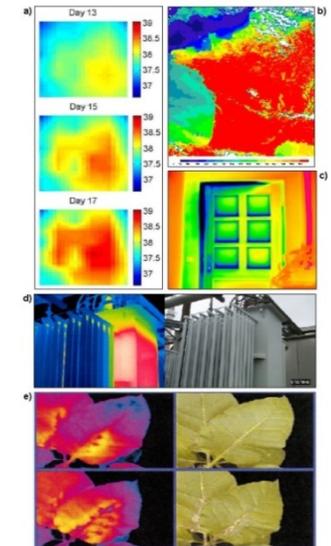


Thermique

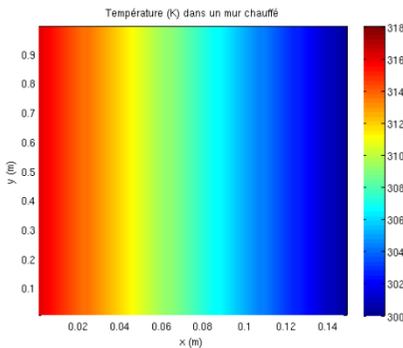


Conduction de la chaleur : Les transferts de chaleur sont omniprésents dans la nature et dans les procédés industriels. La mesure de température par thermographie infrarouge s'est récemment développée (certaines applications en sont présentées sur la photo ci-contre). On obtient ainsi des cartographies en couleur indiquant les zones chaudes (en rouge habituellement) et les zones plus froides (en bleu). La conduction de la chaleur est un des mécanismes fondamentaux du transfert de chaleur. L'objectif de ce projet est de comprendre ce mécanisme en analysant des champs de température donnés (résultant ici de calculs numériques).

Tout milieu matériel conduit la chaleur. La loi fondamentale, établie par Fourier (1822) stipule que le flux de chaleur par unité de surface, mesuré en $J \cdot m^{-2}$, est proportionnel au gradient de température $\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T$. La température se mesure en Kelvin (K). Le coefficient de proportionnalité λ (en $J \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$) est la conductivité thermique, qui est caractéristique du milieu (fluide, solide).



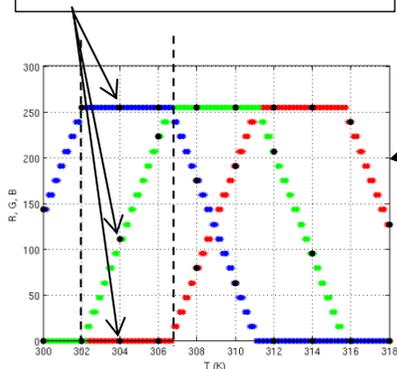
Applications de la thermographie, **a)** Suivi de l'incubation d'œufs, **b)** Cartographie des températures de surface, **c)** Détection d'une fuite d'air frais à l'intérieur d'une résidence en hiver, **d)** Suivi du niveau d'huile dans un transformateur, **e)** Détection de maladie des feuilles.
<http://theses.ulaval.ca/archimede/fichiers/22198/ch02.html>



1ère partie : Conduction stationnaire.

- (a)** L'image cond_mur_brique.tif montre le champ de température à l'équilibre dans un mur de briques d'épaisseur $e = 15 \text{ cm}$, et de hauteur très grande (seulement 1m montré sur l'image) de conductivité thermique λ inconnue, chauffé à son extrémité gauche avec une densité de flux de chaleur égale à 100 W/m^2 . A partir de mesures sur l'image, et en utilisant l'échelle de couleurs figurant sur l'image, montrez que le gradient de température est constant et trouvez la température à la paroi chaude. Le premier principe de la thermodynamique montre que, à l'équilibre, la densité de flux de chaleur à travers le mur est égale à celle imposée par le chauffage. Trouvez la valeur du coefficient λ .
- (b)** L'image plaque_stat.tif montre la température à l'équilibre dans un barreau de section carrée de $L=15 \text{ cm}$ de côté, maintenu à la température 290 K sur ses faces droite et basse, et porté sur ses faces gauche et haute à 300 K . Tracer 3 profils de température, à mi-hauteur, au quart et trois-quarts de la hauteur.

Les ronds noirs indiquent les valeurs de (R,G,B) des points pour lesquels la température est indiquée sur l'échelle. Ici, par exemple, les valeurs pour $T=304 \text{ K}$



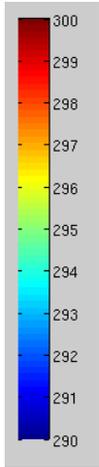
Exploitation d'une image en couleurs. Après avoir lu l'image A par *imread*, vous obtenez un tableau A qui pour chaque pixel de l'image contient un triplet d'entiers (R,G,B) compris entre 0 et 255, indiquant la proportion de rouge, vert et bleu du pixel. On va exploiter l'échelle de couleurs qui figure sur l'image pour construire la fonction qui permet de passer du triplet (RGB) à la valeur de la température (étalonnage de l'échelle de couleurs).

Pour cela, repérer par étiquetage sur l'image les coordonnées (x_r, y_r) de n_r points le long de l'échelle de couleurs. Utiliser *impixel* (similaire à *ginput*) pour faire l'acquisition des triplets RGB le long de ce vecteur. On recommande une utilisation « noninteractif » de *impixel* : `echelle=impixel(A,xr,yr)` permet, pour deux vecteurs x_r, y_r de même longueur n_r , de remplir le tableau *echelle* à n_r lignes et 3 colonnes (une pour R, une pour G, une pour B).

Effectuer les transformations nécessaires (l'échelle est linéaire), pour tracer les composantes R, G, B en fonction de la température. Ensuite, superposer les points correspondant aux valeurs de la température qui sont indiquées sur l'échelle (indication, ces points sont régulièrement espacés).

Ensuite, écrivez une fonction matlab (utiliser l'aide pour comprendre ce que sont des arguments d'entrée et de sortie), pour écrire la bijection entre un triplet (RGB) et la température correspondante.

Par exemple, si $B=255$, on remarque que la température varie linéairement avec la valeur de G. Les triplets correspondant à $T=304 \text{ K}$ et $T=306 \text{ K}$ sont dans cette zone. On remarque aussi que toutes les droites ont la même pente (positive ou négative). Il suffit de la calculer une fois! La loi linéaire pour chaque zone est donc simple à déterminer.



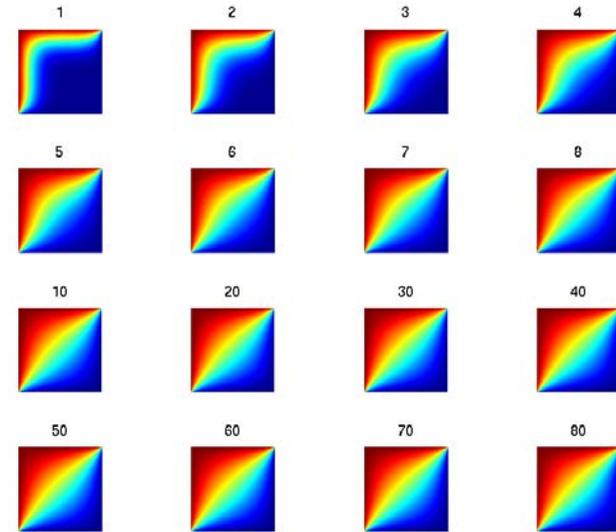
2^{ème} partie : Conduction instationnaire. Dans ce cas, la propriété physique caractéristique du matériau pour la conduction est la diffusivité thermique $\kappa = \lambda / (\rho c_p)$ en $m^2 \cdot s^{-1}$, où ρ est la masse volumique, et c_p la chaleur massique.

(a) Temps caractéristique. L'image plaque_instat.png (image multiple) montre l'évolution du champ de température dans un barreau de section carrée de $L=15cm$ de côté. La diffusivité thermique du matériau est $\kappa = 21 mm^2 \cdot s^{-1}$. Le barreau est initialement à la température $290K$, maintenu à la température $290K$ sur ses faces droite et basse, et porté sur ses faces gauche et haute à la température $300K$. Le numéro de l'image est indiqué, et les images sont montrées toutes les $20s$. La première image correspond à $t=20s$. L'échelle de couleurs est la même pour toutes les images et est fournie dans le fichier couleurs_plaque.png.

A partir de prises de mesures sur chaque image, montrer comment varie la forme de l'isotherme $295K$ en fonction du temps.

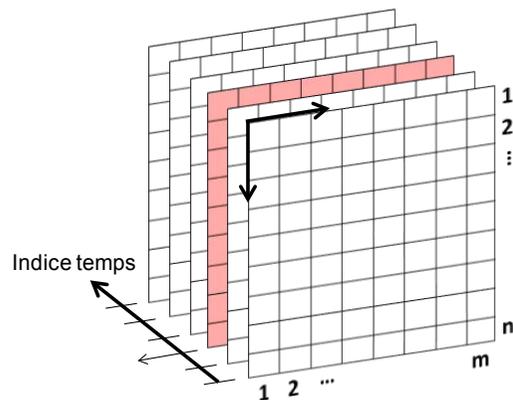
Tracer l'évolution de la température en fonction du temps pour plusieurs points choisis.

Montrer que cette évolution suit une loi exponentielle, et tester une loi en $\exp(-Kt/\tau)$ avec $\tau = L^2/\kappa$.



stockage d'un film

Les images sont stockées sous la forme de matrices contenant la couleur de chaque pixel contenu dans l'image. Le film est une succession d'images dans le temps, il peut être stocké en couleurs au moyen d'une matrice à 6 indices.



Les 2 premiers indices font référence à la position du pixel (ind_lig, ind_col), comme dans une image classique. Le 3^{ème} indice donne l'information (R,G,B) (1=R, 2=G, 3=B). Le dernier indice correspond à l'indice de temps (et non à la valeur du temps).

La 1^{ère} image du film peut ainsi être appelée par la commande :

```
>> M(:, :, :, 1)
```

avec M la matrice contenant le film.

(b) Profondeur de peau thermique. A la surface de la terre, la température a des variations cycliques (jour-nuit ou bien été-hiver). Ces variations de température se ressentent sous la terre jusqu'à une profondeur δ qui dépend de la période et de la conductivité thermique de la terre à cet endroit. La relation théorique est $\delta = \sqrt{2\kappa/\omega}$, où ω est la pulsation en rad/s. Si la température en surface est périodique, la température en profondeur l'est aussi, mais déphasée par rapport à la température de surface. Le déphasage théorique à la profondeur z est $\varphi = z/\delta$.

Le film film_therm.mat (à charger par *load*) montre la variation cyclique du champ de température sur une profondeur de 10m au cours de trois années. On peut estimer la diffusivité thermique à $\kappa = 1 mm^2 \cdot s^{-1}$ (ex: argile ou terre). Les différentes images du film sont prises à 15 jours d'intervalle. L'échelle de couleurs, commune à toutes les images du film, est contenue sur l'image echelle_perio.png qu'il faut utiliser comme précédemment pour attribuer la bonne valeur de température à chaque pixel.

A partir de manipulations du tableau du film, tracer en fonction du temps la température en surface et à plusieurs profondeurs choisies. En déduire la profondeur minimum pour laquelle les variations annuelles de température sont inférieures à 2K et comparer à la valeur théorique δ

Mesurer le déphasage entre la température en profondeur et la température en surface, en fonction de la profondeur z , et comparer avec la formule théorique.

Mécanique



Le but de ce projet est d'étudier des systèmes mécaniques régis par des lois géométriques.

La première partie du projet est dédiée à l'étude de la forme d'un pont suspendu, conduisant à la détermination du matériau constituant la travée.

La seconde partie du projet est consacrée à la conception d'une pompe. On étudiera dans un premier temps la cinématique du système élémentaire de transformation de mouvement (système bielle manivelle) utilisé dans une pompe. On proposera ensuite de déterminer entièrement la géométrie de la pompe.

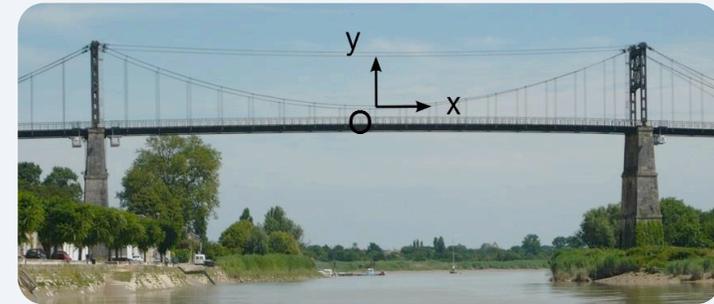
I. Etude de la géométrie d'un pont suspendu

On propose d'étudier la courbe d'un pont suspendu; c'est la forme prise par un fil pesant flexible infiniment mince (homogène inextensible) suspendu entre deux points, placé dans un champ de pesanteur uniforme, et auquel est suspendu par une infinité de fils une ligne pesante horizontale (le pont).

On étudie ici le pont de Tonnay-Charente, qui est l'un des plus vieux ponts suspendus d'Europe. Le but est de déterminer la masse volumique du tablier à partir de la forme prise par le câble.

1. Ouvrir le fichier **pont.png** ; mesurer les points (x,y) de la courbe du câble. La distance entre les 2 piliers fait 90 mètres.
2. Tracer le profil théorique du pont défini par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(u) = a \int_0^u \frac{\cosh(v)}{k + \cosh(v)} dv \\ y(u) = a \int_0^u \frac{\sinh(v) \cosh(v)}{k + \cosh(v)} dv \end{cases}$$



3. Etudier l'influence des paramètres a et k et proposer plusieurs couples (a,k) permettant de reproduire la courbe expérimentale.
4. Déterminer la valeur optimale du paramètre k en considérant a = 15000m. On tracera l'erreur théorie-expérience au sens des moindres carrés en fonction de k. Le paramètre k est défini à partir de μ_c et μ_p les masses linéiques du câble et du pont:

$$k = \frac{\mu_p}{\mu_c}$$

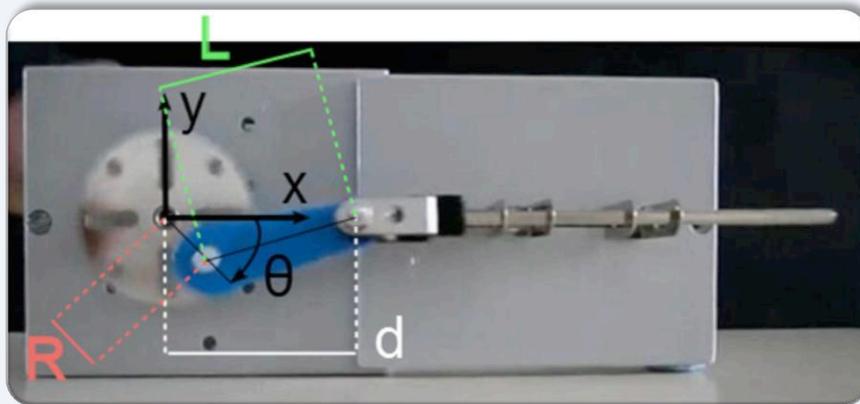
On connaît la masse linéique du câble (en acier): $\mu_c = 44$ kg/m. En déduire la masse linéique du pont. Sachant que la largeur du pont est de 5 mètres, en déduire la masse volumique du matériau le constituant. Quel est ce matériau ?

II. Etude de la géométrie d'une pompe

Cette partie est dédiée à la conception d'une pompe; c'est un dispositif permettant d'aspirer et de refouler un fluide. Notre objectif est de déterminer entièrement la géométrie du mécanisme.

II.1 Mécanisme élémentaire: bielle manivelle

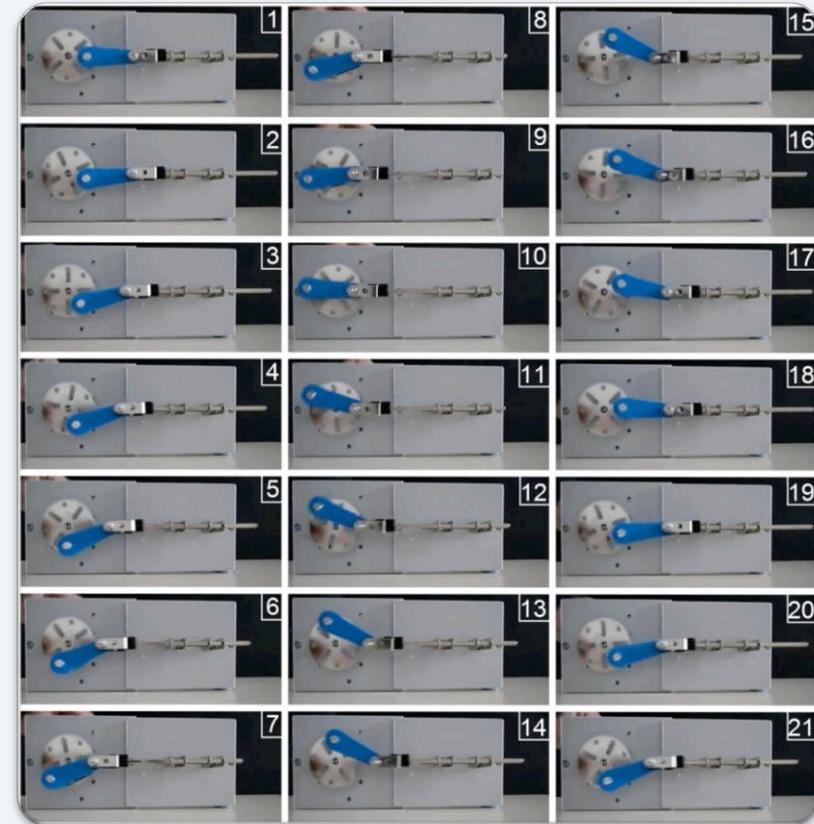
On étudie dans un premier temps le mécanisme élémentaire constituant la pompe. Ce mécanisme, appelé bielle-manivelle, permet de transformer un mouvement de rotation en un mouvement de translation alternée. C'est ce mouvement de translation* qui va permettre de pousser le fluide par l'intermédiaire d'un piston.



1. Ouvrir le fichier **biellemanivelle.png** Déterminer la loi entrée-sortie de ce mécanisme (translation de la bielle d en fonction de la rotation de la manivelle θ) ($R=5$ cm).
2. Tracer la loi théorique (issue d'une modélisation géométrique), pour différentes valeurs de L :

$$d = R\cos(\theta) + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\theta)}$$

3. Tracer l'erreur théorie-expérience selon les moindres carrés en fonction de L .
4. Déterminer la valeur L optimale, et la comparer avec la valeur mesurée sur l'image.



* Le mécanisme bielle-manivelle est également utilisé de manière antagoniste, pour générer un mouvement de rotation à partir de la translation des pistons. Ce mécanisme est notamment utilisé dans les moteurs à explosion: le mouvement du piston est initié par la combustion d'un mélange de carburant et d'air, et entraîne en rotation le vilebrequin grâce au système bielle manivelle.

II.2 Dimensionnement d'une pompe

On souhaite maintenant réaliser une pompe à partir de plusieurs mécanismes bielle-manivelle: la translation de la bielle va permettre de pousser du fluide à l'aide d'un piston. Notre objectif est de dimensionner une pompe afin de satisfaire un cahier des charges:

-On souhaite avoir un débit de 1 L/s avec des fluctuations maximales de 5%.

-On veut que l'encombrement du mécanisme soit inférieur à 8 cm (cela implique que $R+L < 8$ cm).

La vitesse de rotation de la manivelle est de 360 tours/min.

Le rayon des piston vaut 0.5 cm, et on note S la section.

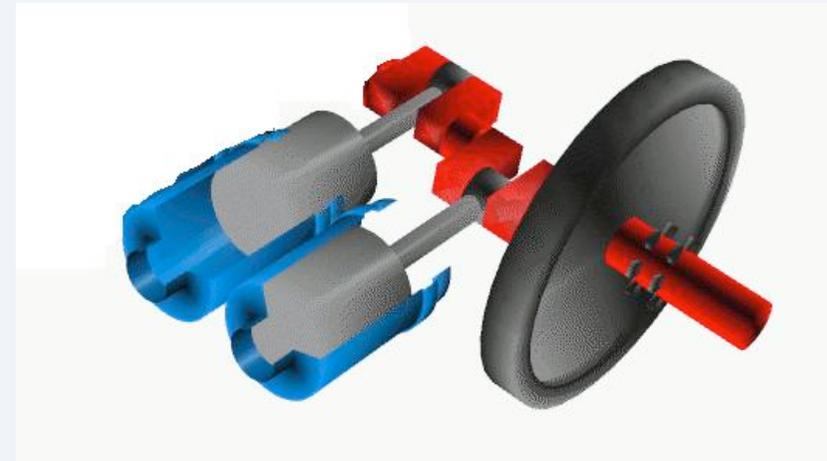
On utilise N mécanismes bielle-manivelle, chacun décalé d'un angle $2\pi(i-1)/N$, avec $1 \leq i \leq N$.

Le débit instantané de chaque piston est donné par la formule :

$$Q_i(t) = -S\dot{\theta} \left(R \sin \theta_i(t) + \frac{R \sin \theta_i(t) \cos \theta_i(t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta_i(t)}} \right)$$

Avec
$$\theta_i(t) = \dot{\theta}t + \frac{2(i-1)\pi}{N}$$

Comme on conçoit une pompe, on ne s'intéresse qu'à la phase de poussée du fluide, ce qui correspond à $Q_i(t)$ positif. Le débit total est donc la somme de la partie positive des débits instantanés de chaque piston.



Schématisme d'une pompe constituée de 2 systèmes bielle-manivelle, décalés de 180°

5. On fixe $N=2$ et $L=5$ cm. Tracer le débit instantané de chaque piston puis le débit total instantané, pour plusieurs valeurs de R . Calculer le débit moyen. Quelle est l'influence de R sur le débit total ?
6. On fixe maintenant $R=1$ cm et $L=5$ cm. Tracer les mêmes quantités que pour la question 5, en faisant varier cette fois-ci le nombre N de pistons.
7. Proposer un couple (R, L, N) solution permettant de répondre aux contraintes d'encombrement et de débit.

Ultrason



But du TP

La vitesse à laquelle se propagent les ondes ultrasonores dans un matériau donné dépend de ses propriétés élastiques et est caractéristique de ce matériau. Nous allons dans ce TP déterminer cette caractéristique en utilisant deux méthodes différentes.

1- Observation de la propagation des ondes

Nous avons réalisé à l'aide d'un logiciel libre (SimSonic) une simulation de la propagation d'une onde ultrasonore autour de l'interface de deux milieux différents.

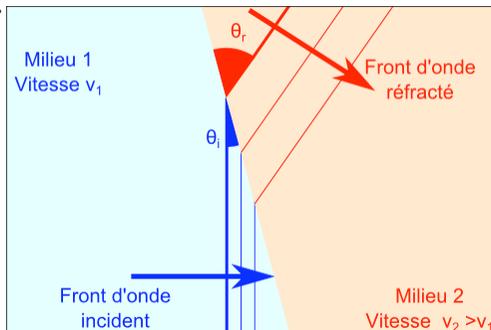
La simulation est intéressante puisque, contrairement à l'expérience, elle permet de visualiser le champ ultrasonore à chaque instant.

Vous disposez des images du champ calculées toutes les microsecondes sous forme de fichier .mat. Chaque fichier contient l'image (tableau Snapshot), les coordonnées des axes (tableaux x et y) ainsi que les coordonnées de l'interface (tableaux x_interface et y_interface).

Réaliser une animation permettant de visualiser la propagation des ondes ultrasonores. Vous utiliserez pour cela les commandes vues dans les TP précédents : boucle for, pause, drawnow etc.

3- Deuxième méthode : réfraction

La réfraction est un phénomène de déviation d'une onde observée lorsque sa vitesse de propagation change entre deux milieux. Ce phénomène, décrit par la loi de Descartes permet de déterminer (par des mesures d'angles et sous réserve de connaître la vitesse dans le milieu 1) la vitesse dans le milieu 2.



$$\frac{\sin(\theta_i)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_r)}{v_2}$$

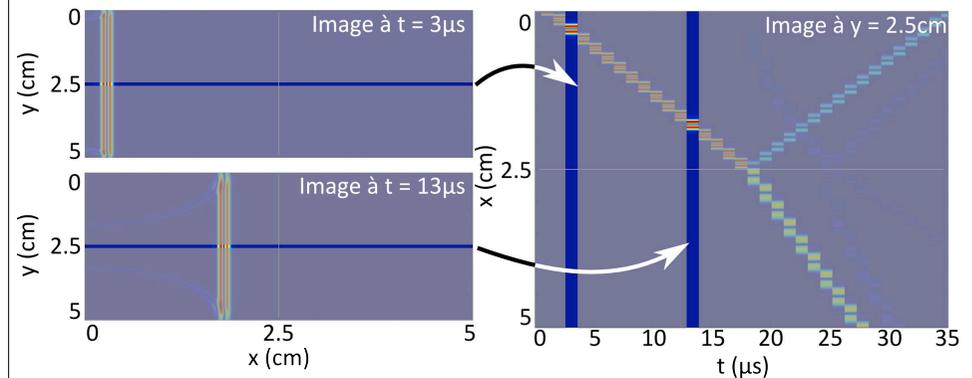
Propagation d'ondes ultrasonores

2- Première méthode : temps de vol

La vitesse de propagation des ondes dans chacun des deux milieux peut être calculée simplement à partir du film précédent en mesurant la distance parcourue par l'onde pendant un temps donné.

Nous proposons pour cette mesure de représenter et d'exploiter le diagramme spatio-temporel du phénomène.

Pour cela, on prélève une ligne sur chacun des images et on les juxtapose comme expliqué sur la figure ci-dessous.



A gauche : images instantanées du champ ultrasonore. A droite : diagramme spatio-temporel obtenu en prélevant une ligne de chaque image instantanée.

Construire le diagramme spatio-temporel. Le commenter en indiquant l'origine des différents motifs observés. Exploiter ce diagramme pour déterminer la vitesse dans chacun des deux milieux.

Vous disposez pour cette méthode d'un instantané de la propagation pour quatre simulations différentes. Seul l'angle d'incidence varie entre les simulations. Les films des simulations vous sont donnés pour information.

a- Calculer l'angle d'incidence à partir des coordonnées de l'interface fournies dans les fichiers .mat.

b- En utilisant la fonction ginput, relever les coordonnées du front d'onde réfracté. En déduire, l'angle de réfraction.

c- A partir de vos 4 mesures d'angles, de la loi de Descartes et en sachant que $v_1 = 1500 \text{ m.s}^{-1}$, déterminer la vitesse v_2 .

d- Comparer les valeurs obtenues avec les deux méthodes.

Annexe 1 Le logiciel de simulation SimSonic

Le logiciel de simulation utilisé ici est disponible librement à l'adresse suivante : <http://www.simsonic.fr>

Ce logiciel simule la propagation des ondes ultrasonores dans des milieux solides ou fluides en utilisant une méthode appelée Différences finies. Cette méthode consiste à approximer la dérivée d'une fonction $f(x)$ intervenant dans l'équation de propagation des ondes avec la formule de Taylor. Par exemple,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Les données d'entrée à fournir au logiciel SimSonic sont :

- une carte décrivant la géométrie du problème à simuler ;
- le signal émis par le capteur ultrasonore émetteur ;
- un fichier texte décrivant les paramètres de la simulation.

Les données de sortie fournies par le logiciel sont :

- des images instantanées de la propagation ;
- les signaux reçus par un ou des capteurs ultrasonores récepteurs.

Toutes ces données sont dans un format propre au logiciel. Des routines Matlab ont été créées et sont disponibles sur le site SimSonic. Elles permettent d'une part de convertir des variables Matlab en fichiers Carte, Signaux et Paramètres lisibles par le logiciel et d'autre part de convertir les données de sortie en variables Matlab.

Ces routines ont été utilisées pour générer les fichiers de données Matlab (.mat) qui vous servent de base dans ce TP.

Annexe 2 Quelques nouvelles commandes Matlab

Lecture de film (pour la partie 3)

```
- MOV=aviread('Film_Inclinaison1.avi')
```

Permet de charger un fichier vidéo dans Matlab.

```
- implay(MOV)
```

Lance un lecteur vidéo interne à Matlab permettant de visionner le fichier chargé précédemment. Les paramètres de la vidéo (nombre d'images par sec. etc.) sont modifiables via une interface graphique.

Affichage d'une image

```
- imagesc(Snapshot)
```

Cette commande est identique à la commande *image* vue dans les TP précédents. Elle affiche les données de la matrice Snapshot sous forme d'une image en couleurs et la met à l'échelle (d'où son nom, sc signifie Scale-Echelle) pour utiliser l'ensemble de la carte de couleurs.

Comparez les images fournies par les commandes image(Snapshot) et imagesc(Snapshot). Observez notamment les valeurs de la colorbar.

Concaténation de chaînes de caractères

Lorsque l'on charge une série de fichiers comme ici ou lorsque l'on affiche une série de graphiques, on souhaite faire évoluer une partie d'une chaîne de caractères (ici le numéro situé après 'V'). Pour ce faire, on concatène (i.e. on assemble) la partie constante de la chaîne de caractères avec la partie variable (qui doit aussi être une chaîne de caractères).

Deux commandes équivalentes réalisent cette concaténation : les crochets '[' et la fonction *strcat*.

Nombres

Développement des fonctions Ln et Sinus en série entière



Technique Scientifique

$$\forall x \in \mathbb{C}, \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Définition:

Soit f une fonction indéfiniment dérivable d'une variable réelle ou complexe et a un point au voisinage duquel la fonction est définie. La série de Taylor de f en a est la série de fonctions suivante :

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

ce qui s'écrit sous forme synthétique comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

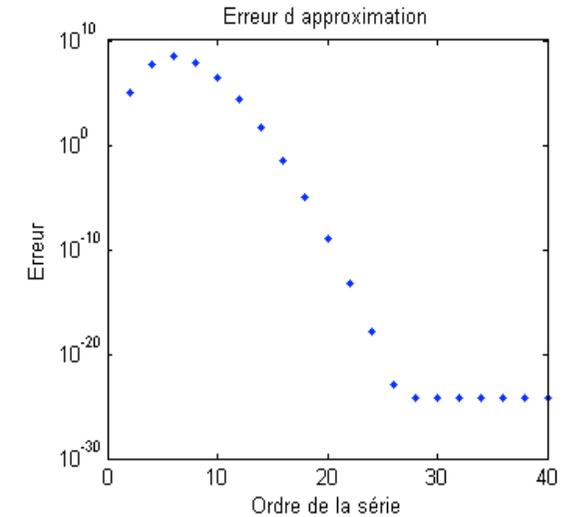
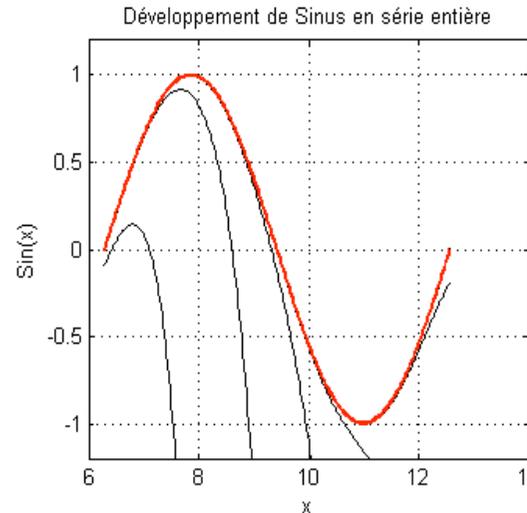
$n!$ est la factorielle de n (le produit des entiers de 1 à n) et $f^{(n)}(a)$ désigne la dérivée n -ième de f au point a .

Cette série de fonctions (convergente ou non) est une série entière de la variable $x - a$.

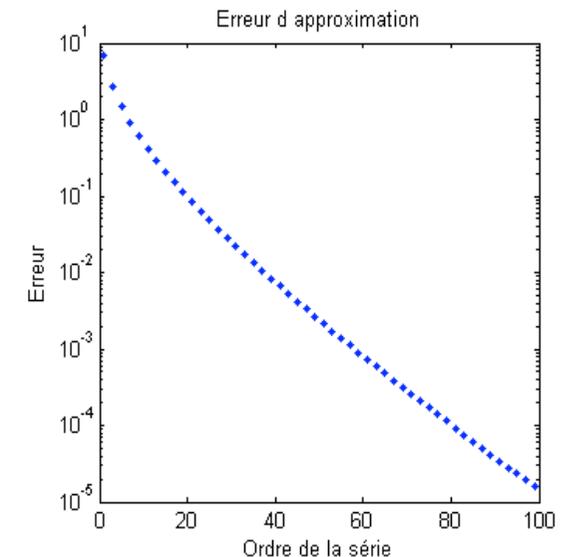
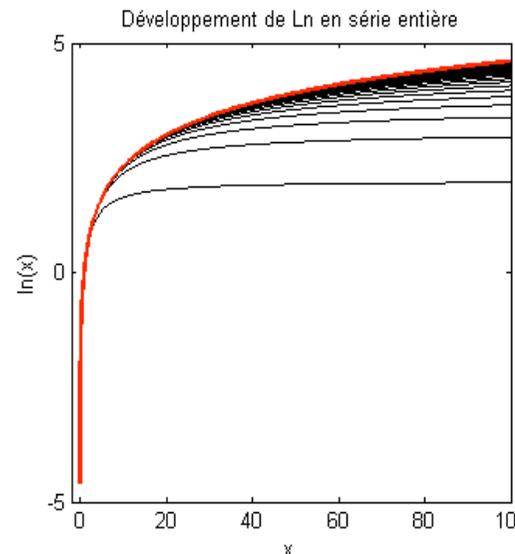
Pour plus d'informations:

http://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Taylor

A partir des développements en série entière des fonctions usuelles Ln et Sinus, construire un programme pour montrer la convergence. Dresser les graphes de comparaison pour différents ordres N de la série entière ainsi que les courbes d'erreurs correspondantes (plus N tend vers l'infini plus la série converge vers la fonction).



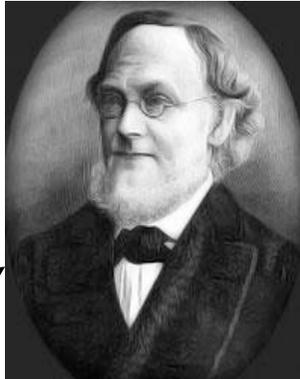
$$\forall y \in]0, +\infty[, \ln(y) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^{2k+1}$$



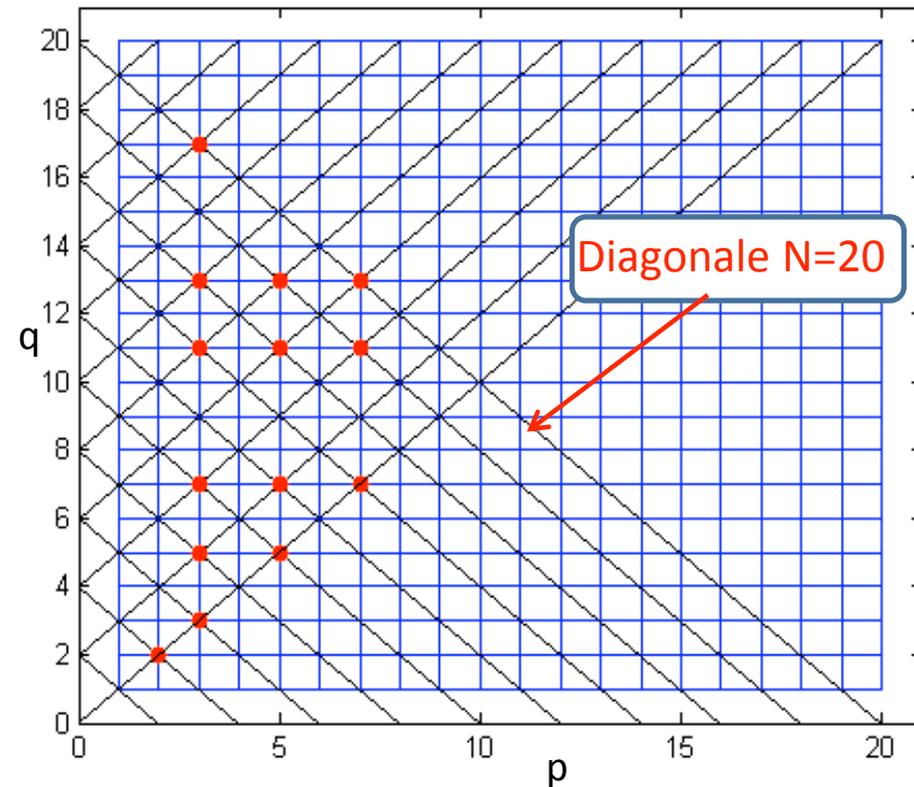
Conjecture de Goldbach

La conjecture de Goldbach est une assertion mathématique non démontrée qui s'énonce comme suit :
Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

Formulée en 1742 par Christian Goldbach, c'est l'un des plus vieux problèmes non résolus de la théorie des nombres et des mathématiques. Il partage avec l'hypothèse de Riemann et la conjecture des nombres premiers jumeaux le numéro 8 des problèmes de Hilbert, énoncés par celui-ci en 1900. La figure ci-contre montre, pour les premiers nombres pairs (2N allant de 2 à 20), les solutions de l'équation $2N = p + q$ représentées par des ronds (rouge). La conjecture de Goldbach correspond au fait qu'aussi loin qu'on prolonge la figure vers le haut, toute ligne oblique noire contiendra au moins un rond rouge. Pour plus d'informations voir : http://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Goldbach



Conjecture de Goldbach sur les nombre 2 à 20



L'objectif du projet est de vérifier numériquement cette conjecture. Commencer par définir « nombre premier » :

- essayer d'abord le **théorème dit de Wilson**: un entier p strictement plus grand que 1, est un nombre premier si et seulement si il divise $(p-1)!+1$, c'est-à-dire si et seulement si $(p-1)!+1$ est un multiple de p
- Dites pourquoi ce théorème n'est pas adapté pour la vérification numérique
- Essayer alors le deuxième **théorème qui s'énonce**: l'entier p est premier si et seulement si, aucun des entiers entre 2 et racine carrée de p ne le divise, c'est-à-dire si seulement s'il n'est multiple d'aucun des entiers entre 2 et racine carrée de p .

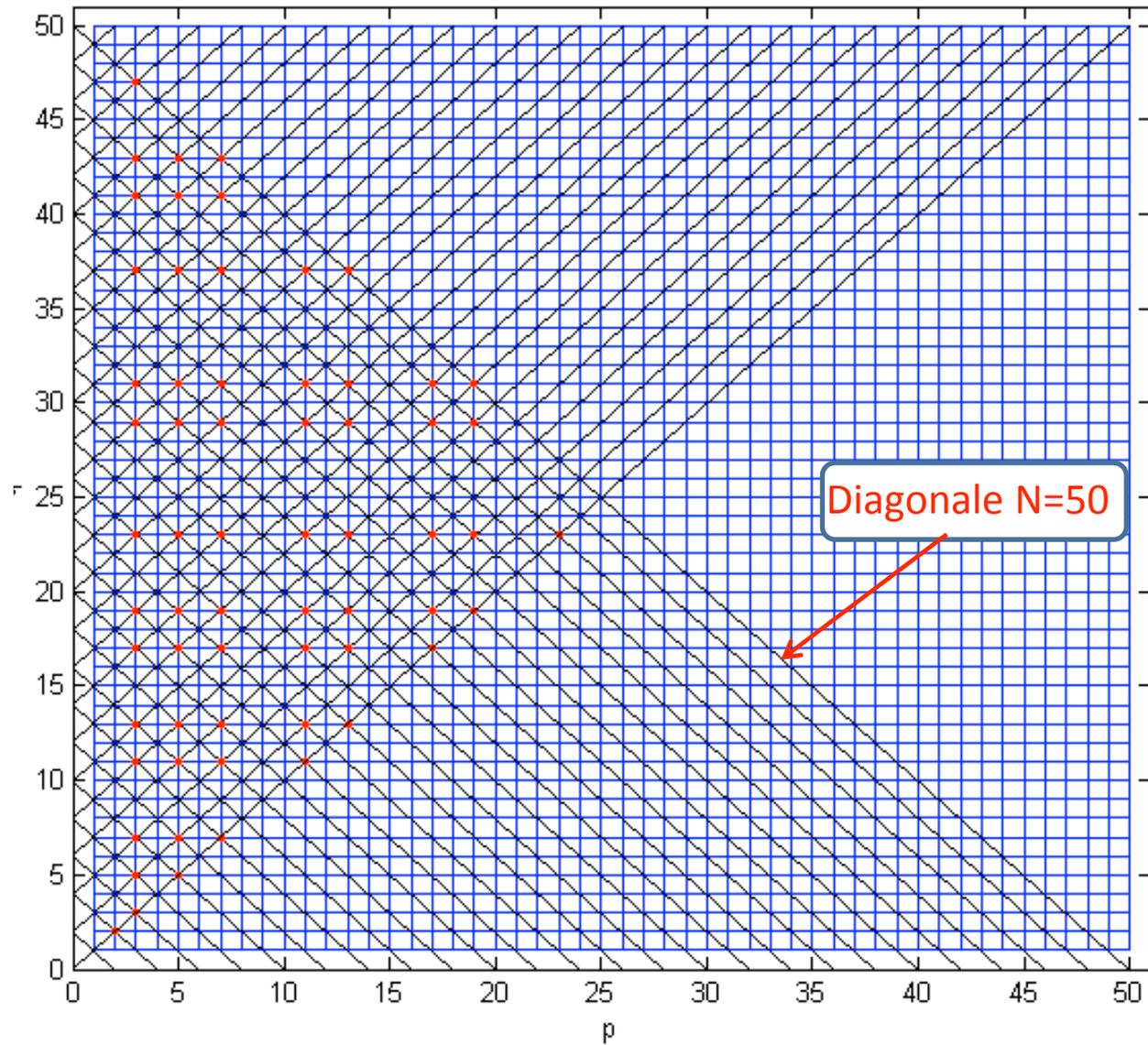
-Construire alors le script permettant de trouver pour un nombre N donné tous les nombres premiers inférieurs à celui-ci.

Utiliser l'aide de Matlab pour se familiariser avec les fonctions `factorial`, `floor`, `mod`, `rem`, qui peuvent être nécessaires pour le codage.

-Dresser ensuite le graphe si contre pour vérifier la conjecture pour tout entiers paires de 4 à 100 qui permet de repérer pour chaque entier les nombre de façons possible d'écrire la somme $N=p+q$ (comme le montre la figure ci-dessus pour $N=2:2:20$).

Conjecture de Goldbach

Conjecture de Goldbach sur les nombre 2 à 50



4	= 2 + 2	(1 solution)
6	= 3 + 3	(1 solution)
8	= 3 + 5	(1 solution)
10	= 3 + 7 = 5 + 5	(2 solutions)
12	= 5 + 7	(1 solution)
14	= 3 + 11 = 7 + 7	(2 solutions)
	
	
50	= 19 + 31 = 13 + 37 = 7 + 43 = 3 + 47	(4 solutions)

Caramel

Projet LA 207 : Thermique du caramel



Orgues basaltiques (nord de l'Irlande)

Contexte : L'apparition de fissures de rétractation thermique est un phénomène très commun ayant de nombreuses applications, aussi bien géophysiques (colonnes de basalte) qu'industrielles (séchage de suspensions dans les peintures et les cosmétiques). Des essais en laboratoire ont été réalisés sur le caramel.
Afin de contrôler le réseau de fissures induit suite à un choc thermique, il est important de comprendre les échanges thermiques en présence lors du séchage du caramel.

Thermique : Afin de connaître la température, un thermocouple est plongé dans la couche de caramel. Un relevé des mesures de température est disponible dans le fichier d'entrée 'courbe.jpeg'. Etant donné la faible épaisseur de caramel, on va supposer que la température y est uniforme et ne dépend donc que du temps. L'équation de la thermique régissant le phénomène de refroidissement se ramène donc à :

$$(M_c C_c + M_v C_v) \frac{dT}{dt} = h S (T_a - T)$$

$M_c = 12\text{g}$ et $M_v = 40\text{g}$: masse du verre et du caramel

C_c et C_v : capacité calorifique massique du verre et du caramel

$h = h_{\text{conv}} + h_{\text{rad}}$: coefficients d' échange convectif et radiatif

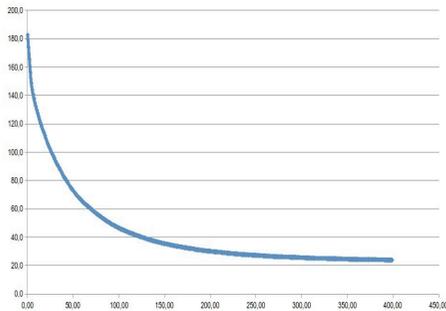
S : surface d' échange

T_a : température ambiante



Réseau de fissures obtenu lors du séchage du caramel

Modèle uniforme



Courbe de température en fonction du temps(s)

1) Afin de comparer avec les relevés expérimentaux, il nous faut tracer la courbe de température, et donc résoudre cette équation différentielle. Calculez la solution analytique de cette équation, sachant que la capacité calorifique du verre C_v est 720 J/kg/K , et celle du caramel $C_c = 1.1269 + 4.524 \cdot 10^{-3} T$. Dans un premier temps, on ne tiendra pas compte de la dépendance de cette dernière vis-à-vis de la température. Déterminez la valeur du coefficient d'échange h minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart théorie/expérience. On choisira pour h sur une plage de valeurs comprises entre 1 et 100.

2) On va maintenant reprendre la résolution en utilisant l'expression complète de $C_c(T)$ et la valeur de h obtenue. Pour cela, on peut, comme précédemment résoudre analytiquement l'équation différentielle. Une fois la nouvelle expression de T obtenue, retrouvez-la en utilisant l'outil ode, le solveur d'équations différentielles de Matlab. Etait-il raisonnable de négliger le terme d'ordre 1 a posteriori ?

Modèle non uniforme

On fait maintenant l'hypothèse que la température n'est plus uniforme et dépend de la coordonnée x : $T=T(x,t)$. On fait également l'hypothèse simplificatrice de parois latérales calorifugées (flux de température nul) et d'une température imposée aux extrémités. L'équation de la chaleur vérifiée par la température est alors :

$$\frac{dT}{dt} - D \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{K}{\rho C}$$

Dans un souci de simplification, on choisira $D=1$. Les variables continues x et t sont alors remplacées par des variables discrètes $x(i)$ et $t(j)$. Les points x sont régulièrement espacés d'un pas Δx , les points t d'un pas Δt . La température à l'abscisse x et à l'instant t $T(x,t)$ est donc approchée par l'approximation $T(i,j)=T(x(i),t(j))$. Les dérivées spatiale et temporelle sont approchées par différences finies comme suit :

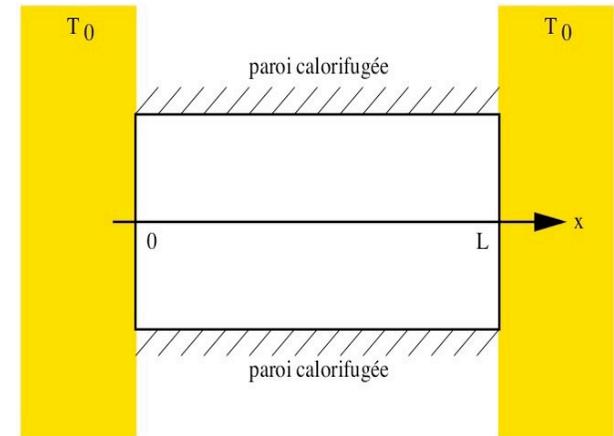


Schéma explicite

La manière la plus simple de résoudre numériquement ce problème est de choisir un schéma d'intégration explicite, c.a.d. que la dérivée par rapport à x est exprimée en fonction des instants antérieurs connus. La température au point $x(i)$ à l'instant $t(j)$ s'écrit :

$$T(i, j) = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T(i-1, j-1) - 2T(i, j-1) + T(i+1, j-1)) + T(i, j-1)$$

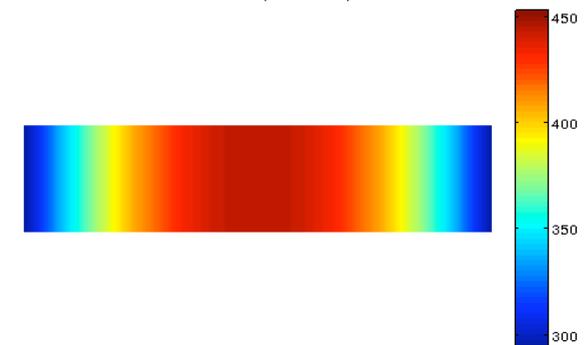
Vérification de la solution proposée

Il vous faudra malheureusement attendre l'année prochaine pour avoir la joie de programmer vous-même la résolution numérique de ce problème. La solution Temp vous est donc fournie dans le fichier 'data.mat' ainsi que le vecteur $x(i)$ et le vecteur temps $t(j)$.

1) Vérifiez que le champ solution proposé est bien solution de l'équation de la chaleur.

2) Ecrivez un script permettant une visualisation dynamique de l'évolution de température dans la barre, comme sur la figure de droite.

Evolution du champ de température



Sablrier

Matlab: Application en mécanique

LA207, UPMC **Projet sablier**

Décharge d'un cylindre de grains, le sablier simple

Difficulté :
technique



scientifique



Introduction :

D'aussi loin que remontent les traces écrites, la mesure du temps a toujours été un problème important pour l'homme. Au XIII^e siècle avant J.-c, les babyloniens en s'aidant des astres avaient décomposés une année en 12 cycles lunaires (mois) et en 360 cycles jour/nuit, soit 30 cycles jours/nuits par cycle lunaire.

Le temps était alors mesuré grâce aux variations d'angles entre les astres.

Remarque : les mathématiques babyloniennes utilisaient un système sexagésimal, i.e. de base 60, car il a l'avantage d'avoir un grand nombre diviseurs entier. Il est encore utilisé aujourd'hui pour la mesure des angles en degrés et du temps.

On peut d'ailleurs compter jusqu'à 60 avec les doigts, en utilisant ses phalanges dans un système en base 12.

L'un des premiers outils pour mesurer le temps fut le cadran solaire et ses dérivés, apparut en Égypte antique. A l'aide de l'ombre d'une tige projeté sur un cadran on subdivise la durée du jour en 12h. Comme la durée totale d'ensoleillement varie avec les saisons, la durée des « heures » du cadran varie également.

Vint ensuite la clepsydre, toujours en Égypte antique, une horloge à eau. Durant l'antiquité, c'était l'outil utilisé pour mesurer le temps lors d'un débat, par exemple chaque participant avait droit à un temps de parole équivalent à la vidange d'une clepsydre.

Le problème de cet outil est que lorsque la moitié du temps s'est écoulé plus de la moitié de l'eau s'est écoulé.

Cela illustre que le débit dépend de la hauteur du liquide (et donc du temps) :

$$Q = \pi R^2 \sqrt{2gh(t)}$$

Où Q est le débit volumique, g l'accélération de la pesanteur, R le rayon du trou et h la hauteur d'eau dans la clepsydre.

Au moyen-âge le sablier fut découvert. Il fut constaté expérimentalement que le débit des grains de sable était indépendant du temps. Ainsi lorsque la moitié du sablier s'est écoulé la moitié du temps aussi. Il était utilisé surtout par les marins et pour mesurer des courtes durées (sermon, lecture). Encore aujourd'hui on peut trouver des sabliers dans les cuisines pour les temps cuissons (œufs, durée d'infusion, ...) où dans des jeux de sociétés.

Nous nous efforcerons au cours de ce TP de vérifier la loi donnant le débit de décharge d'une colonne de grain (i.e. un sablier simple) :

$$W = C \rho \sqrt{g} (D - kd)^{\frac{5}{2}}$$

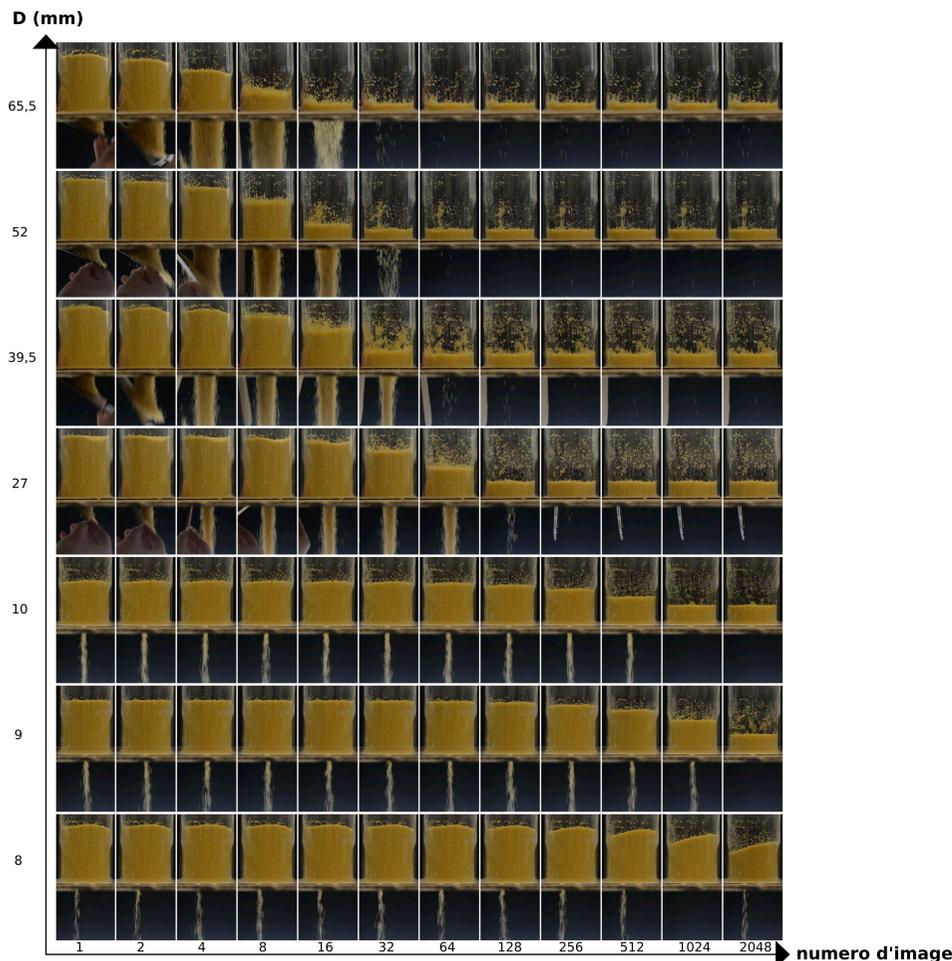
Où W est le débit massique, D le diamètre du trou où s'écoulent les grains, d la taille typique des grains, ρ la masse volumique apparente. C et k sont des coefficients numériques qui dépendent du système (nature des grains et de la colonne).

Matlab: Application en mécanique

LA207, UPMC **Projet sablier**

Manipulations :

L'image « sablier.png » présente la décharge d'une colonne remplie de semoule (grains moyens) en fonction du temps t , et du diamètre du trou D .



Dans un 1er temps, vérifiez à l'aide de l'image « sablier.png » que la hauteur des grains varie linéairement avec le temps pour chaque diamètre.

Les données utiles sont :

- les images proviennent d'un film a 24 images/s
- le diamètre externe de la colonne est 9,97cm et le diamètre interne 9,03cm
- la masse volumique apparente des grains de semoule est $667,25\text{kg/m}^3$
- la taille typique des grains est de 1,69 mm

Ensuite, calculez le débit volumique instantané en fonction du temps. Qu'observez vous ?

Proposer une solution pour remédier à ce problème.

En déduire le débit massique du sablier en fonction du diamètre du trou.

Ajustez les coefficients C et k de la loi précédente avec vos données.

indice : vous pourriez avoir besoin de la fonction MATLAB polyfit (voir doc)

Beverloo et al observent suivant les grains $1 < k < 2$ et $0,55 < C < 0,65$

Questions :

1) Démontrez la loi donnant le débit d'une Clepsydre en fonction du temps donné dans l'introduction

2) La loi du débit de décharge d'un cylindre de grains donnée en introduction n'est pas toujours valide. A votre avis dans quelles circonstances elle n'est plus correcte ?

3) Que représente la masse volumique apparente ρ dans cette formule ?

Pour aller plus loin :

- Retrouver la valeur de ρ à l'aide de l'image « densité.jpg ».
- Evaluez la valeur de d , taille typique des grains à l'aide de l'image « grains.jpg » (*pour cela utilisez la fonction MATLAB hist, voir doc*).
Attention, la taille des pixels est différente pour ces 2 nouvelles images et est à recalculer !
- Par analyse dimensionnelle retrouvez la puissance de la loi du débit de la colonne de sable. *On constate expérimentalement que le débit ne dépend pas du diamètre de la colonne et on supposera que l'effet de la taille des grains est négligeable*

Astronomie

Galilée et les satellites de Jupiter

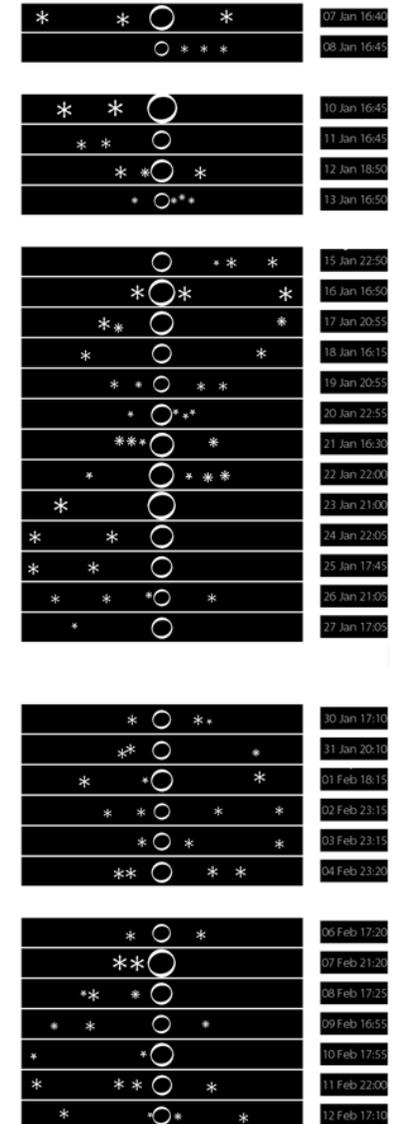
En 1610, Galilée publie à Venise son célèbre «*Messenger des étoiles*». Il y relate les observations que lui a permis son tout nouveau télescope, qui agrandit une vingtaine de fois. Il y décrit la surface de la lune, qui présente des montagnes et des cratères, mais surtout, il y décrit son observation «*d'étoiles errantes*» autour de Jupiter. Il donne dans le livre 63 représentations typographiques de ses observations au cours de 2 mois. Ce sont Io, Europe, Ganymède et Callisto les quatre principaux satellites de Jupiter. Cette observation sera un très puissant support à la théorie Héliocentrique de Copernic: en effet c'est la preuve qu'il existe des planètes qui tournent autour d'autre chose que la terre.

Par contre, Galilée n'a pas montré que ses étoiles errantes orbitent de manière régulière. Les observations de Galilée sont regroupées dans l'image «*galilee.png*». Nous n'avons gardé qu'une seule observation par jour. Montrez que les satellites parcourent des orbites circulaires autour de Jupiter et mesurez leur période et amplitude relative (au moins pour Callisto et Ganymède).



Jupiter, cinquième planète du système solaire

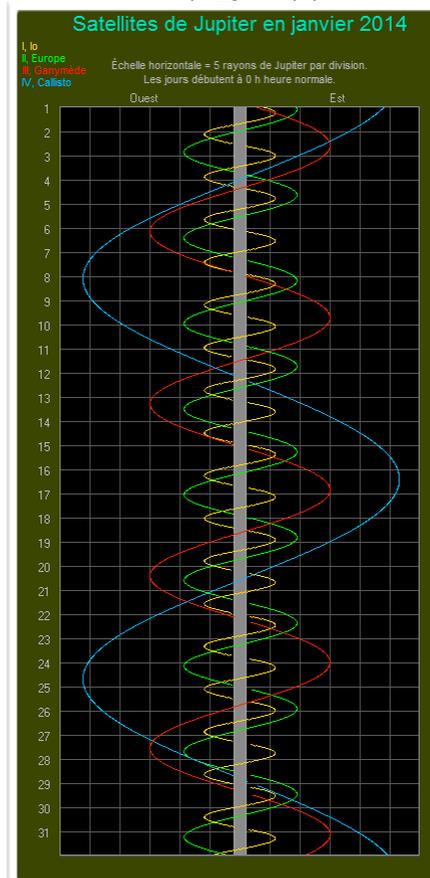
Mise en forme des observations de Galilée pour le traitement d'image. Données extraites de; <http://home.comcast.net/~erniew/astro/sidnunj.html>



L'introduction à son livre par Galilée, annonçant ses découvertes. (Galilée, *Le messenger des étoiles*, Point sciences, traduction Fernand Hallyn)

Scan de la version originale du livre en latin, montrant la représentation typographique des positions des satellites de Jupiter. <http://home.comcast.net/~erniew/astro/sidnunj.html>

Calcul numérique des orbites des quatre principaux satellites de Jupiter pour janvier 2014. Données obtenue via: http://www.tetesenlair.net/ephe_general.php



LE MESSAGE ASTRONOMIQUE
qui contient et éclaire
 DES OBSERVATIONS RÉCEMMENT EFFECTUÉES
grâce à une Nouvelle Lunette et portant sur la face de la Lune, la Voie Lactée et les Nébuleuses, d'innombrables Étoiles fixes, ainsi que sur quatre Planètes baptisées ÉTOILES MÉDICÉENNES jamais aperçues jusqu'à ce jour.*

Grands, assurément, sont les sujets qu'en ce mince traité je propose à chacun de ceux qui observent la Nature, afin qu'ils les examinent et contemplent. Grands, dis-je, d'abord en raison de l'importance de la matière même, ensuite en raison de sa nouveauté inouïe au cours des siècles, enfin, également, à cause de l'Instrument grâce auquel ces sujets se sont offerts à notre perception.

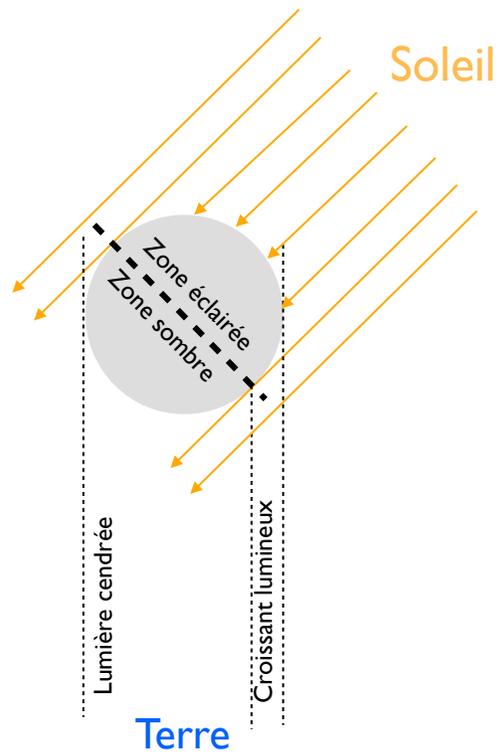
Où, vraiment grande est la tâche d'augmenter la nombreuse foule des Étoiles fixes*, qui par faculté naturelle à ce jour ont pu être aperçues, et d'en exposer ouvertement aux regards d'autres innombrables, jamais aperçues auparavant et qui surpassent plus de dix fois en nombre celles qui sont depuis longtemps connues.

OBSERVAT. SIDEREAE
 æquales fuerunt, ac min. 4. Occidentalis vna aberat à Ioue min. 2. Erant in eadem recta ad vnguem, secundum Eclipticæ ductum.
 Die 26. Hora o. m. 30. binæ tantum aderant Stellæ. Orientalis vna distans à Ioue m. 10. Occidentalis altera
 Ori. * * * Occ.
 distans m. 6. Orientalis erat aliquanto minor occidentali. Sed Hora 5. tres visæ sunt Stellæ, præter enim duas iã
 Ori. * * * Occ.
 adnotatas tertia ex occidente propè Iouem admodum exigua cernebatur, quæ prius sub Ioue latitabat, distabatque ab eo m. 1. Orientalis verò remotior, quam antea videbatur, distans nempe à Ioue m. 11. Hac nocte primum Iouis & adiacentium Planetarum progressum secundum Zodiaci longitudinem facta relatione ad fixam quandam obseruare placuit: spectabatur enim fixa Stella orientem versus distans à Planeta orientali m. 11. & paululum in Austrum deflectebat, in hunc qui sequitur modum.
 Ori. * * * Occ.
 * fixa
 Die 27. Ho. 1. m. 4. Apparebant Stellæ in tali configuratione. Orientalior distabat à Ioue min. 10. sequens Ioui proxima min. 0. sec. 30. Occidentalis sequens aberat min. 2.

Croissant de lune

L'image «lune.png» représente un très fin croissant de lune, juste après la lune nouvelle. La surface éclairée par le soleil est surexposée sur la photographie de sorte à ce que la luminosité soit adaptée à la visualisation de la face de la lune qui n'est pas éclairée par le soleil. Comment se fait-il que cette face non-éclairée ne soit pas entièrement noire?

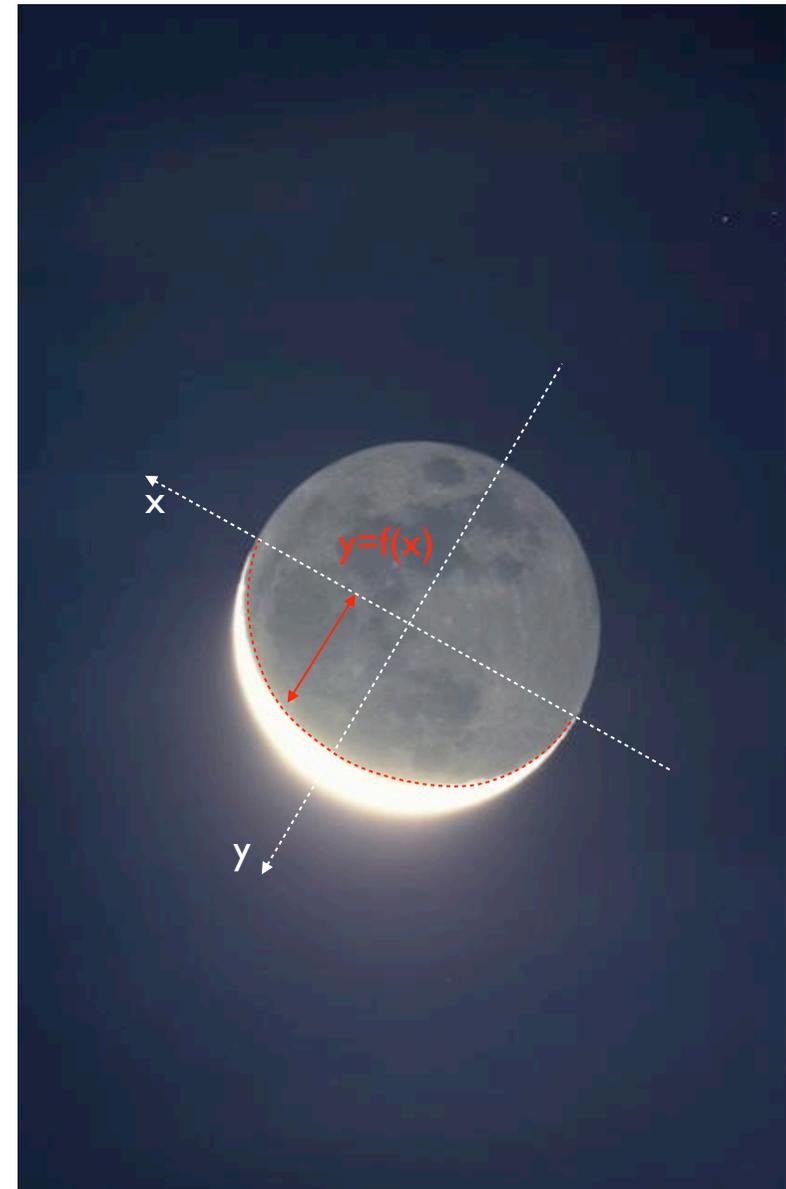
La période de la lune nouvelle (la lune n'est pas visible depuis la terre) correspond à la période de «pleine terre» si on est sur la lune. Cette lumière qui éclaire la face sombre de la lune, c'est la lumière du soleil reflétée par la terre. La terre est quatre fois plus grande que la lune, donc le clair de terre est 16 fois plus lumineux que le clair de lune. C'est ce qu'on appelle la «lumière cendrée de la lune».



Etude géométrique:

Si on suppose que la lune est une sphère éclairée de côté, quelle est la formule mathématique qui décrit la forme $y=f(x)$ de la limite ombre/lumière vue de la terre?

Tracer cette formule sur la photo en identifiant les valeurs des paramètres.



Acoustique musicale

Niveau technique

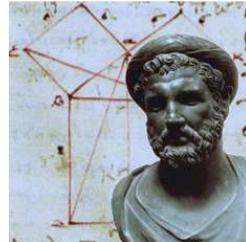


Niveau scientifique



Un peu d'histoire

L'étude de l'acoustique musicale remonte à l'ère de la grèce antique. Il est communément admis que Pythagore (580 av. J.-C.- 495 av. J.-C.) est le premier à avoir formaliser la relation entre les sons musicaux et les mathématiques. Il avait ainsi observé la propriété suivante lorsque un musicien joue sur un instrument à cordes : si le musicien joue sur une corde 2 fois moins longue, il produit une note dont la hauteur est 2 fois plus élevée (une octave au dessus), etc...



Un son musical n'est pas un son pur : il est composé d'une harmonique fondamentale (F_0 , la hauteur de la note) et d'une série d'harmoniques successives multiples de l'harmonique fondamentale. Ainsi lorsqu'un musicien joue une note de piano de hauteur $la_4=440\text{Hz}$, une oreille musicienne sera capable d'entendre également la série de hauteurs suivantes : $la_5=880\text{Hz}$, $mi=1320\text{Hz}$, $la_6=1760\text{Hz}$, $do\#7=2220\text{Hz}$, etc...

Au cours de l'histoire, l'étude de l'acoustique musicale a permis de mieux comprendre la relation entre un son musical et la physique d'un instrument de musique. Un son musical résulte de : une vibration (la corde du piano) et un corps résonnant (le corps du piano). La corde de piano vibre à une certaine période fondamentale (hauteur du son) ; le corps de résonance du piano va favoriser certaines fréquences en fonction de ses modes de résonances (couleur/timbre du son). C'est ainsi que les instruments de musique ont une couleur qui leur sont propres !

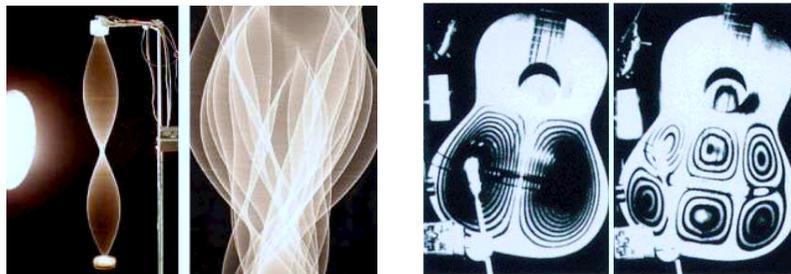


FIGURE 1: *Vibration d'une corde et modes de résonance du corps d'une guitare.*

L'objectif de ce TP est d'explorer avec MATLAB l'univers de l'acoustique musicale.

Théorie : vibration d'une corde

On considère une corde idéale (c'est-à-dire : homogène, de masse linéique μ , de section droite S constante, de tension uniforme T , sans amortissement, supposée vibrant uniquement dans un plan (x, y)) fixée rigidement en ses deux extrémités. Après pincement de la corde par un musicien à un point d'abscisse x_0 sur l'axe x , la corde est déformée de y_0 et possède une vitesse v_0 sur l'axe y .

On peut montrer que la position y d'un point x de la corde à un temps t est régie par la loi :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)) \sin(k_n x) \quad (1)$$

où : $k_n = n\pi/L$ est le nombre d'onde, $\omega_n = n/L$ est la pulsation de la corde, avec $c^2 = T/\mu$ est la célérité des ondes dans la corde.

A_n et B_n sont les amplitudes des modes de vibration de la corde :

$$A_n = \frac{2y_0 \sin(k_n x_0)}{k_n^2 x_0 (L - x_0)} \quad B_n = \frac{2v_0 \sin(k_n x_0)}{k_n^2 c x_0 (L - x_0)}$$

où : y_0 est l'ordonnée initiale et v_0 la vitesse initiale de la corde au point de pincement de la corde au point d'abscisse x_0 .

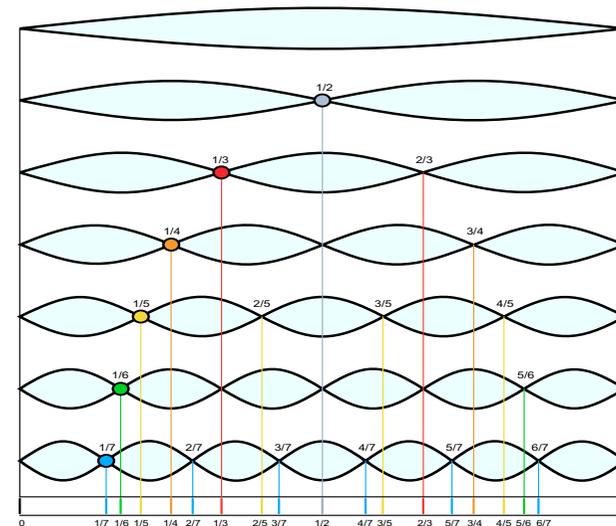


FIGURE 2: *Modes de vibration d'une corde (1 à 7).*

Expérience 1 : du son aux mathématiques

Pour commencer, nous allons analyser les caractéristiques physiques d'un instrument de musique à partir d'un enregistrement numérique.

Analyse temporelle

Lors de l'enregistrement d'un instrument de musique, un microphone mesure la surpression acoustique environnante engendrée par les vibrations émises par l'instrument de musique, et la transforme en signal électrique. Ce signal est alors numérisé pour pouvoir être enregistré sur un ordinateur. L'étude du signal numérique nous permet de retrouver certaines propriétés physiques de l'instrument de musique.

1. Charger le fichier son avec la fonction WAVREAD. Ecouter le son avec la fonction SOUNDSC.
2. Tracer l'amplitude du signal sonore en fonction du temps (en secondes !).
3. Avec les outils de l'interface graphique de la figure (ZOOM, CURSEUR) : le signal sonore est-il périodique ? Si oui, mesurer sa période fondamentale (en secondes) et sa fréquence fondamentale (en Hertz).

Analyse fréquentielle

Une autre manière d'étudier un son est de le représenter dans le domaine fréquentiel. La transformée de Fourier permet de représenter le spectre de fréquence d'un son. Le spectre d'un son permet en outre de mettre en valeur les modes de vibrations (de la corde) et de résonances (du corps du piano).

4. Avec l'aide de la fonction FSPECTRE, tracer l'amplitude du spectre du son en échelle linéaire (A), puis en échelle logarithmique ($A_{dB} = 20 \log_{10}(A)$) en fonction de la fréquence (en Hertz !).
5. A partir de l'observation du spectre du son : que remarquez-vous ? Mesurer les fréquences et amplitudes des harmoniques observées dans le spectre.

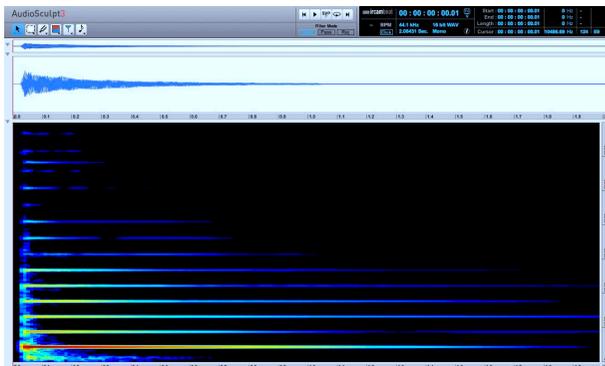


FIGURE 3: Spectrogramme (analyse temps-fréquence) d'une note de piano A4.

6. Répéter l'opération avec les sons contenus dans le dossier SON et avec des sons de votre choix que vous enregistrerez !

Expérience 2 : des mathématiques au son

Nous allons maintenant nous intéresser à la réalisation d'un synthétiseur musical par *synthèse additive*.

Synthèse d'un son musical

La synthèse additive représente un son musical comme une somme d'harmoniques :

$$y(t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(2\pi f_n t) \quad (2)$$

où : N est le nombre d'harmoniques, et (f_n, A_n) sont la fréquence et l'amplitude des harmoniques du son.

Nous allons maintenant créer des sons musicaux.

7. Compléter la fonction FSYNTHESEADDITIVE pour réaliser un signal sonore par synthèse additive.
8. Synthétiser un son pur ($N = 1$) de fréquence $f = 440\text{Hz}$ et d'amplitude $A = 1$.
9. Synthétiser des sons musicaux en faisant varier les paramètres N , f_n et A_n du son. Commenter. Enregistrer vos sons avec la fonction WAVWRITE.

Une bonne idée pour trouver des paramètres "musicaux" est de les mesurer à partir des sons que vous avez à disposition !

Vers un synthétiseur musical

Nous allons maintenant réaliser un synthétiseur musical que nous pourrions utiliser pour jouer de la musique sur notre clavier d'ordinateur. Pour ce faire, nous allons créer les sons musicaux de 1 octave - ou plus - (de LA3 = 220 Hz à LA4 = 440 Hz) et les faire correspondre aux touches du clavier de l'ordinateur.

10. Synthétiser des sons sur 1 octave de LA3 à LA4 (12 notes) - ou plus.
11. Compléter la fonction FSYNTHETISEURDEMO avec la table des notes de synthèse précédemment déterminée et en affectant chacune des notes à une touche du clavier.
12. Enregistrer vos talents de musicien en exécutant la fonction FSYNTHETISEURDEMO et en donnant libre court à votre imagination !



FIGURE 4: Synthétiseur MOOG (1970)