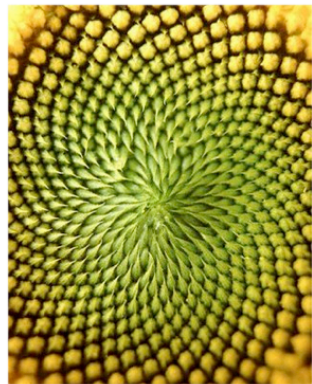


## 2.14 TP3 : les formes mathématiques dans la nature



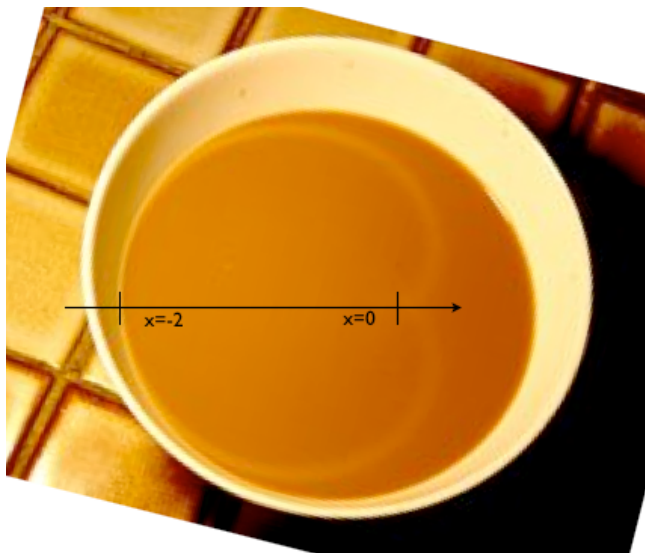
↑  
Photo: Cyril Almeras  
<http://www.cyrilalmeras.com>



On observe des formes géométriques dans la nature. Cette observation n'est pas anodine, c'est le cas lorsque les formes découlent de lois physiques simples. Nous voyons ici deux exemple, un exemple ou une forme de cardioïde est obtenue par la réflexion d'une source lumineuse sur une paroi conique, le second est un exemple artificiel : une grande arche dont la construction est en forme de chaînette pour lui permettre de soutenir efficacement la force de son poids.

Les parties Manipulations et étude de ce TP sont à rendre sous la forme d'un compte-rendu sous Sakai dans le devoir évalué "TP3". Tous les graphiques doivent être annotés, Il doit être clair dans le compte-rendu à quoi correspondent les courbes (légendes, descriptions). Chaque binôme remet un seul compte-rendu.

## 2.14.1 Manipulations



1. Lisez l'image `cardio.png` sur le disque avec la fonction `imread`, et affichez là dans une fenêtre graphique avec la fonction `image`.
2. Mesurez les points de la cardioïde avec la fonction `ginput`. Les points de mesure sont à sauver dans un fichier texte `cardio.dat`. Vous insérerez les points de mesure dans votre compte-rendu.
3. Chargez les points de données dans le workspace avec la fonction `load`.
4. Superposez l'image originale et les points de mesure avec la fonction `plot`. Choisissez les propriétés de votre courbe : couleur... pour permettre une bonne visibilité.

## 2.14.2 Etude

La formule en coordonnées cylindrique d'une cardioïde comme sur l'image est  $r = 1 + \cos(\theta)$ ,  $\theta \in [\pi, 3\pi]$ ,  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ . Il faudra opérer un petit rétrécissement selon  $y$  à cause de la perspective en biais de la photo.

Opérez un changement de référentiel sur vos points mesurés de sorte à ce que les points  $x = 0$  et  $x = -2$  soient comme représentés sur l'image. Tracez dans un second sous-graphique les points mesurés et la courbe théorique.

Maintenant remettez votre compte-rendu sur Sakai.

## 2.14.3 Pour aller plus loin

L'image ci dessous se trouve sur le répertoire commun sous le nom `chainette.png`. Il s'agit de la "Gateway Arch", à Saint-Louis dans le Missouri. Cette sculpture est construite en forme de chaînette inversée. La chaînette est la courbe que prend une chaîne qui pend sous son propre poids. Cette forme minimise

également les efforts de cisaillement dans la structure en arche.



L'équation de la chaînette inversée est

$$y = b - a \cosh(x/a).$$

Ici,  $\cosh$  est le cosinus hyperbolique. Les deux paramètres  $a$  et  $b$  sont à déterminer. On peut déterminer  $b$  à partir de  $a$  en notant que  $\cosh(0) = 1$  donc  $b = y_A + a$ , et on déterminera  $a$  graphiquement par approximations successives. Superposez la courbe théorique aux points mesurés pour montrer que l'arche est bien une chaînette. Ensuite, tracez une parabole qui passe par les points  $A, B, C$ . On voit ainsi que l'arche n'est pas une parabole.

# Matlab : applications en mécanique LA207, 2010-2011

Compte rendu modèle TP3:  
Les formes mathématiques dans la nature

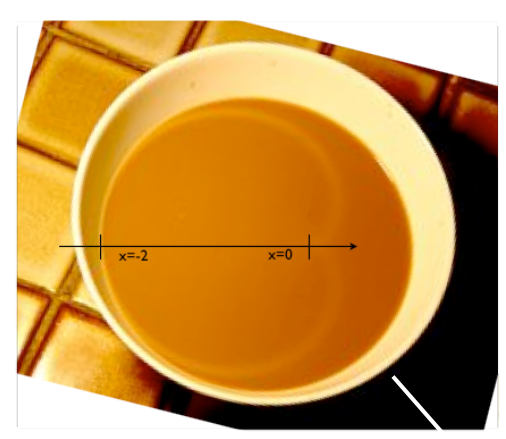
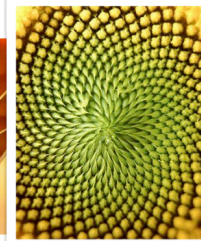
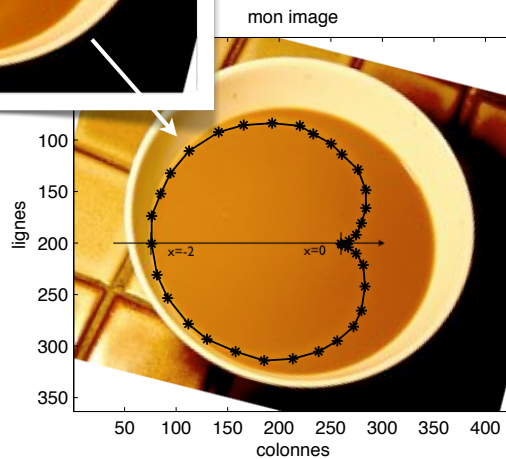


Photo: Cyril Almeras  
<http://www.cyrilalmeras.com>



Les points de mesure:

259.8232	200.6159
267.6159	198.0183
274.5427	191.9573
279.7378	180.7012
284.0671	165.9817
284.0671	148.6646
276.2744	128.7500
260.6890	114.0305
250.2988	103.6402
232.9817	94.1159
219.9939	86.3232
193.1524	83.7256
165.4451	85.4573
141.2012	92.3841
112.6280	110.5671
94.4451	132.2134
84.9207	152.1280
76.2622	173.7744
76.2622	200.6159
81.4573	230.9207
91.8476	253.4329
111.7622	278.5427
129.9451	293.2622
157.6524	305.3841
185.3598	314.0427
213.0671	312.3110
238.1768	305.3841
256.3598	294.9939
271.9451	281.1402
279.7378	265.5549
283.2012	242.1768
281.4695	221.3963
274.5427	210.1402
266.7500	204.0793
260.6890	201.4817



Avec superposition des points de mesure

```

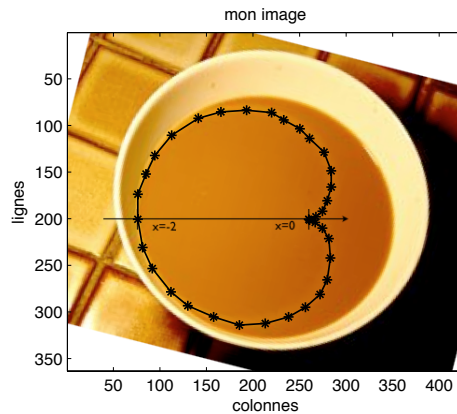
% La cardioide
clear all; clf

subplot(1,2,1)

% on lit l'image et on l'affiche
a=imread('cardio.png');
image(a);
axis equal tight
xlabel('colonnes')
ylabel('lignes')
title('mon image')

% on lit les données et on trace
d=load('cardio.dat');
x=d(:,1);y=d(:,2);
hold on
plot(x,y,'ko-','linewidth',1)
    
```

## 1) Etude



On multiplie y par 0.97 pour rétrécir un peu cet axe. En effet la photo, n'est pas prise exactement dans l'axe.

```

% le centre du référentiel
x0=260;
y0=199;
x=x-x0;
y=-(y-y0);

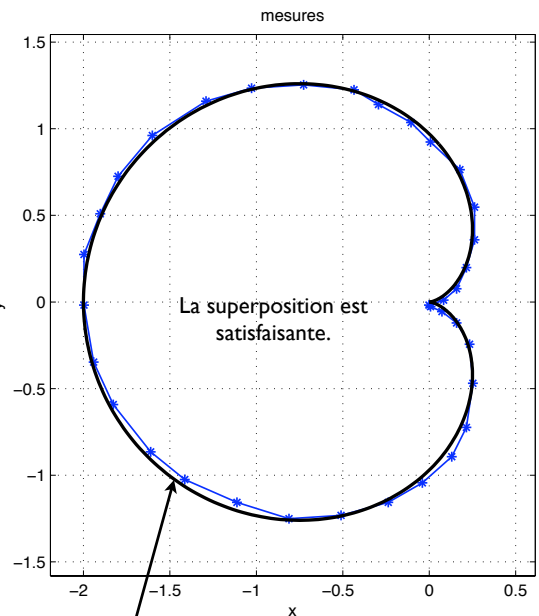
% taille de pixel et remise à l'échelle
taillepix=2/(260-76);
x=x*taillepix;
y=y*taillepix;

% on trace les points de mesure
subplot(1,2,2)
plot(x,y,'bo-','linewidth',1)
xlabel('x')
ylabel('y')
title('mesures')

% on trace une cardioide théorique
th=linspace(0,2*pi,400);
r=(1+cos(th*pi));
x=r.*cos(th);
y=0.97*r.*sin(th);
hold on; plot(x,y,'k-')

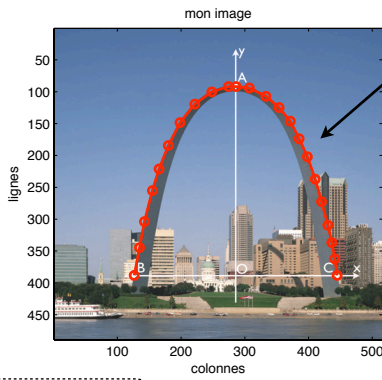
axis equal tight
    
```

La position des points sur l'image ou  $x=0$  et  $x=-2$  est mesurée grâce à l'outil d'étiquetage.



En noir la formule mathématique et en bleu les points de mesure.

### 3) Pour aller plus loin

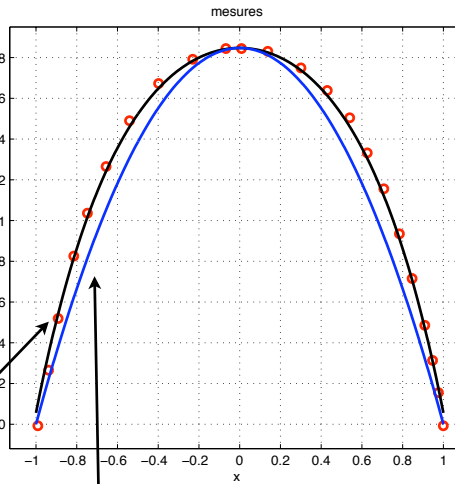


Les points de mesure sont superposés à l'image, en rouge.

Les points de mesure:

126.4377	388.1632
134.8591	344.5252
142.5148	303.9496
154.7641	254.9525
165.4822	221.2671
180.0282	184.5193
198.4021	148.5371
221.3694	119.4451
248.1647	100.3056
274.1944	91.8843
286.4436	91.8843
307.1142	94.1810
333.1439	107.1958
353.8145	124.8042
371.4228	146.2404
385.2033	173.8012
398.2181	202.1276
410.4674	237.3442
420.4199	272.5608
430.3724	309.3086
436.4970	336.8694
441.0905	362.1335
444.9184	388.1632

En rouge les points mesurés, et en noir la chaînette théorique.



En bleu, une parabole qui passe par les points A,B,C. On voit bien que la parabole est trop «pointue».

Après quelques essais, on a choisi  $a=0.43$ . Si  $a$  est plus grand ou plus petit, l'arche est trop large ou trop reserrée.

```

% un script pour le TP3
clear all; clf

subplot(1,2,1)

% on lit l'image et on l'affiche
a=imread('chainette.png');
image(a);
axis equal tight
xlabel('colonnes')
ylabel('lignes')
title('mon image')

% on lit les données et on trace
d=load('chainette.dat');
x=d(:,1);y=d(:,2);
hold on
plot(x,y,'ro','linewidth',2)

% le centre du référentiel
x0=285;
y0=387;
x=x-x0;
y=-(y-y0);

% taille de pixel et remise à l'échelle
taillepix=1/(445-285);
x=x*taillepix;
y=y*taillepix;

% on trace les points de mesure
subplot(1,2,2)
plot(x,y,'ro','linewidth',2)
xlabel('x');
ylabel('y');
title('mesures')

% on trace une chaînette
x=linspace(-1,1,400);
a=0.43; b=1.847+a;
y=b-a*cosh(x/a);
hold on; plot(x,y,'k-','linewidth',2)
grid on

% on trace une parabole
b=1.847; a=1.847;
plot(x,b-a*x.^2,'m')

axis equal tight
    
```