

Petite évaluation: stabilité M I, approche numérique

Nom: Prénom:email:.....

Donnez des réponses courtes aux questions suivantes:

- Quel est votre langage de programmation favori?

- Avez-vous déjà utilisé le langage de programmation “Matlab”?

- Donner un exemple de système instable

- Donner la définition du couple valeur propre/vecteur propre d'une matrice carrée A

- Donner un critère de diagonalisabilité d'une matrice carrée A

- Donner un critère d'invertibilité d'une matrice carrée A

- Qu'est-ce que c'est que la “décomposition LU” d'une matrice A ? A quoi ça sert?

- Que signifie “augmenter la résolution” d'une discrétisation spatiale?

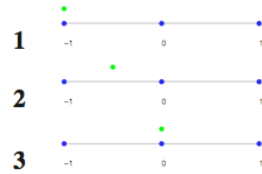
- Qu'est ce que c'est que “l'ordre” d'une méthode numérique?

TDI: stabilité MI, approche numérique

Ce TD permet de pratiquer les outils de la discrétisation, qui vont nous permettre d'étudier plus tard la stabilité des écoulements fluides.

Jérôme Hoepffner, Maître de conférences,
Institut Jean le Rond D'Alembert, T55-65, Bureau 518
jerome.hoepffner@upmc.fr
<http://www.lmm.jussieu.fr/~hoepffner/enseignement>

Poids de différences finies:



1

$$\Delta x f'_{-1} \approx -\frac{3}{2}f_{-1} + 2f_0 - \frac{1}{2}f_1$$

2



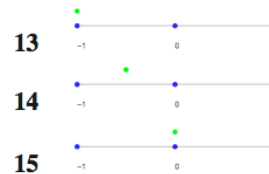
$$\Delta x f'_{-1/2} \approx -f_{-1} + f_0$$

3



$$\Delta x f'_0 \approx -\frac{1}{2}f_{-1} + \frac{1}{2}f_1$$

Table 1.1. First derivative approximation using a three-point stencil.



13

$$\Delta x^2 f''_{-1} \approx f_{-1} - 2f_0 + f_1$$

14



$$\Delta x^2 f''_{-1/2} \approx f_{-1} - 2f_0 + f_1$$

15



$$\Delta x^2 f''_0 \approx f_{-1} - 2f_0 + f_1$$

Table 1.4. Second derivative approximation using a three-point stencil.

Ex.1 Matrices de dérivation en différences finies

- 1) Pour une grille à quatre points: $x=(0,1,2,3)$, écrire les matrices de dérivations: dérivées première et seconde
- 2) Pour la même grille, écrire les matrices de dérivation en supposant que le domaine est infini et périodique.

Ex.2 Programme de test

Ecrire en pseudo-code un programme qui teste la construction de matrices de dérivée première et seconde.
On utilisera par exemple la fonction $f(x)=\exp(-x^2)$ dont on peut calculer à la main les dérivées.

Ex.4 Conditions limites de Neuman

Pour une grille à quatre points $x=(0,1,2,3)$, écrire les matrices E et A pour la discrétisation d'un problème de diffusion, avec une condition limite de Dirichlet homogène à gauche (valeur nulle à gauche) et une condition limite de Neuman homogène à droite (dérivée nulle à droite).

Ex.5 Discrétisation en temps

Obtenir la matrice M de marche en temps: $q(n+1)=Mq(n)$, pour une discrétisation temporelle de Euler implicite.

Ex.3 Problème stationnaire

Ecrire en pseudo-code un programme qui calcule la distribution de température sur une tige. les températures aux deux extrémités de la tige sont imposées T0 et T1. Il faudra pour cela adapter la méthode pour pouvoir imposer des conditions aux limites non-homogènes.

% un script pour marcher la “convection/diffusion” dans le temps
clf

%%% parametres
N=100 % nombre de points de grille
L=10 % taille du domaine
mu=0.01 % parametre de diffusion
U=1 % vitesse d'advection
dt=0.01 % pas de temps
tmax=10 % temps max pour la simulation

%%% matrices de derivation
x=linspace(0,L,N); dx=x(2)-x(1);
D=zeros(N,N);
D(1,1:3)=[-1.5,2,-0.5]/dx;
for ind=2:N-1;
D(ind,ind-1:ind+1)=[-1,0,1]/(2*dx);
end
D(N,N-2:N)=[0.5,-2,1.5]/dx;
D2=D^2;

%%% construction des matrices de la dynamique
%oo=exp(-(x-L/2)/1).^2);
%oo=(1-tanh(x-L/2))/2;
I=eye(N);
A=mu*D2-U*D;
E=I;

%%% imposition des conditions limites
loc=[1,N]; C=I(loc,:);
A(loc,:)=C; E(loc,:)=0;

%%% marche en temps
M=(E-A*dt/2)/(E+A*dt/2); % matrice de la marche
tvec=0:dt:tmax;
q=exp(-(x-L/4)/0.5).^2); % condition initiale en exp
%q=sin(5*x*2*pi/L); % condition initiale en sinus

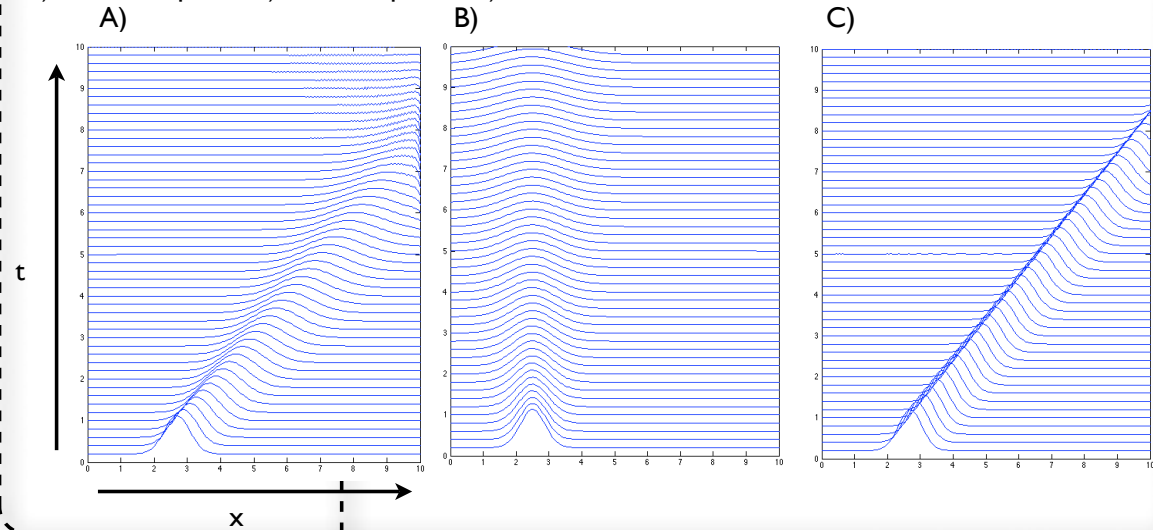
for ind=1:length(tvec)
% plot
subplot(1,2,1);plot(x,q,'b'); ylim([-1.5,1.5]); xlim([0,L]);
if ~mod(ind,10);subplot(1,2,2);plot(x,q+ind*dt); ylim([0,tmax]); xlim([0,L]); hold on;end

q=M*q; % marche d'un pas de temps
drawnow
end

Ex.6

Identifier chacun des graphs ci-dessous avec:

1) advection pure 2) diffusion pure 3) advection/diffusion



Ex.7

Le graph de gauche
représente la résolution d'un
problème d'advection: quelle
problème observe t'on,
comment y remédier?

