

Contrôle continu du mardi 28 avril 2009

Durée: 2 heures. Notes de cours/TD autorisées.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Il sera tenu compte de la présentation.

Ce sujet est proposé par Jérôme Hoepffner et Ivan Delbende, maîtres de conférences de l'UPMC, en lutte contre les contre-réformes gouvernementales visant à détruire le service public d'enseignement et de recherche

Le "Bruxellateur"

Seuls les systèmes chimiques dont les réactions possèdent des mécanismes cinétiques présentant des boucles de rétroaction peuvent donner naissance à des phénomènes d'auto-organisation temporelle ou spatiale à condition qu'il soit assez loin de l'état d'équilibre. Le cas le plus simple de rétroaction est l'auto-catalyse, c'est-à-dire l'activation d'une réaction par l'un des produits qu'elle forme.



Nous étudions ici la stabilité d'une réaction chimique à deux composantes dont U et V sont les concentrations, qui varient dans le temps et dans une direction spatiale: x . Il y a aussi un paramètre de contrôle: λ .

$$\begin{aligned} U_t &= 1 - (\lambda + 1)U + 2U_{xx} + U^2V \\ V_t &= \lambda U + V_{xx} - U^2V \end{aligned}$$

1) Etat stationnaire:

- Trouver la solution stationnaire uniforme U_b, V_b de ce système, en fonction de λ (solution du système constante dans le temps et dans l'espace)
- Donner une interprétation du sens physique du paramètre λ .

2) **Linéarisation:** dériver le système d'équations qui décrivent l'évolution de perturbations de petite amplitude autour de la solution stationnaire. On notera $U = U_b + u$, $V = V_b + v$, où u et v sont les perturbations.

3) **Relation de dispersion:** on suppose un comportement en mode normal: $u = \tilde{u} \exp(st + ikx)$, $v = \tilde{v} \exp(st + ikx)$, où $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont des nombres complexes. Montrer que la relation de dispersion est:

$$s^2 + s(2 + 3k^2 - \lambda) + 1 + k^2(3 - \lambda) + 2k^4 = 0$$

4) **Etats neutres:** Nous nous intéressons aux propriétés de stabilité du système. Pour chaque couple de paramètres (k, λ) il existe deux solutions (deux modes) pour la relation de dispersion. On note $s = \sigma - i\omega$. L'état neutre correspond à $\sigma = 0$ (taux de croissance nul)

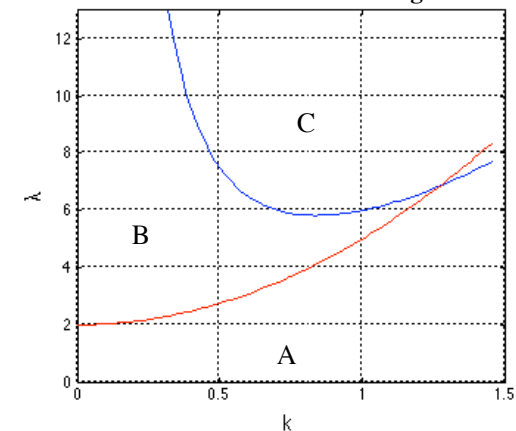
En injectant $s = -i\omega$ dans la relation de dispersion, montrer qu'on obtient deux équations, qui décrivent les courbes neutres pour un mode stationnaire et pour un mode progressif:

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\rightarrow \lambda_1 = 2k^2 + 1/k^2 + 3, && \text{Mode stationnaire} \\ \omega \neq 0 &\rightarrow \lambda_2 = 2 + 3k^2, && \text{Mode progressif} \end{aligned}$$

5) **Zones de stabilité:** Ces deux courbes sont tracées sur la figure 1.

- Pour chaque zone: A, B, C, déterminer la stabilité des deux modes (on peut pour cela évaluer la relation de dispersion pour des couples donnés (k, λ) , par exemple $k=0$, et $\lambda=0$ pour la zone A).
- En déduire la courbe neutre (à tracer sur votre copie) qui sépare les zones où tous les modes sont stables des zones où il existe un mode instable.

Figure 1

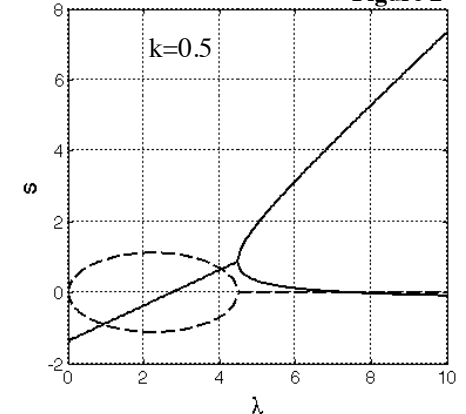


6) **Dérivées secondes:** Les chimistes écrivent en général le système sans dépendance en espace: U et V ne dépendent que du temps.

- Quel est l'effet physique modélisé par les deux termes de dérivée seconde selon x ?
- Quel est l'impact de ces termes sur la stabilité des modes?

7) **Pour $k=0.5$.** La figure 2 représente la partie réelle (ligne continue) et la partie imaginaire (ligne pointillée) des deux solutions s de la relation de dispersion lorsque λ varie. Pour λ allant de 0 à 10, décrire les changements de comportements du système: les modes sont-ils stables ou instables? progressifs ou stationnaires? ...

Figure 2



8) La figure 2 est-elle cohérente avec la figure 1?

* Tournez la page pour
la suite du sujet *

9) **Système numérique:** On considère que l'état du système, u, v , est discrétisé sur une grille de calcul, écrire les matrices E et A de la représentation du système. Ici q est le vecteur des valeurs de u et v aux points de grille.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}}_{q_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_q$$

10) **Conditions limites:** Maintenant que nous avons E et A , nous imposons des conditions limites de Dirichlet homogènes sur u et v aux deux extrémités d'un domaine fini de longueur $L=2\pi$. Représenter le système matriciel et illustrer les lignes concernées par les conditions limites, et indiquer par quoi ces lignes sont substituées.

11) **Discrétisation temporelle:** Nous voulons faire une marche en temps de ce système à partir d'une condition initiale u_0 et v_0 . Construire la matrice de marche en temps M à partir de E et A , en utilisant par exemple la méthode de Crank-Nicolson pour la discrétisation en temps. On notera h le pas de temps.

$$q^{n+1} = Mq^n$$

12) **Modes propres.** La figure 3 représente les valeurs propres (points bleus) et les vecteurs propres (u et v) du problème discrétisé sur le domaine fini de longueur 2π , pour $\lambda=4$.

- Combien y a-t'il de modes propres instables?
- Décrire la structure des vecteurs propres.

13) **Pour aller plus loin.** Comparaison des propriétés de stabilité en domaine infini (page précédente), et en domaine fini (discrétisé).

On a représenté avec des cercles rouges les solutions s de la relation de dispersion pour $\lambda=4$, $k=0.5, 1, 1.5$, et 2 . Comment expliquez-vous que les modes coïncident? (note: observer la structure des vecteurs propres en figure 3)

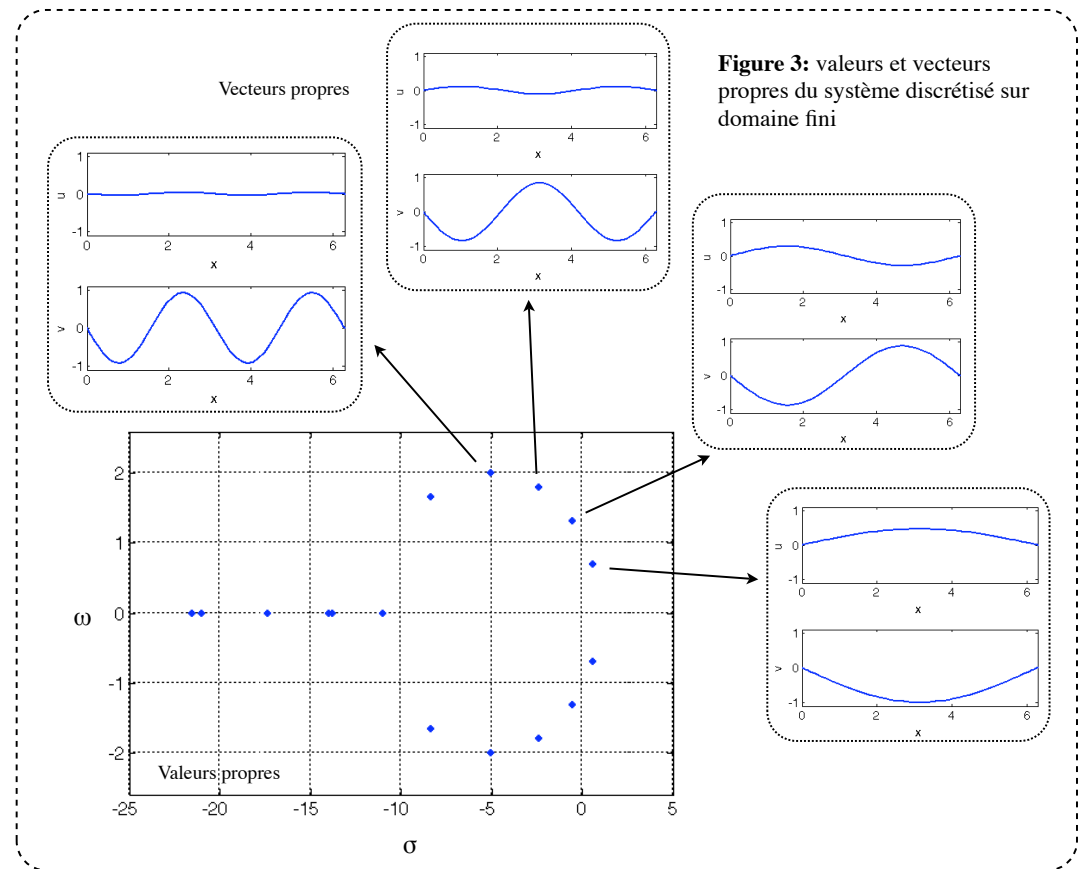


Figure 3: valeurs et vecteurs propres du système discrétisé sur domaine fini

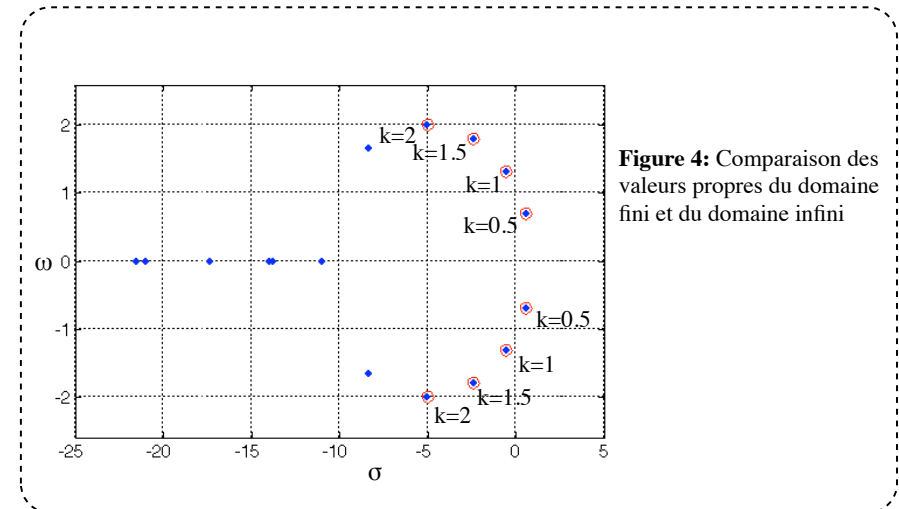


Figure 4: Comparaison des valeurs propres du domaine fini et du domaine infini

1) Etat stationnaire:a) pas de variation dans l'espace et dans le temps: $U_t = V_t = U_{xx} = V_{xx} = 0$

$$\begin{cases} 0 = 1 - (\lambda + 1)U_b + U_b^2 V_b \\ 0 = \lambda U_b - U_b^2 V_b \end{cases} \quad \text{solution: } U_b = 1, V_b = \lambda$$

b) interprétation de λ :

concentration relative à l'équilibre

2) linéarisationOn injecte $U = U_b + u$, $V = V_b + v$ dans le système et on ne garde que les termes d'ordre 1 en les petites perturbations u et v :

$$\begin{cases} u_t = (\lambda - 1)u + 2u_{xx} + v \\ v_t = -\lambda u + v_{xx} - v \end{cases}$$

exemple: $U^2 V = (U_b + u)^2 (V_b + v)$

$$= (U_b^2 + 2U_b u + u^2)(V_b + v)$$

$$= \cancel{U_b^2 V_b} + \underbrace{U_b^2 v}_{v} + \underbrace{2U_b V_b u}_{2\lambda u} + \cancel{2U_b u v} + \cancel{u^2 V_b} + \cancel{u^2 v}$$

3) DispersionOn injecte la forme en mode normal dans le système linéarisé: $u = \tilde{u} \exp(st + ikx)$
 $v = \tilde{v} \exp(st + ikx)$

$$\begin{cases} s\tilde{u} = (\lambda - 1)\tilde{u} - 2k^2\tilde{u} + \tilde{v} \\ s\tilde{v} = -\lambda\tilde{u} - k^2\tilde{v} - \tilde{v} \end{cases} \rightarrow \tilde{v} = \frac{(1 + 2k^2 + s - \lambda)\tilde{u}}{s + 1 + k^2(3 - \lambda)}$$

on réinjecte cette expression pour $\tilde{v}$

$$\rightarrow 0 = s^2 + s(2 + 3k^2 - \lambda) + 1 + k^2(3 - \lambda) + 2k^4$$

4) Etats neutresAvec $s = \sigma - i\omega$, on suppose $\sigma = 0$ et on cherche quelles sont les λ qui correspondent dans la relation de dispersion:

$$0 = -\omega^2 - i\omega(2 - \lambda + 3k^2) + k^2(3 + 2k^2 - \lambda) + 1$$

$$\begin{cases} \text{partie réelle: } \omega^2 = 1 + k^2(3 + 2k^2 - \lambda) & (1) \\ \text{partie imaginaire: } \omega(2 - \lambda + 3k^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

si $\omega = 0$ (mode stationnaire), (1) donne: $\lambda = 2k^2 + 1/k^2 + 3$ si $\omega \neq 0$ (mode propageant), (2) donne: $\lambda = 2 + 3k^2$ voici des courbes dans le plan (k, λ) pour lesquelles il existe un mode neutre.

5) Zones de stabilité

a) On évalue la relation de dispersion pour des points de chaque zone:

A: $\lambda = k = 0 : \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

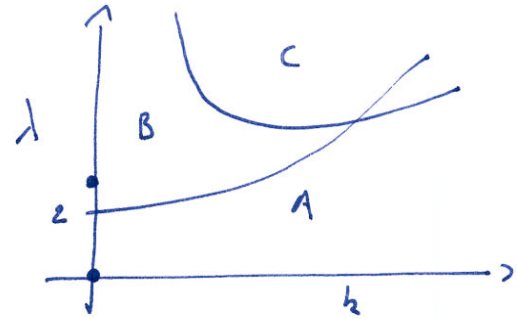
$$\rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 \quad \text{deux modes stables (ici stationnaires)}$$

B: $\lambda = 3, k = 0 : \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$
 $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

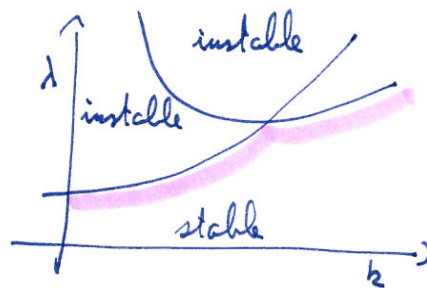
deux modes instables (ici instationnaires)

C: $\lambda = 10, k = 1 : \lambda^2 - 5\lambda - 4 = 0$
 $\lambda = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2}$

un mode stable, un mode instable (ici stationnaires)



b) La courbe neutre:



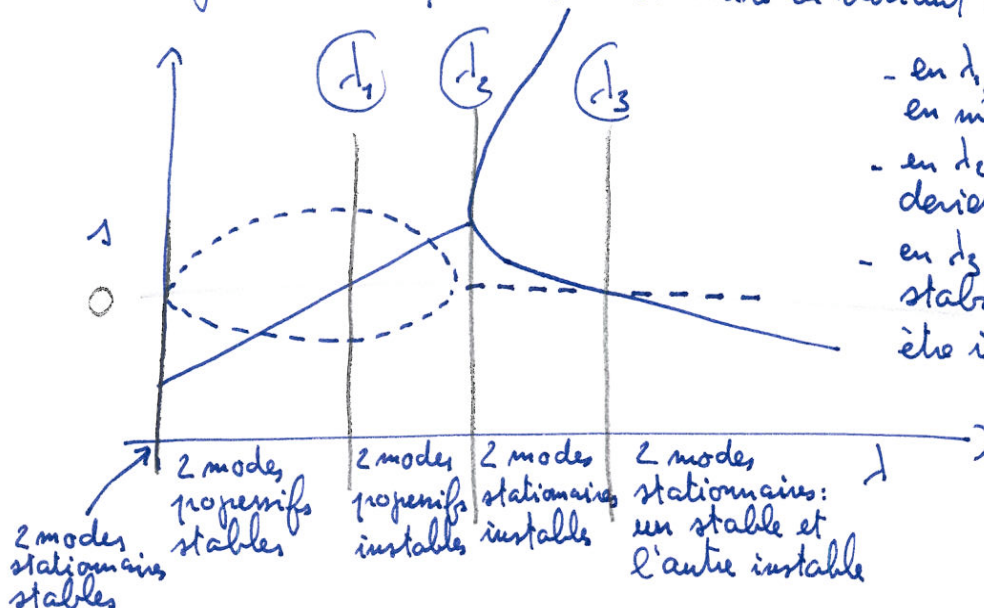
6) Dernières secondes

a) termes de diffusion en espace (comme pour la température ou pour la concentration d'un colorant ou d'une espèce chimique)

b) Impact sur la dynamique: stabilisation des solutions qui varient rapidement en espace: les modes à grand k (petite longueur d'onde) sont plus stables.

7) Pour $k = 0.5$

Changements de comportement de stabilité en variant λ :



- en λ_1 , les deux modes se destabilisent en même temps.
- en λ_2 , les deux modes instables deviennent stationnaires
- en λ_3 , un des deux modes se stabilise, l'autre continue à être instable.

2 modes stationnaires stables
 2 modes propres stables
 2 modes stationnaires instables
 2 modes stationnaires: un stable et l'autre instable

8) Figure 1 et 2 : cohérence

On voit bien qu'il y a des modes neutres pour $\lambda \approx 3,8$ et $\lambda \approx 7,5$, comme prédit en supposant $s = -i\omega$ à la question 4).

9) Système numérique

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}}_{q_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} (\lambda-1)I + 2D_{xx} & I \\ -\lambda I & D_{xx} - I \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_q$$

avec I la matrice identité et D_{xx} la matrice de dérivation pour la dérivée seconde.

10) Conditions limites

u  v  u et v sont = zero aux premier et dernier points de grille :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{q_t} \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_q \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix}$$

première et dernières lignes pour u et v substituées par des zéros.

première et dernières lignes pour u et v substituées par les lignes équivalentes de la matrice identité.

11) Discretisation temporelle:

$$E q_t = A q \rightarrow \int_t^{t+h} E q_t dt = \int_t^{t+h} A q dt$$

| l'intégrale de gauche est résolue exactement, celle de droite est approximée par la méthode des trapèzes.

$$E(q^{n+1} - q^n) \approx \left(\frac{A q^{n+1} + A q^n}{2} \right) h$$

$$\rightarrow \left(E - \frac{A h}{2} \right) q^{n+1} = \left(E + \frac{A h}{2} \right) q^n \rightarrow M = \left(E - \frac{A h}{2} \right)^{-1} \left(E + \frac{A h}{2} \right)$$

12) Modes propres

- a) 2 modes propres instables : ils ont σ positif
b) oscillations dans l'espace qui sont contraintes de satisfaire aux conditions limites : demi-longueur d'onde pour les deux modes instables, puis une longueur d'onde, puis une et demie et ainsi de suite en allant vers les modes les plus stables. u et v sont en opposition de phase : u est positif lorsque v est négatif.

13) Pour aller plus loin

On se rend compte en observant les vecteurs propres, qu'il correspondent bien à une forme de type $u: \hat{u} \exp(\sigma t + i k x)$
 $v: \hat{v} \exp(\sigma t + i k x)$, sauf que k n'est pas arbitraire, à cause des conditions limites en $x=0$ et $x=2\ell \rightarrow k$ ne peut pas avoir d'autres valeurs que $0, 5, 1, 1,5, 2, \dots$, c'est à dire $k: \frac{p}{2}, p \in \mathbb{N}$.
Pour ces valeurs, le système se comporte comme si le domaine n'était pas borné, donc la relation de dispersion que nous avons dérivée est valide.