

Liste des compétences

Pour guider vos révisions, voici une liste des compétences que vous devez avoir acquises pour passer l'examen de notre unité d'enseignement:

Compétences techniques:

- Non-dimensionaliser un système d'équation
- Définir un état de base, solution stationnaire (et éventuellement uniforme) du système d'équations.
- Linéariser un système d'équations autour de son état de base stationnaire.
- A partir de la connaissance du domaine dans lequel les variables évoluent et des conditions limites, faire la supposition de comportement harmonique dans le temps et dans l'espace (en introduisant les nombres d'ondes avec des exponentielles).

- Pour des problèmes modèles 1D obtenir la relation de dispersion et en déduire la courbe neutre dans le plan nombre d'onde/paramètre physique. Faire l'analyse du comportement du système en fonction des paramètres: ondes stables, ondes instables, système dispersif ou non-dispersif, vitesse de phase des différentes ondes du système.

- Ecrire un système d'équations sous la forme d'un problème aux valeurs propres matriciel (TD3).
- Construire une matrice de dérivation pour les dérivées première et seconde avec Matlab (TPI).
- Imposer les conditions limites et construire les opérateurs matriciel pour différents systèmes avec Matlab (TPI et 2).
- Faire la marche en temps et le calcul des modes propres dans Matlab. Comparer le résultat de la marche en temps avec les valeurs propres du problème aux valeurs propres pour bien vérifier que les deux approches donnent le même comportement.

Compétences générales:

- Donner des exemples de systèmes stables et instables en mécanique des fluides et en général (cours introductif).

Travaux dirigés et travaux pratiques:

Vous devez avoir bien compris les exercices que nous avons pratiqués ensemble. Vous avez les corrigés. Il faut que vous soyez à l'aise avec toutes ces notions. Pour l'examen, les exercices ressembleront beaucoup aux exercices que nous avons fait ensemble. Discutez entre vous, refaites les exercices, cherchez à les comprendre en profondeur.

Pour aller plus loin:

Bouquinez le livre de François Charru: Instabilités Hydrodynamiques et profitez-en pour vous construire une culture générale en mécanique des fluides et en instabilités.

T D I

Ex3

$$u_t = -g\eta_x - bu$$

$$\eta_t = -(Hu)_x$$



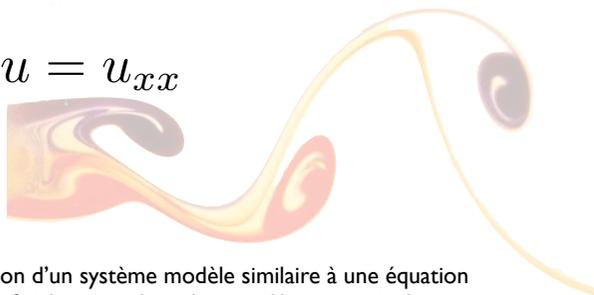
Equations de Saint-Venant.

Ce système d'équations décrit la dynamique des vagues dont la longueur d'onde est plus grande que la profondeur (houle, marées...). g est l'accélération de la gravité et H est la profondeur d'eau. La hauteur de la surface est $H+\eta$, et u est la vitesse du fluide moyennée sur la profondeur. b est le coefficient d'atténuation visqueuse, qu'on supposera tout d'abord nul.

- 1) En domaine infini, écrire la relation de dispersion. En déduire la vitesse de phase des vagues.
- 2) Quel est la relation de phase entre la déformation de l'interface η et la vitesse u ?
- 3) Mêmes questions avec b non nul.

Ex2

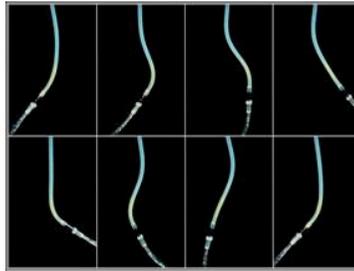
$$u_{tt} + (1 - r)u = u_{xx}$$



Zones de stabilité:

On vous donne ci dessus l'équation d'un système modèle similaire à une équation des ondes dans un domaine 1D infini. Le paramètre de contrôle est r qui pilote l'intensité de la production.

- Obtenez la relation de dispersion.
- Donnez l'équation de la courbe neutre.
- Tracez cette courbe neutre et précisez les propriétés de stabilité en fonction des zones: combien de modes, stationnaires ou propagatifs, stable ou instable...
- Donnez la vitesse de phase pour $\alpha=1, r=0$, et pour $\alpha=0, r=2$.



Ex1

Tuyau d'arrosage. On suppose un tuyau très long (infiniment), dans lequel coule un liquide non visqueux. On peut observer une instabilité dans lequel le tube se déforme sous la forme d'une onde. Deux effets physiques pilotent l'instabilité: le débit liquide et la rigidité en flexion du tube. L'image à gauche représente un cas un peu différent d'instabilité: lorsque le tube est fini et le liquide sort sous la forme d'un jet, c'est l'instabilité de l'arroseur arrosé.

- 1) Ecrire la relation de dispersion.
- 2) Dans le plan α/ξ , tracer la courbe des ondes stationnaires ($s=0$) et la courbe neutre.
- 3) Indiquez les zones instables dans ce plan.

$$f_{xxxx} + (1 - \xi)f_{xx} + 2\sqrt{\beta}f_{xt} + f_{tt} = 0$$

Ex4

$$U_t = \mu U_{xx} + \frac{1}{\tau}U(1 - U)$$

Réaction-diffusion. Ce type d'équation est un modèle simple pour les phénomènes de combustion: ici U est la température, qui diffuse dans l'espace avec un paramètre de diffusion μ positif, la réaction de combustion est modélisée par le terme non linéaire du membre droite. Le paramètre τ positif paramétrise la violence de la réaction de combustion.

- 1) Déterminer les deux états stationnaire constants. U_b1 et U_b2 .
- 2) Linéariser le système autour de chacun de ces états de base: $U=U_b+u$.
- 3) On suppose un domaine infini, écrire la relation de dispersion pour chaque état de base.
- 4) Tracer la courbe neutre dans le plan nombre-d'onde/ τ , avec μ fixé. Indiquer les zones stable et instable.

Ex5

Saint-venant. On considère maintenant l'effet de la force de Coriolis, modélisée par la constante f .

1) Dérivez la relation de dispersion pour les vagues telles que $\beta=0$. On supposera le paramètre b de dissipation visqueuse nul.

2) Tracez la variation de la vitesse de phase en fonction de α pour un f donné. b est encore nul.

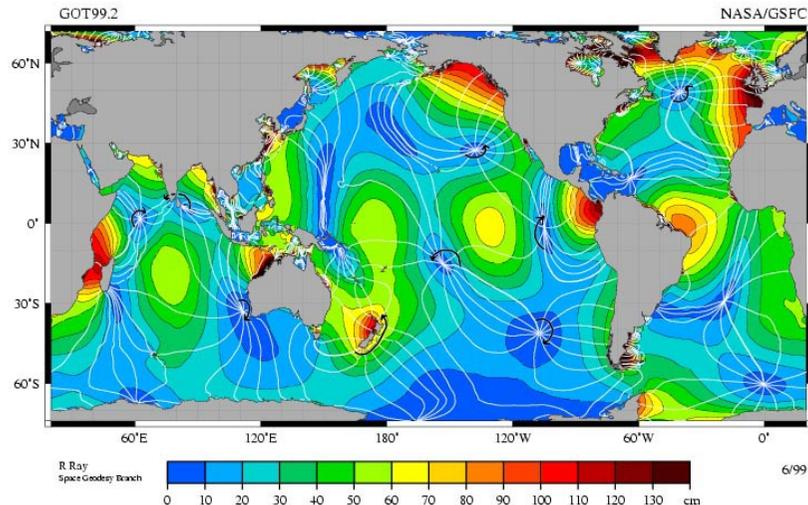
$$u(x, y, t) = \hat{u}e^{i\alpha x + i\beta y + st} + c.c.$$

$$u_t - fv = -g\eta_x - bu,$$

$$v_t + fu = -g\eta_y - bv,$$

$$\eta_t = -Hu_x - Hv_y$$

Image: calcul de la variation de hauteur d'eau due aux marées à l'échelle de la planète. Les "points amphidromiques", où se rejoignent les lignes de niveaux correspondent aux points où la hauteur reste constante, à cause des résonances avec la forme des continents et la force de Coriolis.



Ex6

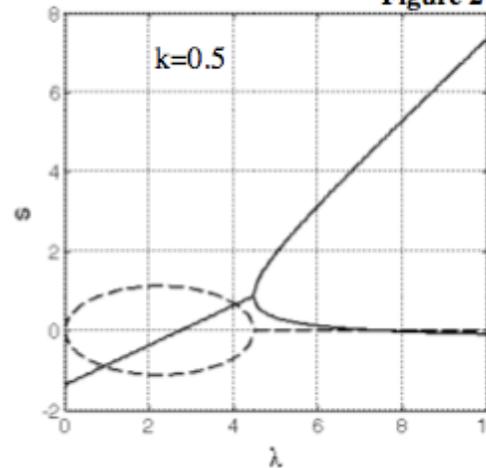


$$U_t = 1 - (\lambda + 1)U + 2U_{xx} + U^2V$$

$$V_t = \lambda U + V_{xx} - U^2V$$

Le Bruxellateur. Ce système a été rendu célèbre dans le contexte des réactions chimiques auto-catalytiques oscillantes. U et V sont les concentrations de deux composants chimiques, qui varient dans le temps et dans une direction spatiale x . λ est un paramètre chimique donné.

Figure 2



- 1) Trouver la solution stationnaire et constante U_b, V_b de ce système.
- 2) Obtenez les équations linéarisées autour de cet état de base: $U=U_b+u, V=V_b+v$.
- 3) En supposant un domaine infini, écrire la relation de dispersion.
- 4) La relation de dispersion a deux solutions: deux modes propres. La partie réelle (lignes continues) et la partie imaginaire (lignes hachurées) des deux valeurs propres sont représentées sur la figure 2 pour $k=0.5$. Décrivez les différents régimes visités lorsque λ varie: stable, instable, ondes stationnaires, ondes propagatrices...

Exercice 1

Le tuyau d'arrosage

$$\beta x x x x x + (1-\xi)\beta x x + 2\sqrt{\beta} \beta x t + \beta t t = 0$$

$$\beta(x,t) = \int e^{i\alpha x + \lambda t} + c.c.$$

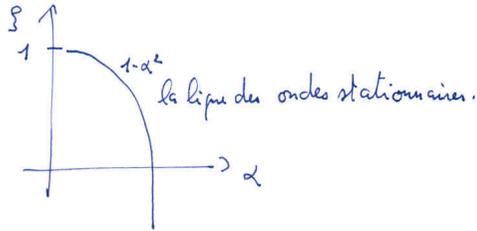
$$\rightarrow \lambda^2 + \lambda(2i\alpha\sqrt{\beta}) + \alpha^2(\alpha^2 - (1-\xi)) = 0$$

$$\text{donc } \lambda = -i\alpha\sqrt{\beta} \pm \alpha^2 \sqrt{1-\xi - \beta - \alpha^2} \star$$

ξ correspond à la tension du tube et β correspond à la vitesse du fluide dans le tuyau. Normalement une grande tension est stabilisatrice et une grande vitesse est destabilisatrice.

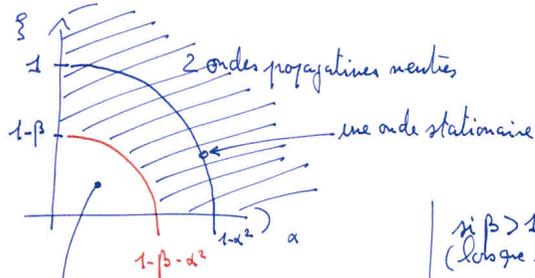
c'est la relation de dispersion.

ondes stationnaires : pas d'évolution dans le temps $\lambda = 0 \rightarrow \alpha^2(\alpha^2 - (1-\xi)) = 0$
 $\rightarrow \xi = 1 - \alpha^2$



courbe neutre : λ dépend de l'argument de la racine de \star : $1-\xi-\beta-\alpha^2$
 si c'est négatif, λ est imaginaire pur : deux ondes propagatives neutres. si c'est positif : une onde stable et une onde instable, toutes les deux de vitesse de phase $c = \pm\sqrt{\beta} \rightarrow$ ondes non dispersives.

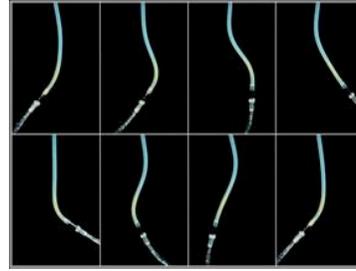
neutre : $1-\xi-\beta-\alpha^2 < 0 \rightarrow \xi > 1-\beta-\alpha^2$ on fixe une valeur de $\beta = 0,5$



une onde stable et une onde instable. Vitesse de phase $\pm\sqrt{\beta}$

si $\beta > 1$, toutes les ondes sont stables $\forall \alpha$. (lorsque la tension est grande).

Lorsque on augmente la tension, les grandes longueurs d'ondes sont les dernières à se stabiliser.



Ex2

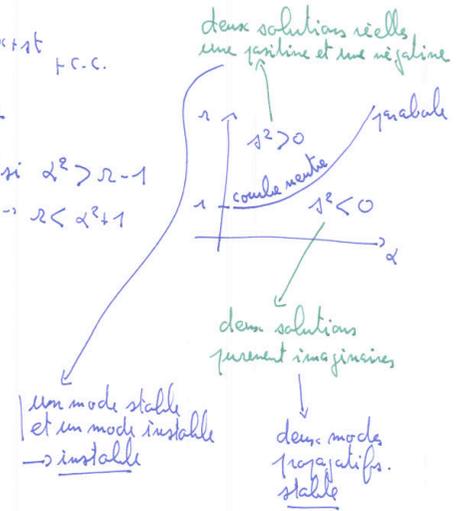
$$u_{tt} + (1-r)u = u_{xx} \quad u(x,t) = \tilde{u} e^{i\alpha x + \lambda t} + c.c.$$

1) $\lambda^2 + 1-r = -\alpha^2 \rightarrow \lambda^2 = r-1-\alpha^2$

2) courbe neutre : $r = \alpha^2 + 1$
 négatif si $\alpha^2 > r-1$
 $\rightarrow r < \alpha^2 + 1$

3) OK
 4) $\alpha=1, r=0 \rightarrow \lambda^2 = -2 \rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2}$
 vitesse de phase $c = -\frac{\lambda}{\alpha} = \pm\sqrt{2}$

$\alpha=0, r=2 \rightarrow \lambda^2 = 1 \quad \lambda = 0 \rightarrow c = 0$



un mode stable et un mode instable \rightarrow instable

deux modes propagatifs, stable

Exercice 3

$$\begin{aligned} u(x,t) &: \hat{u} e^{i\alpha x + \beta t} + c.c. \\ \eta(x,t) &: \hat{\eta} e^{i\alpha x + \beta t} + c.c. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u(x,t) \\ \eta(x,t) \end{aligned}} \right\} \begin{cases} s\hat{u} = -g i \alpha \hat{\eta} - b \hat{u} \\ s\hat{\eta} = -H i \alpha \hat{u} \end{cases} \rightarrow s^2 \hat{u} = -i \alpha g (s \hat{\eta}) - s b \hat{u}$$

1) $\rightarrow s^2 + s b + g H \alpha^2 = 0$
la relation de dispersion.

si $b=0 \rightarrow s = \pm i \alpha \sqrt{gH}$ donc la vitesse de phase: $c = \pm \sqrt{gH}$ non dispersif.

si $b \neq 0 \rightarrow s = -\frac{b}{2} \pm i \sqrt{\alpha^2 g H - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ en supposant $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < 4 \alpha^2 g H$: faible atténuation.

partie réelle négative: ondes atténuées
partie imaginaire légèrement réduite à cause de l'atténuation \rightarrow vitesse de phase réduite.

2) Rapport de phase entre u et η

$$\star \rightarrow s \hat{\eta} = -i \alpha H \hat{u}$$

$$-\frac{b}{2} \pm i \sqrt{\alpha^2 g H - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\text{donc } \hat{u} = \frac{\left(-\frac{b}{2} \pm i \sqrt{\alpha^2 g H - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \right)}{-i \alpha H} \hat{\eta}$$

la phase de ce nombre complexe donne le rapport de phase entre \hat{u} et $\hat{\eta} \in \mathbb{C}$

$$\rightarrow -\frac{i b}{\alpha H} \pm \sqrt{\frac{g}{H} - \frac{b^2}{4 \alpha^2 H^2}}$$

si $b \neq 0$ il y a un déphasage à cause du terme $-\frac{i b}{\alpha H}$

si $b=0 \rightarrow \hat{u} = \pm \sqrt{\frac{g}{H}} \hat{\eta}$

$\in \mathbb{R}$ donc u et η sont en phase ou en opposition de phase selon la direction de propagation de l'onde.



Exercice 4

$$U_t = \rho U_{xx} + \frac{1}{\sigma} U(1-U) \quad \sigma > 0$$

1) stationnaire et constant: $U_t = 0 \quad U_x = 0 \rightarrow U(1-U) = 0 \rightarrow U_0^1 = 0 \quad U_0^2 = 1$

2) linéarisation: $U = U_0 + u$

$$U_0^1: u_t = \rho u_{xx} + \frac{1}{\sigma} u(1-u) \rightarrow u_t = \rho u_{xx} + \frac{u}{\sigma}$$

u, u^2 négligeable

$$U_0^2: u_t = \rho u_{xx} + \frac{1}{\sigma} (1+u)(1-1-u) \rightarrow u_t = \rho u_{xx} - \frac{u}{\sigma}$$

$-u, u^2$ négligeable

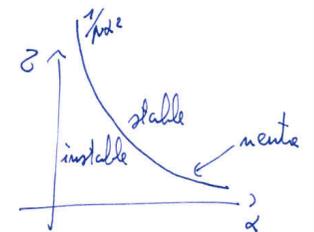
3) Relation de dispersion

$$U_0^1: s = -\rho \alpha^2 + \frac{1}{\sigma}$$

$$U_0^2: s = -\rho \alpha^2 - \frac{1}{\sigma}$$

4) U_0^1 : instable si $s > 0 \rightarrow \frac{1}{\sigma} > \rho \alpha^2 \rightarrow \sigma < \frac{1}{\rho \alpha^2}$

U_0^2 : s est toujours négatif donc le système est toujours stable.



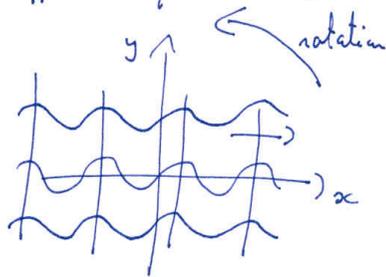
Exercice 5

Saint Venant avec la force de Coriolis.

La force de Coriolis c'est: $2\rho\omega \begin{vmatrix} v \\ -u \end{vmatrix}$ ou ρ est la densité du fluide
et ω la vitesse de rotation locale.

La vitesse de rotation locale sur la planète est nulle à l'équateur et maximum aux pôles.

on suppose $b=0$ pas de dissipation, de plus $\beta=0 \rightarrow$ les vagues sont selon x :



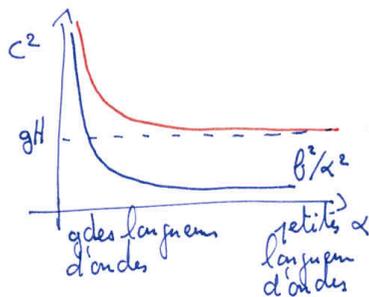
$$\begin{cases} u_t - fv = -g\eta_x - b\eta \\ v_t + fu = -g\eta_y - b\eta \\ \eta_t = -Hu_x - Hv_y \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} b=0 \\ \beta=0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} s\hat{u} - f\hat{v} = -i\alpha g\hat{\eta} \rightarrow s^2\hat{u} - sf\hat{v} = -i\alpha g(s\hat{\eta}) \rightarrow s^2\hat{u} + \beta^2\hat{u} = -\alpha^2 gH\hat{u} \\ s\hat{v} + f\hat{u} = 0 \rightarrow -sf\hat{v} = f\hat{u} \rightarrow \hat{v} = -\hat{u} \\ s\hat{\eta} = -i\alpha H\hat{u} \end{cases} \end{aligned}$$

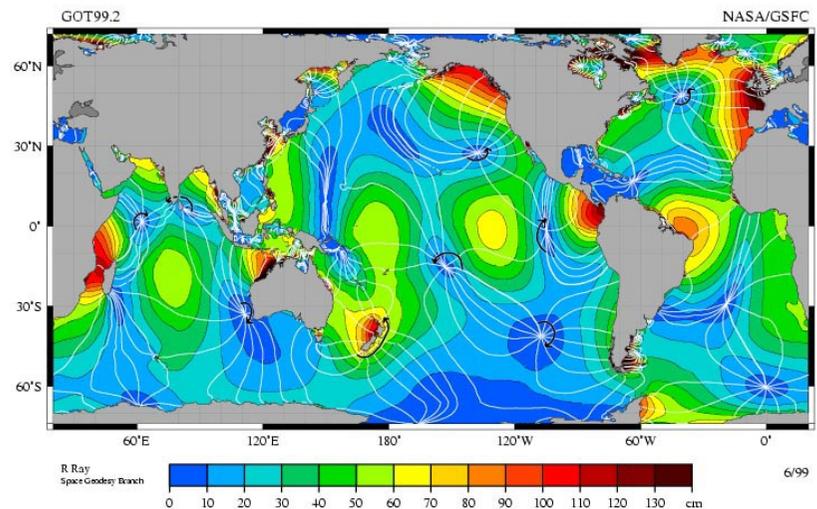
$$\Rightarrow s = \pm i \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 gH} \quad (\text{si } f=0 \text{ on retrouve } c = \pm \sqrt{gH} \text{ de l'exercice 3})$$

vitesse de phase: $c = \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + gH}$

la vitesse des vagues est plus grande que sans rotation. Ce sont maintenant des ondes dispersives à cause du terme en $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$.



pour les petites longueurs d'ondes, la rotation n'a pas d'effet, mais les vagues à grandes longueurs d'ondes vont plus vite en propagation.



Ex6

1) Etat stationnaire:

a) pas de variation dans l'espace et dans le temps: $U_{\xi} = V_{\xi} = U_{x_{\xi}} = V_{x_{\xi}} = 0$

$$\begin{cases} 0 = 1 - (\lambda + 1)U_0 + U_0^2 V_0 \\ 0 = \lambda U_0 - U_0^2 V_0 \end{cases} \text{ solution: } U_0 = 1, V_0 = \lambda$$

b) interpretation de λ :
concentration relative à l'équilibre

2) linéarisation

On injecte $U = U_0 + u$, $V = V_0 + v$ dans le système et on ne garde que les termes d'ordre 1 en les petites perturbations u et v :

$$\begin{cases} u_t = (\lambda - 1)u + 2u_{xx} + v \\ v_t = -\lambda u + v_{xx} - v \end{cases}$$

exemple: $U^2 V = (U_0 + u)^2 (V_0 + v)$

$$= (U_0^2 + 2U_0 u + u^2)(V_0 + v)$$

$$= U_0^2 V_0 + U_0^2 v + 2U_0 V_0 u + 2U_0 u v + U_0 v^2 + u^2 V_0 + u^2 v$$

ν $2\lambda u$

3) Dispersion

On injecte la forme en mode normal dans le système linéarisé: $u = \tilde{u} \exp(i\omega t + ikx)$
 $v = \tilde{v} \exp(i\omega t + ikx)$

$$\begin{cases} i\omega \tilde{u} = (\lambda - 1)\tilde{u} - 2k^2 \tilde{u} + \tilde{v} \\ i\omega \tilde{v} = -\lambda \tilde{u} - k^2 \tilde{v} - \tilde{v} \end{cases} \rightarrow \tilde{v} = \frac{(1 + 2k^2 + i\omega - \lambda)\tilde{u}}{i\omega - k^2 - 1}$$

on réinjecte cette expression pour \tilde{v}

$$\rightarrow 0 = \lambda^2 + \lambda(2 + 3k^2 - \lambda) + 1 + k^2(3 - \lambda) + 2k^4$$

4) Etats neutres

Avec $\lambda = \sigma - i\omega$ on suppose $\sigma = 0$ et on cherche quelle sont les λ qui correspondent dans la relation de dispersion:

$$0 = -\omega^2 - i\omega(2 - \lambda + 3k^2) + k^2(3 + 2k^2 - \lambda) + 1$$

$$\begin{cases} \text{partie réelle: } \omega^2 = -1 + k^2(3 + 2k^2 - \lambda) & \text{①} \\ \text{partie imaginaire: } \omega(2 - \lambda + 3k^2) = 0 & \text{②} \end{cases}$$

si $\omega = 0$ (mode stationnaire), ① donne: $\lambda = 2k^2 + 1/k^2 + 3$
si $\omega \neq 0$ (mode propulsif), ② donne: $\lambda = 2 + 3k^2$

voici des courbes dans le plan (k, λ) pour lesquelles il existe un mode neutre.

①

5) Zones de stabilité

a) On évalue la relation de dispersion pour des points de chaque zone:

A: $\lambda = k = 0: \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$\rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1 \text{ deux modes stables (ici stationnaires)}$$

B: $\lambda = 3, k = 0: \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

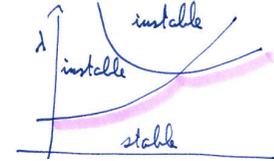
$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \text{ deux modes instables (ici instationnaires)}$$

C: $\lambda = 10, k = 1: \lambda^2 - 5\lambda - 4 = 0$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

un mode stable, un mode instable (ici stationnaires)

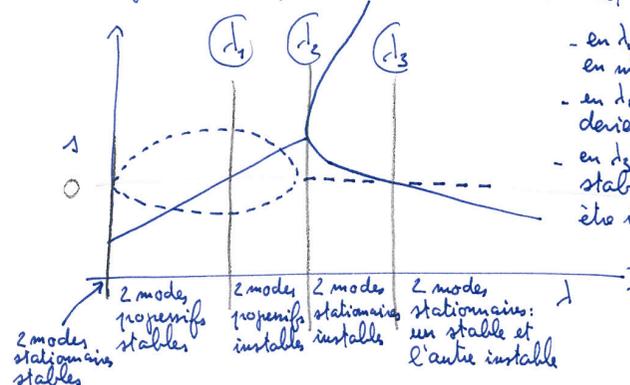
b) la courbe neutre:



②

7) Pour $k = 0.5$

Changements de comportement de stabilité en variant λ :



- en λ_1 , les deux modes se déstabilisent en même temps.
- en λ_2 , les deux modes instables deviennent stationnaires
- en λ_3 , un des deux modes se stabilise, l'autre continue à être instable.

TD2

Rayleigh-Taylor

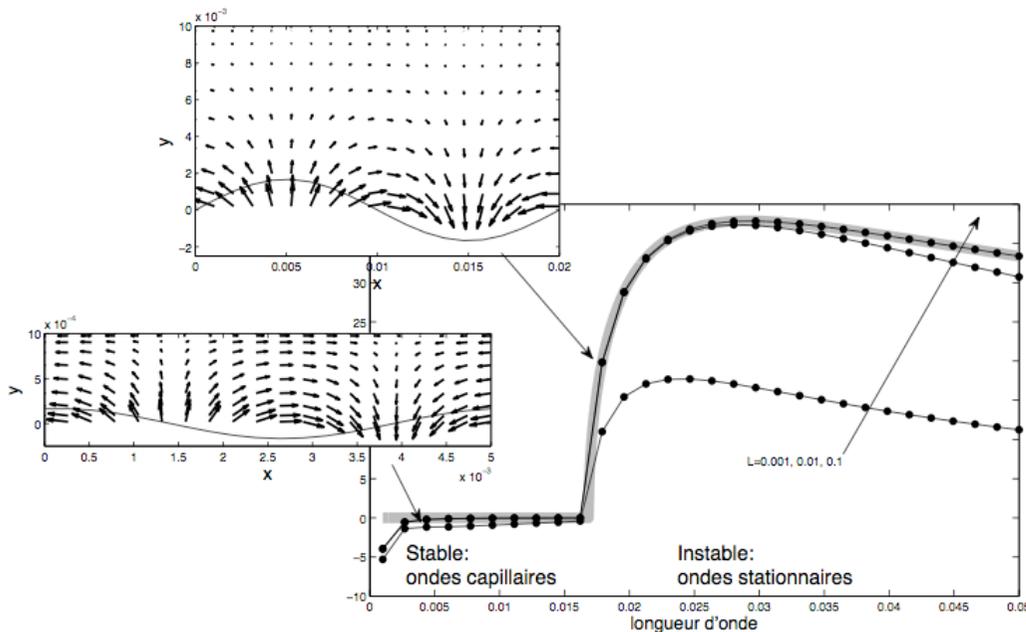
10.1 Limite non-visqueuse en domaine infini

Nous avons calculé dans la première partie de ce cours, le taux de croissance des instabilités en supposant un fluide non-visqueux dans un domaine infini (L grand). Les valeurs propres obtenues étaient

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-\gamma\alpha^3}{\rho} - \rho g\alpha}$$

Voici le graph du taux de croissance maximum pour de l'eau: tension de surface $\gamma = 0.072 \text{ J/m}^2$, viscosité $\mu = 0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$, gravitation $g = -10 \text{ m/s}^2$, dans un domaine de hauteur L variable. Le graph obtenu est le suivant:

La courbe grisée correspond au taux de croissance non-visqueux en domaine infini, et les trois autres correspondent à nos calculs pour trois hauteurs de domaine (ou de confinement) $L = 0.1, 0.01, 0.001$, c'est à dire, 10 centimètres, 1 centimètre et 1 millimètre.



Ex2

Film sur paroi inclinée:

On considère l'écoulement d'un film liquide sur une paroi inclinée comme représenté sur le croquis. Ici la gravité est le moteur du mouvement, et la viscosité s'y oppose. On peut modéliser cet écoulement avec les équations de Saint-Venant

$$H_t + (HU)_x = 0 \quad (1)$$

$$\rho(HU_t + UHU_x = -\rho H \cos(\theta)H_x - \tau + \rho g \sin(\theta)H \quad (2)$$

La première traduit la conservation du débit, et la seconde traduit la conservation de la quantité de mouvement. $H(x, t)$ est l'épaisseur du film liquide et $U(x, t)$ est la vitesse moyennée selon l'épaisseur. On impose le débit moyen $Q = UH$. ρ est la densité du fluide, et τ est le coefficient de frottement visqueux, qui s'écrit

$$\tau = 3\mu U/Q$$

ou μ est la viscosité du fluide. Nous allons étudier la stabilité de cet écoulement.

1. On impose le débit Q . Calculer la solution stationnaire uniforme U_0, H_0 en fonction des paramètres physiques du problème.
2. Le problème est décrit par deux paramètres sans dimensions, le nombre de Reynolds et le nombre de Froude :

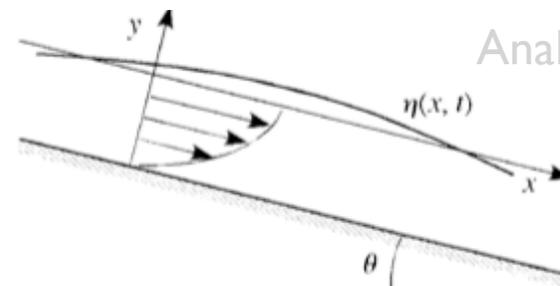
$$Re = \rho Q/\mu, \quad Fr = U_0^2/(gH_0 \cos(\theta))$$

En écrivant $U = U_0\tilde{U}, H = H_0\tilde{H}, t = (H_0/U_0)\tilde{t}, x = H_0\tilde{x}$, ou les variables avec $\tilde{\cdot}$ sont sans dimensions, obtenir les équations sans dimensions et faites apparaître les paramètres Re et Fr .

3. Ici, puisque l'écoulement est dû à la gravité, on peut écrire une relation entre Re et Fr , écrivez là.
4. Analyse de stabilité : On écrit une équation aux perturbations avec $\tilde{H} = 1 + h$ et $\tilde{U} = 1 + u$ ou h et u sont des perturbations de petite amplitude. Etablissez l'expression des équations linéarisées pour h et u .
5. On suppose le domaine infini selon la direction x , établir les équations pour les coefficients harmoniques de h et u .
6. Ecrire ce système d'équations sous la forme

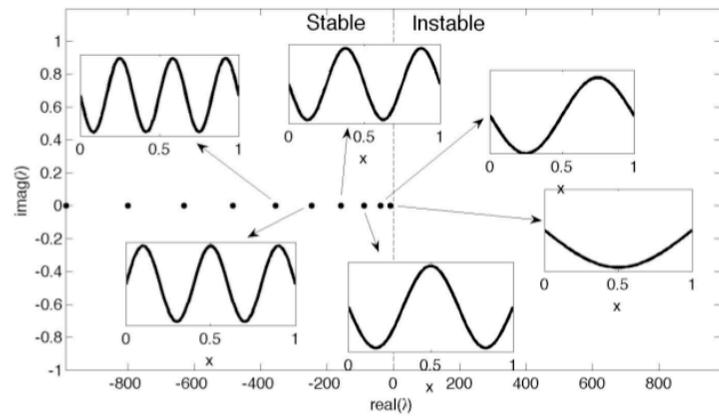
$$E \begin{pmatrix} h_t \\ u_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$$

et donner l'expression des matrices E et A .

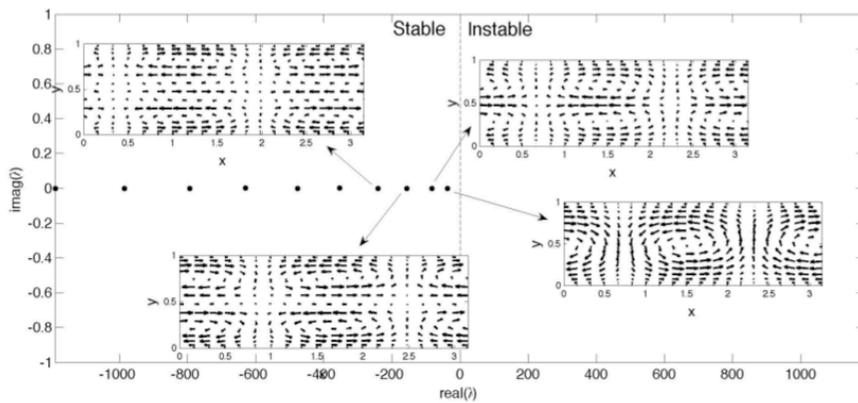


Analyse complète

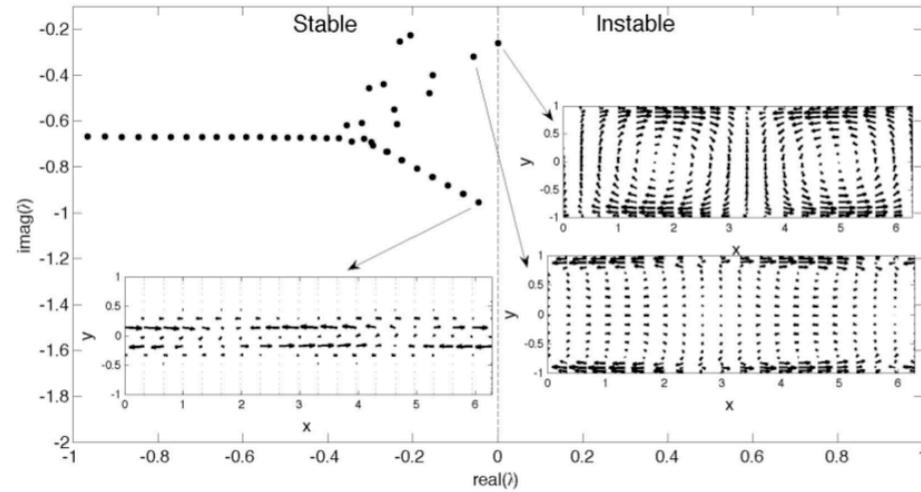
Modes propres équation de diffusion pour x entre 0 et 1



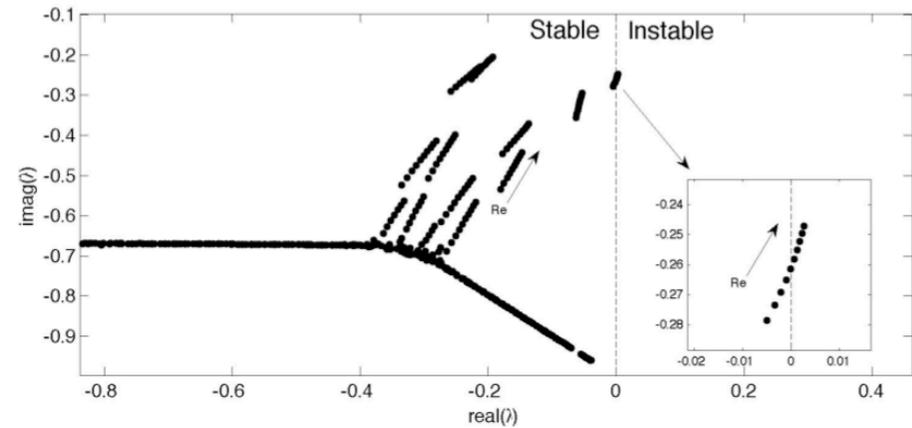
Modes propres équation de Stokes entre deux plans



Poiseuille: modes propres Navier-Stokes dans un canal plan, Re=6000

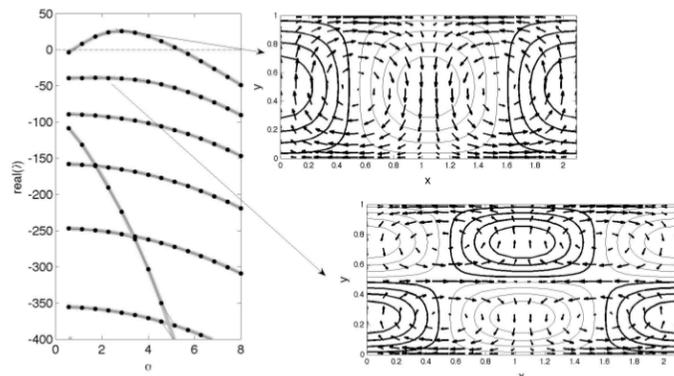


On augmente le Reynolds de 4000 à 8000:



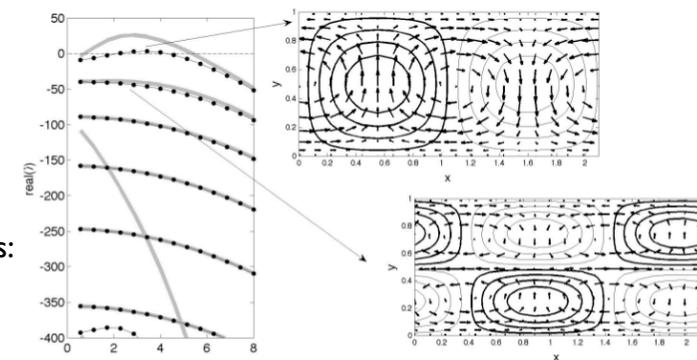
Modes propres Rayleigh-Bénard. Glissement aux parois (en gris: la solution analytique)

Pr=10, Ra=2000



$$s = -\frac{1}{2}(1 + Pr)(j^2\pi^2 + \alpha^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(Pr - 1)^2(j^2\pi^2 + \alpha^2)^2 + \alpha^2 \frac{RaPr}{j^2\pi^2 + \alpha^2}}$$

Avec non-glissement aux parois:



Stabilité hydrodynamique

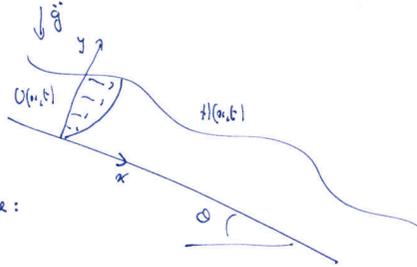
Correction examen final, 2009-2010

Dans ce corrigé (d'un ancien examen) il y en a un peu plus que dans l'exercice de TD.

Exercice 1

Voir notes de cours.

Exercice 2



1) $\partial_t \neq 0$

stationnaire & uniforme:
 $H_t = U_t = h_t = U_x = 0$

$\rightarrow \rho g \sin(\theta) H_0 - \frac{3\rho U_0^2}{Q_0} = 0 \rightarrow U_0^2 = \frac{\rho g Q_0 \sin(\theta) h_0}{3\rho}$ avec $h_0 = \frac{Q_0}{U_0}$

$U_0^3 = \frac{\rho g Q_0 \sin(\theta)}{3\rho}$

U_0 diminue si ρ augmente mais augmente si ρ diminue: équilibre entre le poids et la viscosité.

$H_0^3 = \frac{Q_0^3}{U_0^3} = \frac{3\rho Q_0}{\rho g \sin \theta}$

2) $\partial_t = 0, P = 0$

$\begin{cases} H_t + (HU)_x = 0 \\ \rho(HU_t + UHU_x) = \rho g HH_x \end{cases}$

3) $\sqrt{\frac{H_0}{g}} \rightarrow T$ un temps ; $\sqrt{\frac{H_0 g}{g}} \rightarrow LT^{-1}$ une vitesse ; $H_0 \rightarrow L$ une longueur

4) $\frac{H_0}{\sqrt{\frac{H_0}{g}}} \tilde{H}_t + \frac{H_0 \sqrt{H_0 g}}{H_0} (\tilde{H}\tilde{U})_x = 0 \rightarrow \tilde{H}_t + (\tilde{H}\tilde{U})_x = 0$

conservation du débit

$\rho \left(\frac{H_0 \sqrt{H_0 g}}{\sqrt{\frac{H_0}{g}}} \tilde{A} \tilde{U}_t + \frac{\sqrt{H_0 g}^2 h_0}{H_0} \tilde{U} \tilde{H} \tilde{U}_x \right) = -\rho g \frac{H_0^2}{h_0} \tilde{H} \tilde{H}_x$

$\rightarrow \tilde{H} \tilde{U}_t + \tilde{U} \tilde{H} \tilde{U}_x = -\tilde{H} \tilde{H}_x$

conservation de la quantité de mouvement

5) $\tilde{U} = \tilde{U}_0 + u, \tilde{H} = \tilde{H}_0 + h$

debit: $(1+h)_t + (1+h)(u)_x = 0$
 $h_t + u_x + (hu)_x = 0 \rightarrow h_t + u_x = 0$

terme quadratique

qte de P_{tot} : $(1+h)u_t + u(1+h)u_x = -(1+h)(1+h)u_x$
 $u_t + h u_t + u u_x + u h u_x = -h_x + h h_x \rightarrow u_t = -h_x$

6) $h = \hat{h}_x e^{i\alpha x + st} + c.c.$
 $u = \hat{u}_x e^{i\alpha x + st} + c.c.$

$\begin{cases} s\hat{h} + i\alpha\hat{u} = 0 \rightarrow s^2\hat{h} + i\alpha s\hat{u} = 0 \\ s\hat{u} + i\alpha\hat{h} = 0 \rightarrow i\alpha s\hat{u} = +\alpha^2\hat{h} \end{cases} \rightarrow s^2 = -\alpha^2$

relation de dispersion.

7) Ondes neutres: partie réelle de s nulle
 Ondes progressives: $s = \pm i\alpha$ vers la droite et vers la gauche.

8) Vitesse de phase: $c = -\frac{\text{Im}(s)}{\alpha} = \pm 1$ système non dispersif.
 c'est la vitesse des crêtes des ondes.

9) \tilde{c} est une vitesse $= \pm 1$ donc $c = \pm \sqrt{H_0 g}$ augmente lorsque h_0 augmente.

10) $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}; P \neq 0$

$\begin{cases} H_t + (HU)_x = 0 \\ \rho(HU_t + UHU_x) = \rho g \frac{1}{\sin \theta} H - \frac{3\rho U^2}{Q_0} \end{cases}$

3)

$$a) \frac{H_0}{U_0} \tilde{H}_E + \frac{H_0 U_0}{H_0} (\tilde{H}\tilde{U})_x = 0 \rightarrow \tilde{H}_E + (\tilde{H}\tilde{U})_x = 0$$

$$b) \rho \left(\frac{H_0 U_0}{U_0} \tilde{H}\tilde{U}_E + \frac{U_0^2 H_0}{H_0} \tilde{U}\tilde{H}\tilde{U}_x \right) = \rho g H_0 \tilde{H} - \frac{3\rho U_0^2}{\rho} \tilde{U}^2$$

$$\rightarrow \tilde{H}\tilde{U}_E + \tilde{U}\tilde{H}\tilde{U}_x = \left(\frac{g H_0}{U_0^2} \right) \tilde{H} - \left(\frac{3\rho U_0^2}{\rho} \right) \tilde{U}^2$$

$$\frac{1}{F_r} \quad \frac{3}{Re}$$

11) Stabilité

$$\tilde{U} = 1+m, \tilde{H} = 1+h$$

$$a) (1+h)_t + [(1+h)(1+m)]_x = 0 \rightarrow h_t + m_x + h_x + (mh)_x = 0$$

$$b) (1+h)(1+m)_t + (1+m)(1+h)(1+m)_x = \frac{1+h}{F_r} - \frac{3}{Re} (1+m)(1+m)$$

$$\rightarrow m_t + h m_t + m_x + h m_x + m h m_x = \frac{1}{F_r} - \frac{3}{Re} + \frac{h}{F_r} - \frac{6m}{Re} - \frac{3}{Re} m^2$$

$$\rightarrow m_t + m_x = \frac{h}{F_r} - \frac{6m}{Re}$$

$$m_t + m_x = \frac{h}{F_r} - \frac{2m}{F_r}$$

(question 12)

12) Froude et Reynolds

$$F_r = \frac{U_0^2}{g H_0}; Re = \frac{\rho U_0}{\mu}$$

$$L_0 = \frac{U_0^2 H_0^2}{\rho H_0^3} \text{ avec } H_0^3 = \frac{3\rho Q_0}{\rho g} \rightarrow F_r = \frac{\rho Q_0}{3\rho} = \frac{Re}{3}$$

$$14) \underbrace{\begin{bmatrix} i\alpha & \Delta + i\alpha \\ \Delta + i\alpha + \frac{2}{F_r} & -\frac{1}{F_r} \end{bmatrix}}_M \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0 \rightarrow -\frac{i\alpha}{F_r} - (\Delta + i\alpha)(\Delta + i\alpha + \frac{2}{F_r}) = 0$$

$$\rightarrow \frac{i\alpha}{F_r} + \Delta^2 + \Delta(i\alpha + \frac{2}{F_r} + i\alpha) + i\alpha(i\alpha + \frac{2}{F_r}) = 0$$

$$\rightarrow \Delta^2 + \Delta(2i\alpha + \frac{2}{F_r}) + i\alpha(i\alpha + \frac{2}{F_r}) = 0$$

15) Pour tous les α représentés, la partie réelle des deux modes s_1 et s_2 est négative \rightarrow système stable. Entre $\alpha = 0$ et $\alpha \approx 1,5$, nous avons deux modes qui ont la même vitesse de phase positive: $c = -\frac{\text{Im}(s)}{\alpha}$. Un des deux modes est atténué et l'autre moins.

Pour $\alpha > 1,5$, les deux modes ont la même taux d'atténuation mais des vitesses de phases différentes.

Si le système était non dissipatif, on aurait $\frac{\text{Im}(s)}{\alpha} = \text{cte} \rightarrow \text{Im}(s) = \text{cte} \times \alpha$ ce qui n'est pas le cas.

13) dispersion

$$\begin{cases} s\hat{h} + i\alpha\hat{u} + i\alpha\hat{h} = 0 \\ s\hat{u} + i\alpha\hat{u} = \frac{h}{F_r} - \frac{2\alpha}{F_r} \end{cases} \rightarrow \underbrace{\Delta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_E \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{h} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} i\alpha & i\alpha \\ i\alpha + \frac{2}{F_r} & -\frac{1}{F_r} \end{bmatrix}}_{-A} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

T D 3

Écriture du problème de stabilité sous la forme TDS d'un problème aux valeurs propres!

1) Navier-Stokes sans inertie, linéarisé

$$\begin{cases} \rho u_t = -\rho_x + \mu \Delta u \\ \rho v_t = -\rho_y + \mu \Delta v \\ u_x + v_y = 0 \end{cases} \quad u(x,y,t) = \hat{u}(y) e^{i\alpha x + \lambda t} + c.c. \\ v = \hat{v}(y) e^{i\alpha x + \lambda t} + c.c. \\ p = \hat{p}(y) e^{i\alpha x + \lambda t} + c.c.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \rho I & 0 & 0 \\ 0 & \rho I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u}_t \\ \hat{v}_t \\ \hat{p}_t \end{pmatrix}}_{\hat{q}_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu(-\alpha^2 + D^2) & 0 & -i\alpha I \\ 0 & \mu(\alpha^2 + D^2) & -D \\ i\alpha I & D & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix}}_{\hat{q}}$$

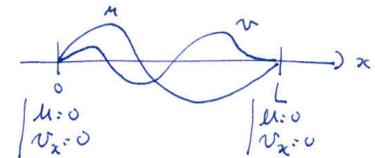
conditions aux limites:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & I_N \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix}}_{\hat{q}} = 0$$

I matrice identité
D matrice de dérivation
D matrice dérivée seconde
 $\hat{q}_t = \lambda \hat{q}$

3) Le Brusselateur

$$\begin{cases} U_t = -\lambda(U+1)U + 2UV_{xx} + U^2V \\ V_t = \lambda U + V_{xx} - U^2V \end{cases}$$



linéarisé:

$$\begin{cases} u_t = (\lambda-1)u + 2u_{xx} + v \\ v_t = -\lambda u + v_{xx} - v \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} e^{i\alpha x + \lambda t} + c.c.$$

$$\begin{cases} \lambda \hat{u} = (\lambda-1)\hat{u} + 2D^2\hat{u} + \hat{v} \\ \lambda \hat{v} = -\lambda\hat{u} + D^2\hat{v} - \hat{v} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}}_{\hat{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} (\lambda-1)I + 2D^2 & I \\ -\lambda I & D^2 - I \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}}_{\hat{q}}$$

conditions limites:

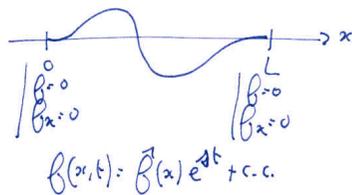
$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ I_N & 0 \\ 0 & D_1 \\ 0 & D_N \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}}_{\hat{q}} = 0$$

2) Le tuyen d'erosage

$$\beta_{xxx} + (\tau-\beta)\beta_{xx} + 2\sqrt{\beta}\beta_{xt} + \beta_{tt} = 0$$

j'écris $g = \beta_t$ (donc $g_t = \beta_{tt}$)

$$\begin{cases} D^3\hat{\beta} + (\tau-\beta)D^2\hat{\beta} + 2\sqrt{\beta}D\hat{\beta} + \hat{g} = 0 \\ \hat{g} = \lambda\hat{\beta} \end{cases}$$



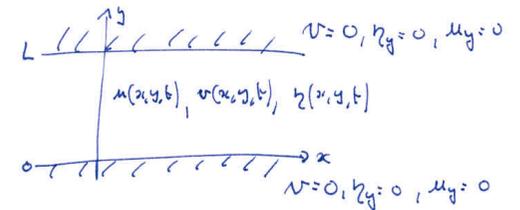
$$\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} I, 2\sqrt{\beta}D \\ 0, I \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{g} \end{pmatrix}}_{\hat{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0, -D^3 - (\tau-\beta)D^2 \\ I, 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{g} \end{pmatrix}}_{\hat{q}}$$

conditions aux limites:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0, I_1 \\ 0, I_N \\ 0, D_1 \\ 0, D_N \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{g} \end{pmatrix}}_{\hat{q}} = 0$$

4) Saint Venant avec Coriolis

$$\begin{cases} u_t - \beta v = -g\eta_x - b u \\ v_t + \beta u = -g\eta_y - b v \\ \eta_t = -b u_x - b v_y \end{cases}$$



$$\begin{cases} u(x,y,t) = \hat{u}(y) e^{i\alpha x + \lambda t} \\ v(x,y,t) = \hat{v}(y) e^{i\alpha x + \lambda t} \\ \eta(x,y,t) = \hat{\eta}(y) e^{i\alpha x + \lambda t} \end{cases}$$

$$\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix}}_{\hat{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -bI & \beta I & -g\alpha I \\ -\beta I & -bI & -gD \\ -i\alpha H I & -H D & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix}}_{\hat{q}}$$

conditions limites:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 \\ D_N & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & D_N \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix}}_{\hat{q}} = 0$$

TP I

Stabilité Hydrodynamique. MSF21

J. Hoepffner & P. Carlès

Université Pierre et Marie Curie.
TPI, année 2010-2011.

Ex4

Modes propres diffusion

Ecrivez un code qui fait la marche en temps de l'équation de la chaleur (équation de diffusion) en prenant comme condition initiale une portion de sinus qui satisfasse les conditions aux limites de Dirichlet homogène. Et tracer l'évolution dans le temps de l'amplitude maximum pour comparer avec le taux d'atténuation du mode propre calculé à l'exercice 3

Les scripts que j'ai codés pendant le début du TP

```
% modes propres corde vibrante
Z=zeros(N,N); % matrice de zéros
I=eye(N); % matrice identité

% les opérateurs
E=[I,Z; Z,I];
F=[Z,I; c^2*dx, Z];

% conditions limites
E(N+1,:)=0; E(2*N,:)=0;
F(N+1,:)=Z(1,:),I(1,:);
F(2*N,:)=Z(N,:),I(N,:);

% calcul des modes propres
[U,S]=eig(F,E);
S=diag(S);
plot(real(S),imag(S),'k.')
grid on
```

Ex1

Matrice de dérivation

Ecrivez un code qui teste la matrice de dérivation pour la dérivée seconde.

Ex2

Marche en temps

Ecrivez un code qui effectue la marche en temps d'une condition initiale pour l'équation des ondes sur un domaine de taille $L=1$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène. Vous choisirez la condition initiale que vous voudrez (mais elle doit satisfaire les conditions aux limites!) Attention, il faut définir la condition initiale pour la position de la corde mais aussi pour la vitesse initiale de la corde.

Ex3

Modes propres

Ecrivez un code qui calcule les valeurs propres pour l'équation de diffusion sur un domaine de taille $L=1$. Montrer que les valeurs propres calculées correspondent bien aux valeurs théoriques obtenues de manière similaire à ce que nous avons fait pour la corde vibrante.

```
% construction des matrices de dérivation
N=50; % nombre de points de maille
L=2*pi; % taille du domaine
x=linspace(0,L,N); % les mailles
h=x(2)-x(1); % pas d'espace

% dérivée première
dx=zeros(N,N);
dx(1,1:3)=[-3/2, 2, -1/2]/h;
for ind=2:N-1
    dx(ind,ind-1:ind+1)=[-1/2, 0, 1/2]/h;
end
dx(end,end-2:end)=[1/2, -2, 3/2]/h;

% dérivée seconde
dxx=zeros(N,N);
dxx(1,1:3)=[1, -2, 1]/h^2;
for ind=2:N-1
    dxx(ind,ind-1:ind+1)=[1, -2, 1]/h^2;
end
dxx(end,end-2:end)=[1, -2, 1]/h^2;
```

Cette séance est une séance de prise en main numérique, les trois exercices donnés ici vous permettent de tester par vous même ce que je vous ai montré pendant la première partie de la séance.

Tracez des graphiques, regardez vos matrices pour un petit nombre de mailles N pour vérifier que tout est bien codé. Ayez une pratique progressive du codage, en allant du plus simple au plus sophistiqué, en faisant des étapes.

```
% marche en temps advection diffusion
U=1 % vitesse d'advection
mu=1 % diffusion visqueuse

Z=zeros(N,N); % matrice de zéros
I=eye(N); % matrice identité

dt=0.05; % pas de temps

% Les opérateurs
E=I;
F=-U*dx+mu*dxx;

% Les conditions limites
E(1,:)=0; E(N,:)=0;
F(1,:)=I(1,:); F(N,:)=I(N,:);

% Matrice de marche en temps
M=(E-F*dt/2)\(E+F*dt/2);

% Condition initiale
q=exp(-(x-2)/0.5).^2;

% Boucle de marche en temps
for ind=1:200
    q=M*q;

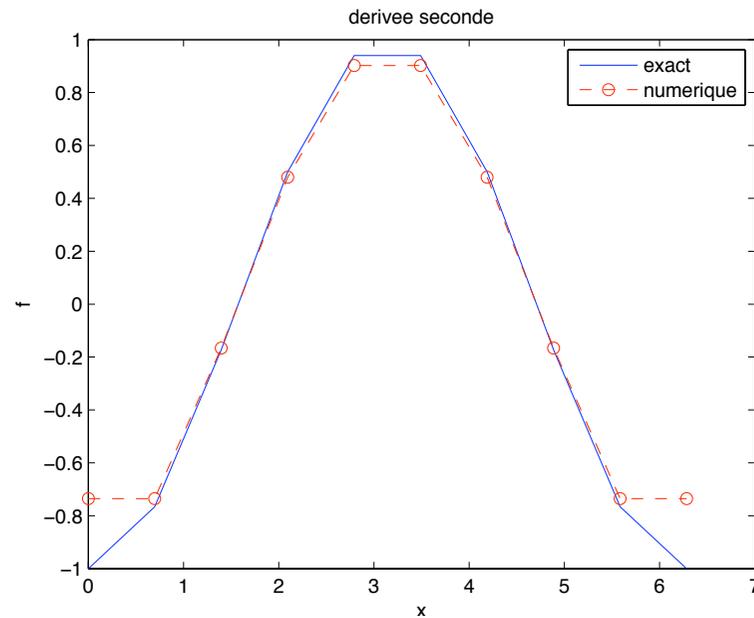
    plot(x,q);
    ylim([-1,1])
    drawnow
end
```

Ex I

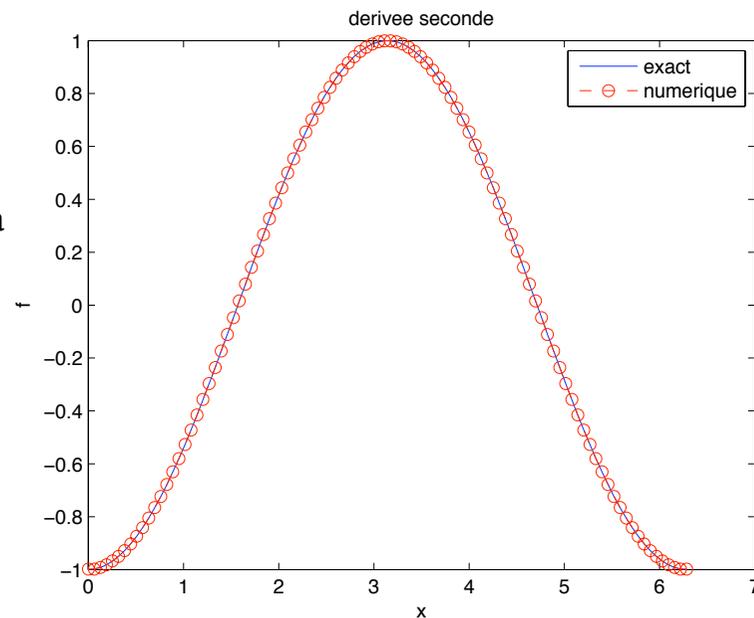
Matrice de dérivation

Ecrivez un code qui teste la matrice de dérivation pour la dérivée seconde.

Ici avec dix points de maille



Ici avec 100 points de maille. La correspondance entre la dérivée exacte et la dérivée calculée avec la matrice de dérivation est très bonne.



```
% test de la dérivée seconde

% construction des matrices de dérivation
N=100; % nombre de points de maille
L=2*pi; % taille du domaine
x=linspace(0,L,N); % les mailles
h=x(2)-x(1); % pas d'espace

% dérivée première
dx=zeros(N,N);
dx(1,1:3)=[-3/2, 2, -1/2]/h;
for ind=2:N-1
    dx(ind,ind-1:ind+1)=[-1/2, 0, 1/2]/h;
end
dx(end,end-2:end)=[1/2, -2, 3/2]/h;

% dérivée seconde
dxx=zeros(N,N);
dxx(1,1:3)=[1, -2, 1]/h^2;
for ind=2:N-1
    dxx(ind,ind-1:ind+1)=[1, -2, 1]/h^2;
end
dxx(end,end-2:end)=[1, -2, 1]/h^2;

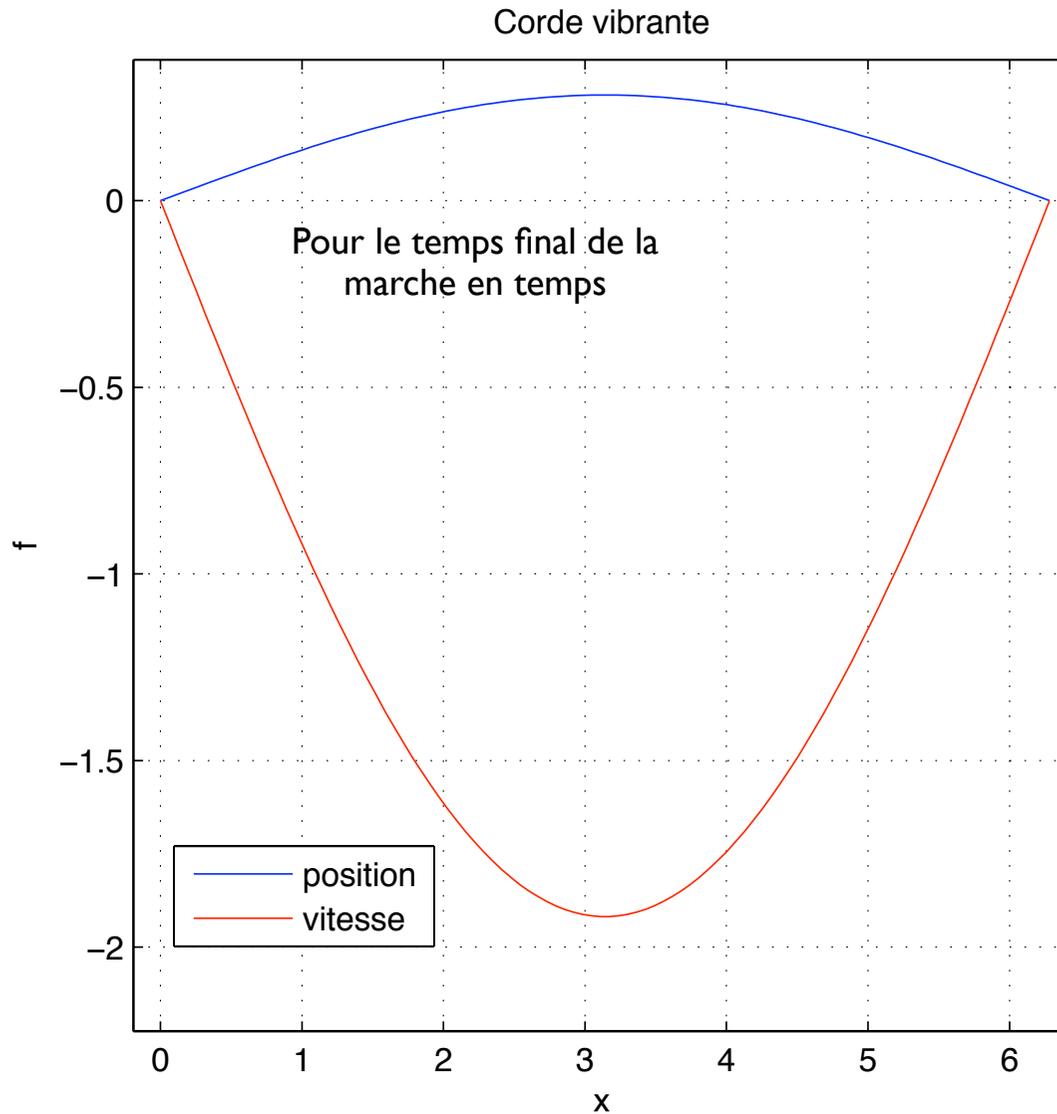
f=cos(x)';
fxx=-cos(x);
fdd=dxx*f;

plot(x,fxx,'b',x,fdd,'ro--');
legend('exact','numerique')
title('dérivée seconde')
xlabel('x');
ylabel('f')
```

Ex2

Marche en temps

Ecrivez un code qui effectue la marche en temps d'une condition initiale pour l'équation des ondes sur un domaine de taille $L=1$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène. Vous choisirez la condition initiale que vous voudrez (mais elle doit satisfaire les conditions aux limites!) Attention, il faut définir la condition initiale pour la position de la corde mais aussi pour la vitesse initiale de la corde.



```
% corde vibrante
Z=zeros(N,N); % matrice de z?ros
I=eye(N); % matrice identit?e

% les op?rateurs
c=1;
E=[I,Z; Z,I];
F=[Z,I; c^2*dxx,Z];

% conditions limites
E(N+1,:)=0;
E(2*N,:)=0;
F(N+1,:)=[Z(1,:),I(1,:)];
F(2*N,:)=[Z(N,:),I(N,:)];

% marche en temps corde vibrante
U=1 % vitesse d!-F?advection!-A
mu=1 % diffusion visqueuse
Z=zeros(N,N); % matrice de z?ros
I=eye(N); % matrice identit?e
dt=0.05; % pas de temps

% Matrice de marche en temps
M=(E-F*dt/2)\(E+F*dt/2);

% Condition initiale
q=[zeros(N,1); sin(pi*x/L)'];

% Boucle de marche en temps
for ind=1:200
    q=M*q;
    plot(x,q(N+1:end),'b',x,q(1:N),'r');
    ylim([-1,1])
    drawnow
end
legend('position','vitesse')
title('Corde vibrante')
xlabel('x');
ylabel('f')
```

Ex3

Modes propres

Ecrivez un code qui calcule les valeurs propres pour l'équation de diffusion sur un domaine de taille $L=1$. Montrer que les valeurs propres calculées correspondent bien aux valeurs théoriques obtenues de manière similaire à ce que nous avons fait pour la corde vibrante.

```
% Les opérateurs
U=0; % vitesse d'advection
mu=1 % parametre de diffusion

E=I;
F=-U*dx+mu*dxx;

% Les conditions limites
E(1,:)=0; E(N,:)=0;F(1,:)=I(1,:); F(N,:)=I(N,:);

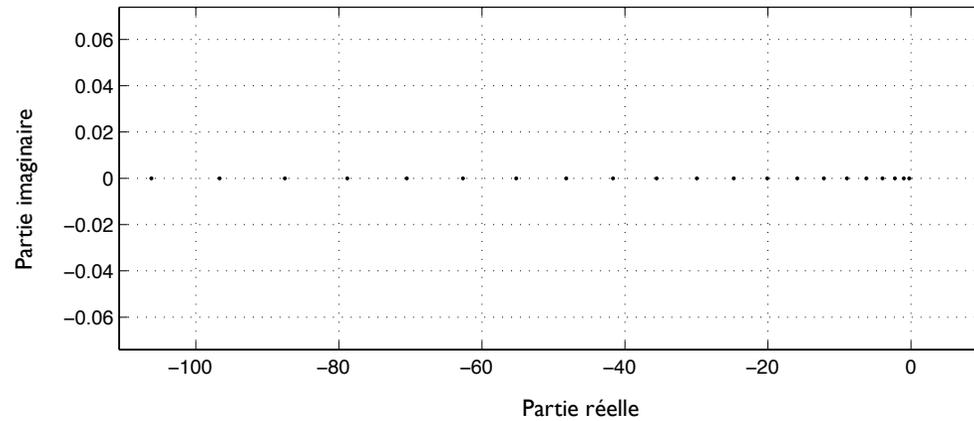
% calcul des modes propres
[U,S]=eig(F,E);
S=diag(S);

% on selectionne et on met dans l'ordre
sel=real(S)<0; S=S(sel); U=U(:,sel);
[t,o]=sort(-real(S));
S=S(o);U=U(:,o);

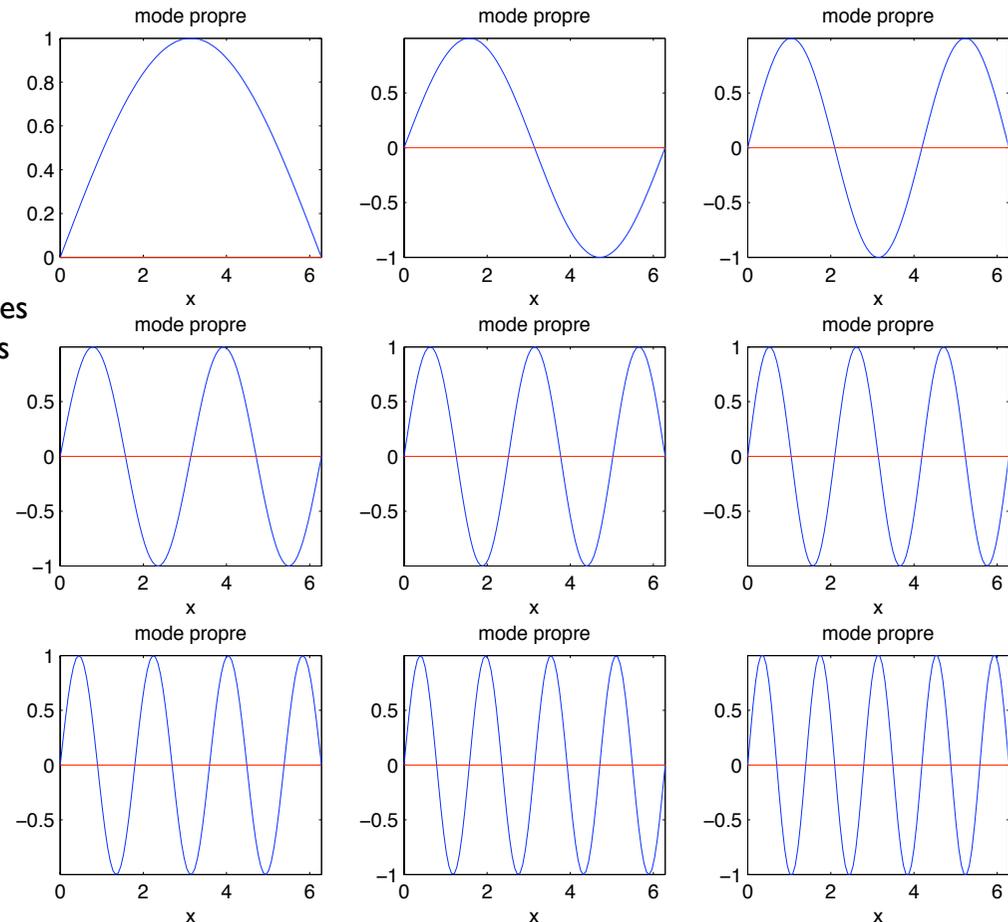
figure(1)
% on trace les valeurs propres
plot(real(S),imag(S),'k.')
grid on

figure(2)
for ind=1:9
subplot(3,3,ind);
plot(x,real(U(:,ind)),'b',x,imag(U(:,ind)),'r');
axis tight
title('mode propre')
xlabel('x');
end
```

Les valeurs propres



Les neuf premières fonctions propres



Ex4

Modes propres diffusion

Ecrivez un code qui fait la marche en temps de l'équation de la chaleur (équation de diffusion) en prenant comme condition initiale une portion de sinus qui satisfasse les conditions aux limites de Dirichlet homogène. Et tracer l'évolution dans le temps de l'amplitude maximum pour comparer avec le taux d'atténuation du mode propre calculé à l'exercice 3

```
% Les opérateurs
U=0; % vitesse d'advection
mu=1 % parametre de diffusion

I=eye(N); % matrice identité
E=I;
F=-U*dx+mu*dxx;

% Les conditions limites
E(1,:)=0; E(N,:)=0;F(1,:)=I(1,:); F(N,:)=I(N,:);

% la condition initiale
q=sin(7*x*pi/L)';

% Matrice de marche en temps
dt=0.05; % pas de temps
M=(E-F*dt/2)\(E+F*dt/2);

% Boucle de marche en temps
figure(1)

n=200
mem=zeros(n,1); % pour memoriser
tvec=dt:dt:n*dt;
for ind=1:n
    q=M*q;
    plot(x,q,'b')
    mem(ind)=q(10); % on memorise
    ylim([-1,1]); xlim([0,L])
    drawnow
end
figure(2)
semilogy(tvec,mem)
grid on

title('Chaleur')
xlabel('t');
ylabel('f')
```

Voici l'évolution dans le temps de l'amplitude de la variable à la position 10 sur la grille pour les différents modes. On voit bien que plus la longueur d'onde est faible plus l'atténuation est rapide. On peut mesurer la pente exponentielle de cette atténuation et la comparer avec la théorie.

