TD3 LA301

exercice I, question 1

Trouver, si c'est possible, les fonctions holomorphes ayant pour partie réelle $P(x,y)$:

$$P(x,y) = \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}$$

- Il faut tout d'abord montrer que P est harmonique : on calcule P_x, P_{xx}, P_y, P_{yy} et on vérifie que $P_{xx} + P_{yy} = 0$ (c'est un peu long...)

- Maintenant on cherche f dont P est la partie réelle.

On peut utiliser différents méthodes : intégration à partir des conditions de Cauchy :
$$\begin{cases} P_x = Q_y \\ P_y = -Q_x \end{cases}$$

On peut aussi utiliser le théorème IV-13
$$f(z) = 2P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + P(a,b) - 2P\left(\frac{a+ib}{2}, \frac{a+ib}{2i}\right) + iK \quad K \in \mathbb{R}$$
en faisant attention à choisir un point (a,b) où P est définie
(on utilise $\cosh(iz) = \cos(z)$ et aussi $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$)

ici, on va utiliser le théorème IV-11 :
$f'(z) = P_x(z,0) - iP_y(z,0)$ et on va intégrer $f'(z)$ pour en tirer $f(z)$

$$P_x(z,0) = \frac{2\cos 2z - 2}{(1-\cos 2z)^2}, \quad P_y(z,0) = 0$$

$$\rightarrow f'(z) = \frac{-2}{1-\cos 2z} = \frac{2}{2\cos^2 z - 2} = \frac{-1}{\sin^2 z} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 z)$$

qui s'intègre en $\boxed{f(z) = \operatorname{cotg} z + C}$

Maintenant, pour savoir si C est dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, on re-exprime f en fonction de x et y et on compare avec $\sin 2x / (\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)$, pour trouver que $C = iK$, $K \in \mathbb{C}$.

(c'est un peu calculatoire et on utilise les formules du type : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ ...)