LICENCE DE MECANIQUE

LA 301 - MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°7

I

Déterminer le développement en série de Taylor des fonctions suivantes, au voisinage de z_0.

1°) $f(z) = \sin z \qquad z_0 = \dfrac{\pi}{4}$

2°) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2} \qquad z_0 = 0$

II

Montrer que la fonction f définie au voisinage de l'origine par

$$z \in \mathbf{C} \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{z} - \operatorname{cotg} z \in \mathbf{C}$$

est prolongeable par continuité à l'origine.

Déterminer le développement de Mac-Laurin de la fonction f jusqu'à l'ordre 4.

III

théo IX-4 inégalité de Cauchy, p.116.

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.

S'il existe un disque D de centre A et de rayon r, une constante M réelle positive et $n \in \mathbf{N}$ tels que

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| \leq M \qquad \forall z \notin \overline{D}$$

montrer que la fonction f est un polynôme de degré au plus égal à n.

IV

Soient γ un arc de cercle de centre O, situé dans le demi-plan complexe défini par $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ et f une fonction holomorphe sur ce demi-plan complexe sauf peut-être en un nombre fini de points singuliers z_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Montrer que

$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{|z| \to +\infty} \int_{\gamma^+} f(z) e^{iaz} \, dz = 0 \qquad a > 0$$

UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE ANNEE UNIVERSITAIRE 2008-2009

LICENCE DE MECANIQUE

LA 301 - MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°8

I

Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_{\gamma^+} (z-a)^n \, dz \qquad n \in \mathbb{Z} \quad a \in \mathbb{C}$$

où γ^+ est un contour fermé simple, parcouru dans le sens direct et ne passant par a.

II

On considère la fonction f définie par

$$z \in \mathbb{C} \quad \to \quad f(z) = \frac{4}{(1-z)(z+3)} \in \mathbb{C}$$

1°) Donner les développements de $f(z)$ en série de Laurent suivant les puissances de z dans chacun des trois ouverts de $\mathbb{C}$ suivants

$$|z| < 1 \qquad 1 < |z| < 3 \qquad 3 < |z|$$

2°) En déduire les valeurs des intégrales de la fonction f le long des cercles centrés à l'origine et de rayon 1/2 , 2 et 4, ainsi que le long du cercle centré en 1/2 et de rayon 1.

III

On considère la fonction f définie par

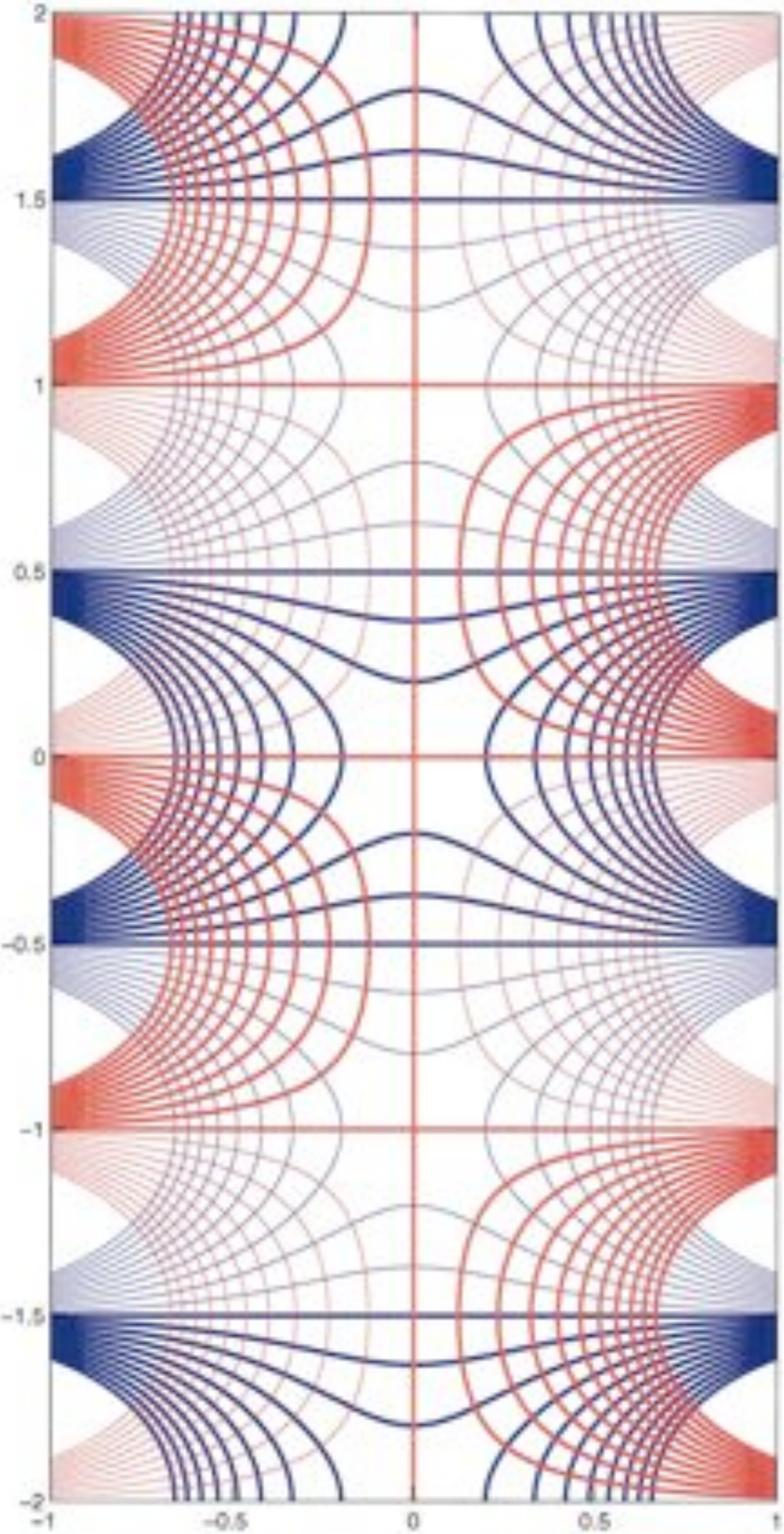
$$z \in \mathbb{C} \quad \to \quad f(z) = ch\,\pi z = \tfrac{1}{2}(e^{\pi z} + e^{-\pi z}) \in \mathbb{C}$$

1°) Quel est le domaine d'holomorphie D_f de la fonction f ?

2°) Montrer que la fonction f est paire et de période $2i$.

$f(z) = \mathrm{ch}(\pi z)$

Lignes de niveaux



→ $\mathrm{Re}(f) \geq 0$

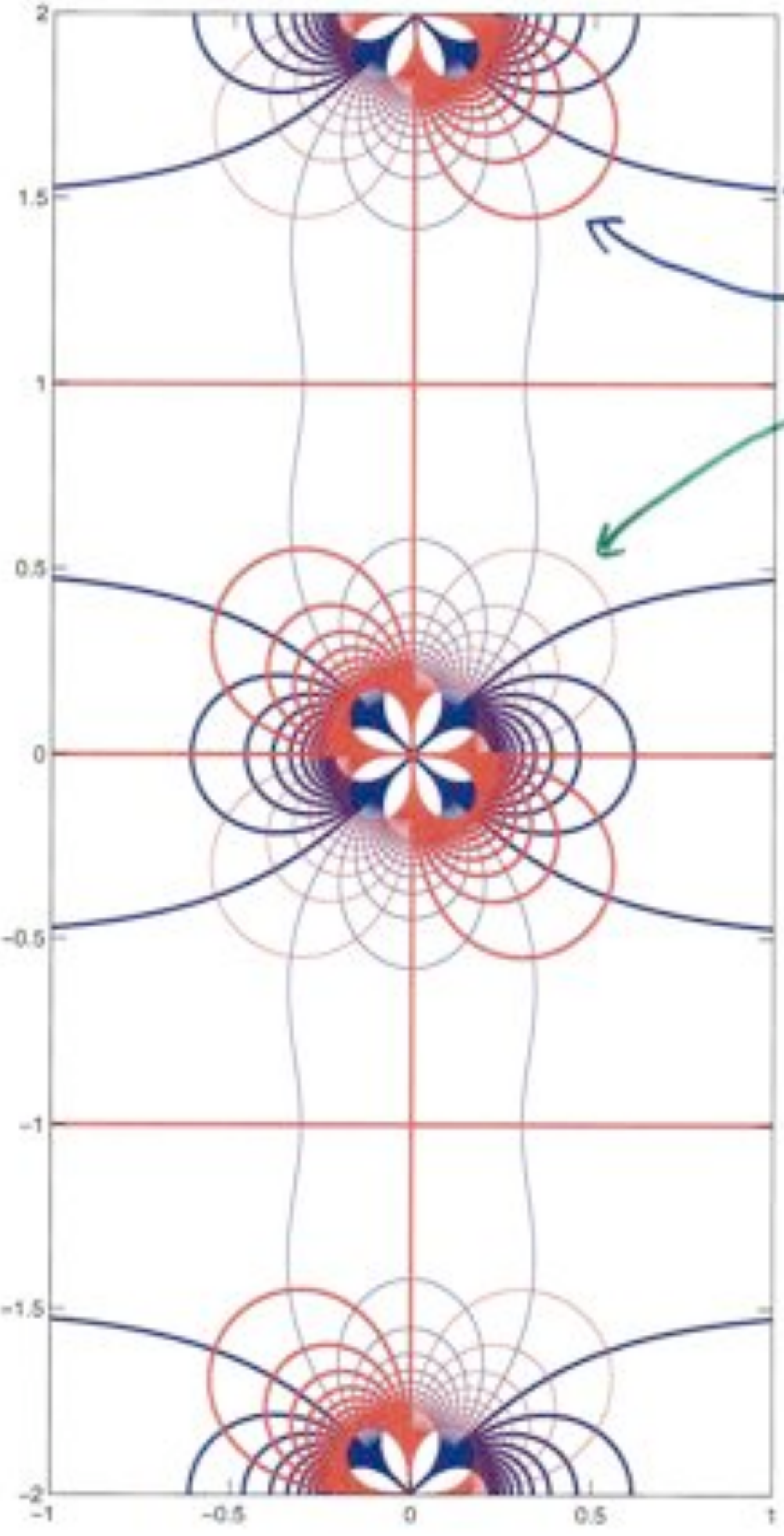
→ $\mathrm{Re}(f) < 0$

→ $\mathrm{Im}(f) < 0$

→ $\mathrm{Im}(f) \geq 0$

$g(z) = \dfrac{1}{B(z)-1}$ lignes de niveaux

$B(z) = \operatorname{ch} \pi z$



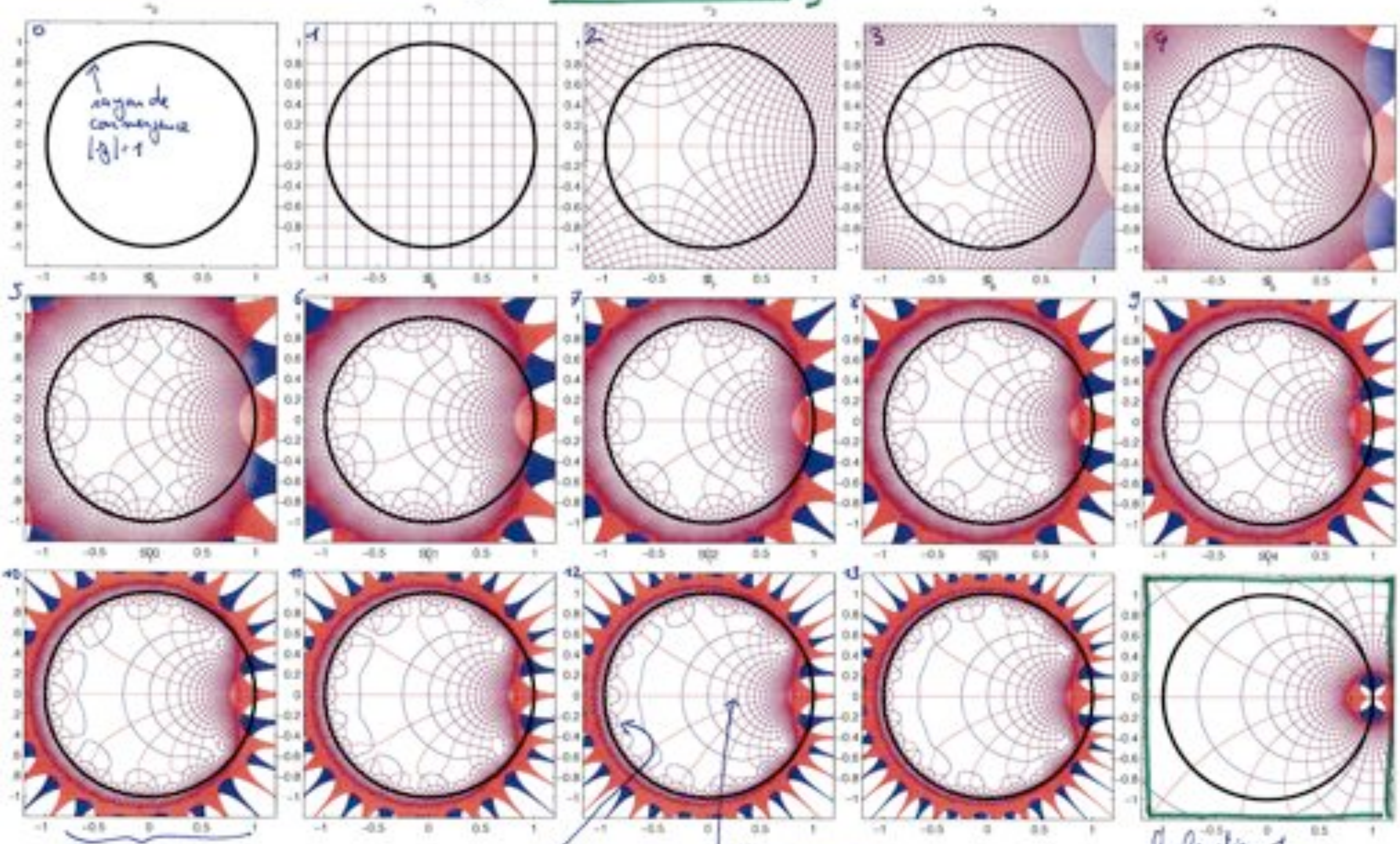
$\mathrm{Re}(g) \geq 0$

$\mathrm{Im}(g) \geq 0$

$\mathrm{Im}(g) < 0$

```
% code Matlab pour la convergence des sÉries complexes

clf;
%%%% construction du plan complexe
x=linspace(-2.2,2.2,500);
y=linspace(-0.5,0.5,500);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
z=X+i*Y;

%%%% position des graphs dans la page
n1=6; n2=2; n=n1*n2;

%%%% lignes de niveau
cc=linspace(-0.5,0.5,51); % les valeurs des contours

f=0*X; % initialisation de la serie

%%%% boucle sur l'indice de la serie
for ind=1:n
    disp(ind)
ssubplot(n1,n2,ind);

%%%% on ajoute un terme a la serie
k=ind-1;
if ind~=n;
    An=((4+3*(k+1))/(4^(k+2))-1)/9;
    f=f+An*z.^(2*k);
else
    % pour le dernier graph, on met la limite
    f=1./((z.^2-1).*(z.^2-4).^2);
end

%%%% lignes de niveaux paries reelle et imaginaire
contour(X,Y,real(f),cc,'b'); hold on
contour(X,Y,imag(f),ccm,'r');

%%% le cercle unitaire
ee=exp(i*linspace(0,2*pi));
plot(real(ee),imag(ee),'k','linewidth',3);

%%% formatage du graph
hold off
axis equal;
xlim([x(1),x(end)])
ylim([y(1),y(end)])
title(['S_' num2str(ind-1)]);
drawnow
end
```

$\boxed{\text{Convergence de la série géométrique}}$ $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ on ajoute les termes de la série un à un.



$\sum_{n=0}^{10} z^n$

ici ça converge très lentement

ici ça converge rapidement

la fonction $\frac{1}{1-z}$

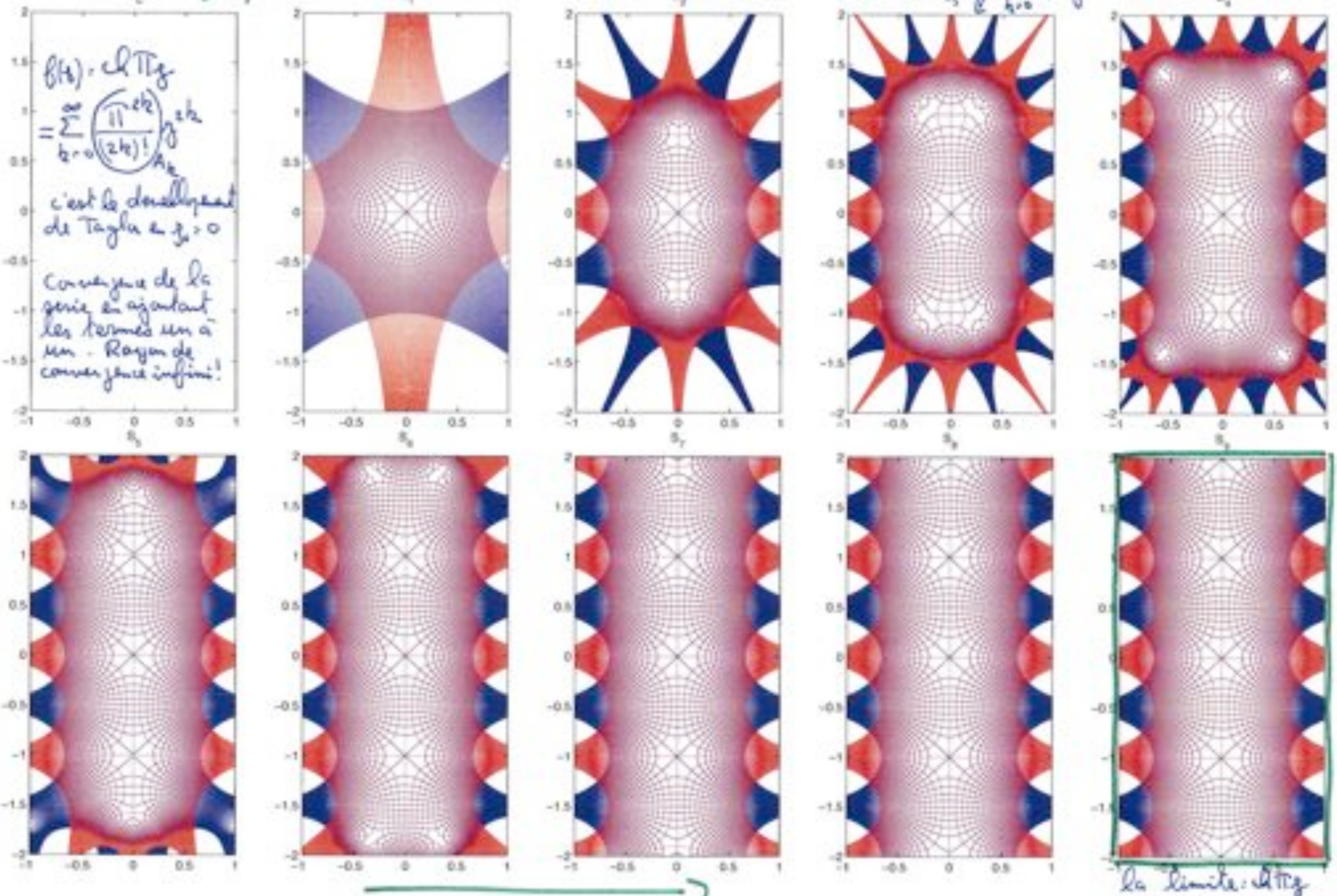
TD 8, exercice III

$f(z) = \mathrm{ch}\,\pi z = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}}_{A_k} z^{2k}$

c'est le développement de Taylor en $z_0 = 0$

Convergence de la série en ajoutant les termes un à un. Rayon de convergence infini !

$S_3 \leftarrow \sum_{k=0}^{3} A_k z^{k}$

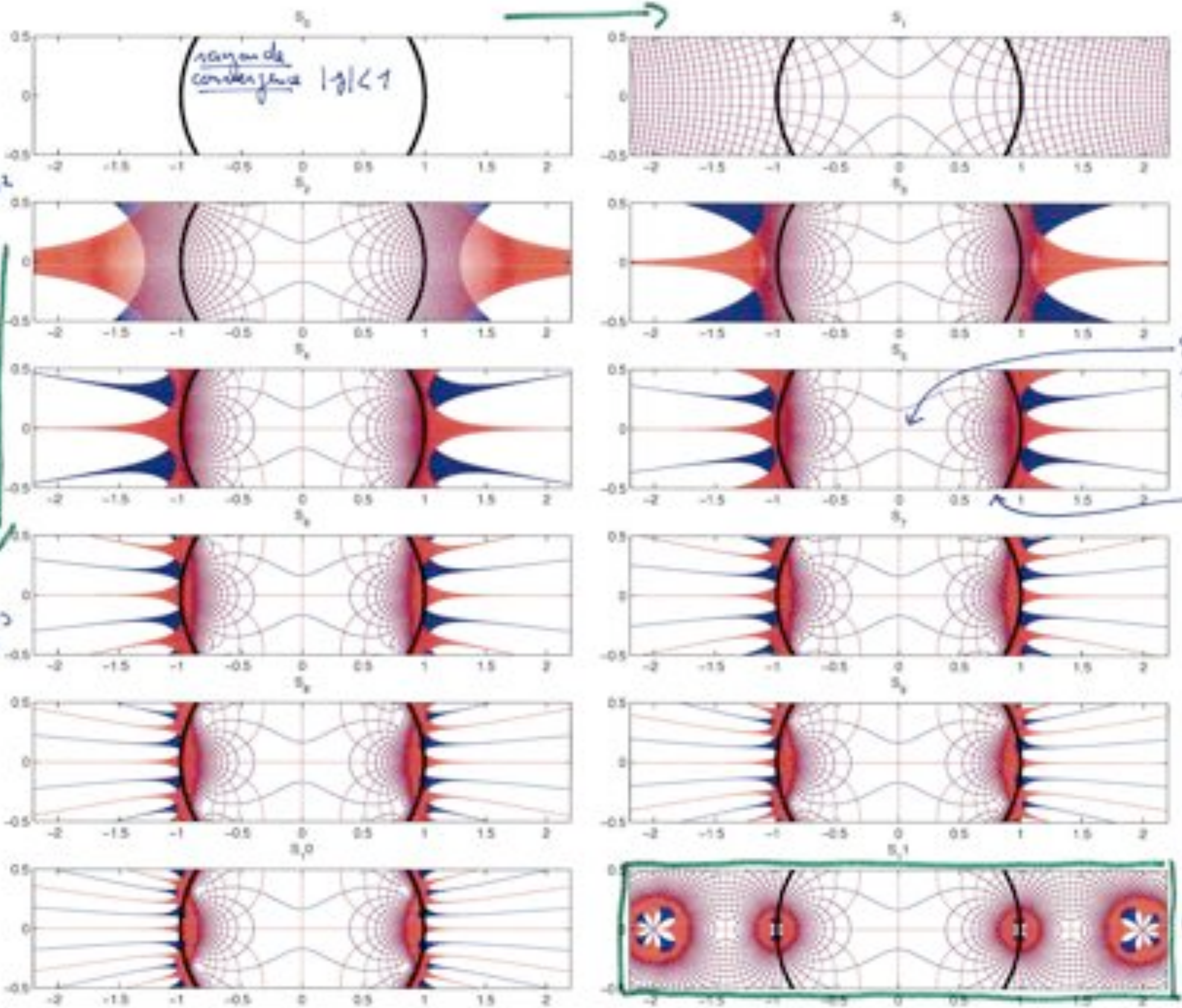


la limite : $\mathrm{ch}\,\pi z$

TD7
exercice I
question 2

$$B(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4+3(n+1)}{4^{n+2}}-1\right) \times z^{2n}$$



la somme des 6 premier termes

ça converge rapidement au centre

converge lentement sur les bords

la limite $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$