UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE **ANNEE UNIVERSITAIRE 2008-2009**

TD 2

LA 301 - MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°2

I

Soit f l'application définie par

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2 \to f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}\in\mathbb{R}$$

Montrer que l'application f est continue mais non différentiable à l'origine de $\mathbb{R}^2$.

II

On considère la fonction g définie par

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2 \to g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}\in\mathbb{R}$$

1°) Etudier la continuité de la fonction g.

2°) Etudier la différentiabilité de la fonction g à l'origine $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$.

III

On considère la fonction f_α définie par

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \to f_\alpha(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xy+yz+zx}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} & \text{si} \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}\in\mathbb{R}$$

où α est une constante réelle donnée.

En discutant suivant les valeurs de la constante α, étudier sur $\mathbb{R}^3$

1°) la continuité de la fonction f_α.

2°) l'existence des dérivées partielles premières de la fonction f_α.

3°) la différentiabilité de la fonction f_α.

4°) la classe C^1 de la fonction f_α.

IV

On donne la fonction f définie par

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2 \to f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}\in\mathbb{R}$$

Etudier la continuité de la fonction f et l'existence des dérivées partielles premières de la fonction f à l'origine.

Que peut-on en conclure ?