UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE ANNEE UNIVERSITAIRE 2008-2009

LICENCE DE MECANIQUE

LA 301 - MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°6

I

1°) Si C_1 désigne le cercle d'équation $|z| = R$, montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_1^+} \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)} dz = 0$$

2°) Si C_2 désigne le cercle d'équation $|z-2| = R$, en déduire que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_2^+} \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)} dz = 0$$

3°) Reprendre la question 2 avec le cercle d'équation $|z+1| = 2$.

II

Enoncer et démontrer le théorème de Gauss sur la valeur de la moyenne.

Application:

1°) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right) d\theta$$

2°) Déterminer la valeur moyenne de la quantité

$$P(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$$

sur le cercle d'équation

$$|z-5+2i| = 3.$$

III

1°) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$g(z) = \frac{1}{z^2+1} \qquad z \in \mathbb{C}$$

2°) On considère les quatre courbes suivantes, d'équations

$$\gamma_1 : 2|z| = 1 \qquad \gamma_2 : |2z-1| = 2 \qquad \gamma_3 : 2|z+(1+i)| = 3 \qquad \gamma_3 : |z| = 2$$

Préciser la nature de chaque courbe et calculer les intégrales

$$I_i = \int_{\gamma_i} f(z) g(z) dz \qquad i = 1,2,3,4$$

où f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et où les courbes γ_i sont parcourues une et une seule fois dans le sens direct.