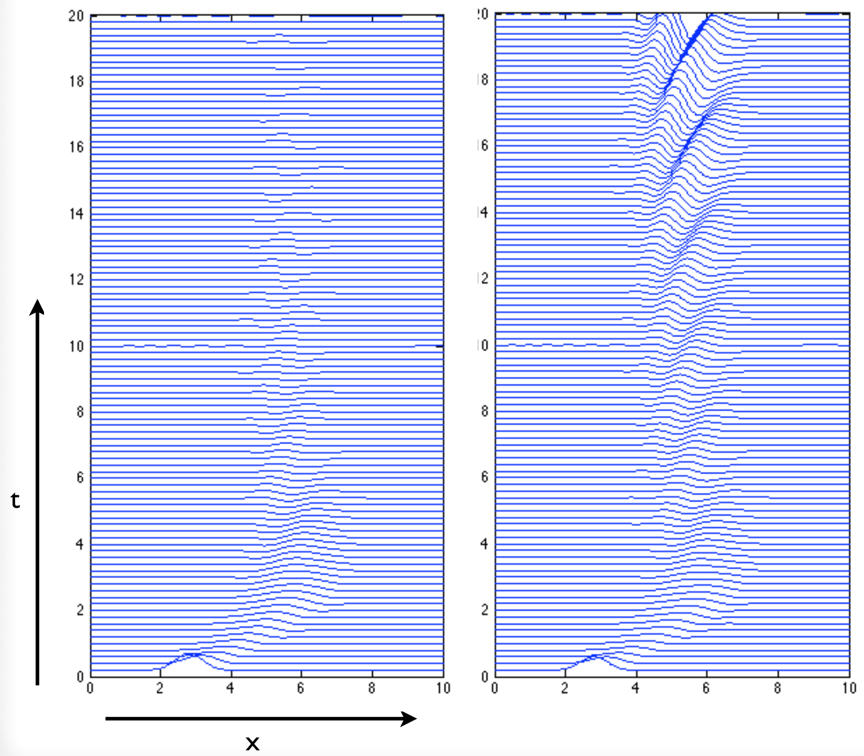
Ex. 5 **Corde vibrante+viscosité**
Ecrire q, E, A, C pour la corde vibrante, avec deux termes additionels d'atténuation visqueuse:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nu\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu^*\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) = 0.$$

Script Matlab:
marche en temps
et modes propres.
Equation de Ginzburg-Landau (une sorte de convection/diffusion)

```
% un script pour calculer les modes propres
% et comparer avec la marche en temps
format compact
clf

% parametres
N=300 % nombre de points de grille
L=10 % taille du domaine
mu=0.025 % parametre de diffusion
U=1 % vitesse d'advection
dt=0.01 % pas de temps
tmax=20 % temps max pour la simulation

% matrices de derivation
x=linspace(0,L,N)'; dx=x(2)-x(1); xx=[x,x+L]; % derivee seconde
D=zeros(N,N);  D(1,1:3)=[-1.5,2,-0.5]/dx;
for ind=2:N-1; D(ind,ind-1:ind+1)=[-1,0,1]/(2*dx);  end
D(N,N-2:N)=[0.5,-2,1.5]/dx;
D2=zeros(N,N);  D2(1,1:3)=[1,-2,1]/dx^2;  % derivee premiere
for ind=2:N-1;  D2(ind,ind-1:ind+1)=[1,-2,1]/(dx^2); end
D2(N,N-2:N)=[1,-2,1]/dx^2;

% construction des matrices de la dynamique
ll=1-(x-L/2).^2;
I=eye(N); Z=zeros(N,N);
A=(mu+0.1*i)*D2-U*D+diag(ll);  E=I;

% imposition des conditions limites
loc=[1,N]; C=I(loc,:);
A(loc,:)=C; E(loc,:)=0;

% modes propres
[U,S]=eig(A,E); s=diag(S); rem=isinf(s); s(rem)=[]; U(:,rem)=[];
[t,o]=sort(-real(s)); s=s(o); U=U(:,o);  s=s(1:10);U=U(:,1:10);

subplot(1,3,1);
for ind=1:length(s);
    h=plot(real(s(ind)),imag(s(ind)),'*'); hold on
    ttt=['num=' num2str(ind) ',v=U(1:N,num); subplot(1,3,2);plot(x,real(v),"b",x,imag(v),"r");'];
    %ttt=['num=' num2str(ind) ',v=U(1:N,num); ss=s(num);subplot(1,3,2);eigmarch;'];
    set(h,'buttondownfcn',ttt);
end; hold off

% marche en temps
M=(E-A*dt/2)\(E+A*dt/2); % matrice de la marche
tvec=0:dt:tmax;
q=exp(-((x-L/4)/0.5).^2);% condition initiale en exp
%q=sin(10*x*2*pi/L)'; % condition initiale en sinus

for ind=1:length(tvec)
    % plot
    qq=real(q);
    if ~mod(ind,10);  subplot(1,3,2);plot(x,qq,'b',x,ll,'r'); ylim([-1.1,1.1]); xlim([0,L]);end
    if ~mod(ind,20);  subplot(1,3,3);plot(x,qq+ind*dt); ylim([0,tmax]); xlim([0,L]); hold on;end

    q=M*q; % marche d'un pas de temps
    drawnow
end
```

Ex.
Décrivez ce que vous observez dans ces deux graphs: quels sont les effets physiques actifs. Les propriétés de la dynamique (paramètres de l'équation) sont ils constant selon x?



Modes propres de l'équation de difusion sur un domaine fini (conditions limites de Dirichlet homogène)