TD3
exercice 3
question 2

Trouver les fonctions holomorphes f telles que $Re(f) = \varphi(x) + \psi(y) = P$
φ et ψ de classe C^2

Une première méthode consiste à imposer les conditions de Cauchy.
Cela passe par la détermination de φ puis la construction de f.

Au lieu de cela, on va commencer par imposer que P soit harmonique puis construire f ensuite en utilisant $f(z) = 2P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - P(0,0) + ik$
(théorème IV-13)

$$\Delta P = \varphi''(x) + \psi''(y) = 0 \implies \underbrace{\varphi''(x)}_{\text{(fonction de } x)} = -\underbrace{\psi''(y)}_{\text{(fonction de } y)} = a$$

<u>les deux doivent être constants</u>

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{a}{2}x^2 + bx + c \\ \psi(y) &= -\frac{a}{2}y^2 + dy + e \end{aligned}\right) \to P(x,y) = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) + bx + dy + k$$

$(c+e)$

<u>on cherche f</u> :
$$\begin{aligned} f(z) &= 2P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - P(0,0) + ik \\ &= a\left(\frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{4}\right) + b\frac{z}{} + d\frac{z}{i} + 2k - k + ik \\ &= \frac{a}{2}z^2 + z\left(b + \frac{d}{i}\right) + k + ik \end{aligned}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{a}{2}z^2 + Cz + R}, \quad \boxed{\begin{matrix} C, R \in \mathbb{C} \\ a \in \mathbb{R} \end{matrix}} \text{ constantes.}$$

Voici donc la forme de toutes les fonctions holomorphes possibles dont la partie réelle est de la forme $\varphi(x) + \psi(y)$