LICENCE DE MECANIQUE

LA 301 - MATHEMATIQUES

TRAVAUX DIRIGES N°17

On donne le système différentiel (1) suivant

$$\frac{dX}{dt} = A(t).X + B(t) \qquad (1)$$

avec

$$A(t) = \begin{bmatrix} a'(t) & 2[a'(t) - b'(t)] \\ a'(t) - b'(t) & b'(t) \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{2b(t)-a(t)} \\ -e^{2b(t)-a(t)} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux fonctions distinctes définies et de classe C^1 sur un intervalle $I \subseteq \mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ et où a' et b' sont les dérivées de a et b respectivement.

On suppose

$$a(t_0) = b(t_0) = 0 \qquad t_0 \in I$$

et on notera

$$\frac{dX}{dt} = A(t).X \qquad (2)$$

le système sans second membre associé à (1).

1°) Montrer qu'il existe une solution unique du système différentiel (1), définie sur I et vérifiant $X(t_0) = X_0$ pour $t_0 \in I$.

2°) On considère la matrice

$$\mathcal{A}(t) = \int_{t_0}^{t} A(u)\,du \qquad \forall\, t \in I$$

Déterminer, en fonction de $a(t)$ et $b(t)$, les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\mathcal{A}(t)$ pour $t \in I$.

3°) En déduire qu'il existe une matrice constante S, que l'on déterminera, telle que la matrice $D(t) = \overset{-1}{S}.\mathcal{A}(t).S$ soit diagonale pour $t \in I$.

4°) Calculer alors la matrice $\left[\mathcal{A}(t)\right]^n$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

En déduire, en justifiant les calculs, la matrice résolvante $R(t, t_0)$ de (2), en fonction de $t \in I$.

5°) Donner la solution de (2) telle que

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

6°) En utilisant la méthode de la variation des constantes, déterminer la solution de (1) telle que

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Question 1

Soit f la fonction définie sur $\Omega = I \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ par

$$(t, X) \in \Omega \longrightarrow f(t, X) = A(t)X + B(t) \in \mathbb{R}^2$$

Comme les fonctions a et b sont de classe C^1 sur I
$\Longrightarrow$ la fonction f est de classe C^0 sur Ω
De plus

$$\| f(t, X_1) - f(t, X_2) \|_2 = \| A(t)(X_1 - X_2) \|_2$$

$$= \frac{\| A(t)(X_1 - X_2) \|_2 \cdot \| X_1 - X_2 \|_2}{\| X_1 - X_2 \|_2}$$

$$\leqslant \left[\sup_{X \neq 0} \frac{\| A(t) . X \|_2}{\| X \|_2} \right] \| X_1 - X_2 \|_2 = \| A(t) \| \cdot \| X_1 - X_2 \|$$

Nous vérifions donc

$$\begin{cases} \| f(t, X_1) - f(t, X_2) \|_2 \leqslant k \| X_1 - X_2 \|_2 \\ \forall (t, X_1), (t, X_2) \in \Omega \end{cases}$$

en prenant

$$k = \| A(t) \|$$

$\Longrightarrow$ la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω

Comme f est de classe C^0 et localement lipschitzienne par rapport à x sur Ω, par tout point (t_0, X_0) de Ω passe une solution unique de (1).

Question 2

Soit la matrice

(2)

$$\mathcal{A}(t) = \int_{t_0}^{t} A(u)\,du = \begin{bmatrix} a & 2(a-b) \\ a-b & b \end{bmatrix}$$

où nous écrivons $a(t) = a$ et $b(t) = b$ dans la suite pour simplifier l'écriture.

Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 2(a-b) \\ a-b & b-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-a)(\lambda-b) - 2(a-b)^2$$

$$= \lambda^2 - (a+b)\lambda - (2a^2 - 5ab + 2b^2)$$

Le discriminant de ce trinôme est

$$\Delta = (a+b)^2 + 4(2a^2 - 5ab + 2b^2)$$

$$= 9a^2 - 18ab + 9b^2 = [3(a-b)]^2 > 0$$

Les racines du trinôme sont donc réelles distinctes et leurs valeurs sont

$$\lambda = \frac{(a+b) \pm 3(a-b)}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\lambda_1 = 2a - b \qquad \lambda_2 = 2b - a}$$

éterminons les vecteurs propres $\vec{V}_{\lambda_i}$ relatifs ux valeurs propres λ_i

<u>Vecteur</u> $\vec{V}_{\lambda_1}$: on a

$$\begin{bmatrix} a & 2(a-b) \\ a-b & b \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = (2a-b)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha a + 2\beta(a-b) = (2a-b)\alpha \\ \alpha(a-b) + \beta b = (2a-b)\beta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (b-a)\alpha + 2(a-b)\beta = 0 \\ (a-b)\alpha + 2(b-a)\beta = 0 \end{cases}$$

Cela donne

$$\boxed{\vec{V}_{\lambda_1} \left| \begin{matrix} 2\beta \\ \beta \end{matrix} \right.}$$

* vecteur $\vec{V}_{\lambda_2}$: on a

$$\begin{bmatrix} a & 2(a-b) \\ a-b & b \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = (2b-a)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha a + 2\beta(a-b) = (2b-a)\alpha \\ \alpha(a-b) + \beta b = (2b-a)\beta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2(a-b)\alpha + 2(a-b)\beta = 0 \\ (a-b)\alpha + (a-b)\beta = 0 \end{cases}$$

Cela donne

$$\boxed{\vec{V}_{\lambda_2} \left| \begin{matrix} \alpha \\ -\alpha \end{matrix} \right.}$$

Question 3

Soit la matrice

$$\boxed{S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

D'après la Question 2, la matrice S est une matrice de vecteurs propres

$\Longrightarrow$ la matrice $S^{-1}.A(t).S$ est donc

$$\boxed{D(t) = \begin{bmatrix} 2a-b & 0 \\ 0 & 2b-a \end{bmatrix}}$$

Question 4

D'après la Question 3, on a

$$A(t) = S.D(t).S^{-1}$$

$$\Longrightarrow [A(t)]^n = S[D(t)]^n.S^{-1}$$

Or

$$[D(t)]^n = \begin{bmatrix} (2a-b)^n & 0 \\ 0 & (2b-a)^n \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A(t)]^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (2a-b)^n & 0 \\ 0 & (2b-a)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (2a-b)^n & (2a-b)^n \\ -(2b-a)^n & 2(2b-a)^n \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{[A(t)]^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2(2a-b)^n + (2b-a)^n & 2(2a-b)^n - 2(2b-a)^n \\ (2a-b)^n - (2b-a)^n & (2a-b)^n + 2(2b-a)^n \end{bmatrix}}$$

Déterminons la matrice $R(t, t_0)$.
Nous avons

$$A(t).A(u) = \begin{bmatrix} a'(t) & 2[a'(t)-b'(t)] \\ a'(t)-b'(t) & b'(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a'(u) & 2[a'(u)-b'(u)] \\ a'(u)-b'(u) & b'(u) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a'(t)a'(u) + 2[a'(t)-b'(t)][a'(u)-b'(u)] & 2a'(t)[a'(u)-b'(u)] + 2[a'(t)-b'(t)]b'(u) \\ a'(u)[a'(t)-b'(t)] + b'(t)[a'(u)-b'(u)] & 2[a'(t)-b'(t)][a'(u)-b'(u)] + b'(t)b'(u) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a'(t)a'(u) + 2[a'(t)-b'(t)][a'(u)-b'(u)] & 2[a'(t)a'(u) - b'(t)b'(u)] \\ a'(t)a'(u) - b'(t)b'(u) & 2[a'(t)-b'(t)][a'(u)-b'(u)] + b'(t)b'(u) \end{bmatrix}$$

Le résultat étant symétrique par rapport à t et u

$\Longrightarrow$ $A(t).A(u) = A(u).A(t)$

La matrice $R(t, t_0)$ est donc

$$R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(u)du} = e^{\mathcal{A}(t)}$$ (6)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\mathcal{A}(t)]^n}{n!}$$

D'après ce qui précède, on a donc

$$R(t,t_0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2a-b)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2b-a)^n}{n!} & 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2a-b)^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2b-a)^n}{n!} \\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2a-b)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2b-a)^n}{n!} & \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2a-b)^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2b-a)^n}{n!} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{R(t,t_0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{2a-b} + e^{2b-a} & 2e^{2a-b} - 2e^{2b-a} \\ e^{2a-b} - e^{2b-a} & e^{2a-b} + 2e^{2b-a} \end{bmatrix}}$$

Question 5

La solution du système (2) vérifiant

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$$

est

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(t,t_0)\,X_0$$

e qui donne

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (2e^{2a-b} + e^{2b-a})\alpha + 2(e^{2a-b} - e^{2b-a})\beta \\ (e^{2a-b} - e^{2b-a})\alpha + (e^{2a-b} + 2e^{2b-a})\beta \end{pmatrix}}$$

Question 6

La solution de (1) vérifiant

$$X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

est

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(t,t_0)\left[X_0 + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(u,t_0)\, B(u)\, du \right]$$

Comme, d'après la Question 4

$$R(u,t_0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{2a-b} + e^{2b-a} & 2e^{2a-b} - 2e^{2b-a} \\ e^{2a-b} - e^{2b-a} & e^{2a-b} + 2e^{2b-a} \end{bmatrix}$$

dont le déterminant $\Delta(u)$ est, d'après le théorème de Jacobi-Liouville

$$\Delta(u) = \Delta(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{u} \operatorname{tr}[A(v)]\,dv\right\} = \exp\int_{t_0}^{u}[a'(v) + b'(v)]\,dv$$

$$= e^{a+b}$$

$$\Longrightarrow R^{-1}(u,t_0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{2a-b} + 2e^{2b-a} & 2e^{2b-a} - 2e^{2a-b} \\ e^{2b-a} - e^{2a-b} & 2e^{2a-b} + e^{2b-a} \end{bmatrix}\frac{1}{e^{a+b}}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{a-2b} + 2e^{b-2a} & 2e^{b-2a} - 2e^{a-2b} \\ e^{b-2a} - e^{a-2b} & 2e^{a-2b} + e^{b-2a} \end{bmatrix}$$

8

$$\Rightarrow \overset{-1}{R}(u,t_0)\,B(u) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{a-2b}+2e^{b-2a} & 2e^{b-2a}-2e^{a-2b} \\ e^{b-2a}-e^{a-2b} & 2e^{a-2b}+e^{b-2a}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} e^{2b-a} \\ -e^{2b-a}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2e^{3b-3a}-2e^{3b-3a}+2 \\ e^{3b-3a}-1-2-e^{3b-3a}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Il vient donc

$$X_0 + \int_{t_0}^{t} \overset{-1}{R}(u,t_0)\,B(u)\,du = \begin{pmatrix} x_0+(t-t_0) \\ y_0-(t-t_0)\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$X(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{2a-b}+e^{2b-a} & 2e^{2a-b}-2e^{2b-a} \\ e^{2a-b}-e^{2b-a} & e^{2a-b}+2e^{2b-a}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_0+(t-t_0) \\ y_0-(t-t_0)\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{X(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (2e^{2a-b}+e^{2b-a})x_0 - 2(e^{2a-b}-e^{2b-a})y_0 + 3(t-t_0)e^{2b-a} \\ (e^{2a-b}-e^{2b-a})x_0 + (e^{2a-b}+2e^{2b-a})y_0 - 3(t-t_0)e^{2b-a}\end{pmatrix}}$$

utre méthode : effectuons la variation des constantes ans la solution de (2)

n a

$$x' = \frac{1}{3}\Big\{ (2e^{2a-b}+e^{2b-a})\alpha' + 2(e^{2a-b}-e^{2b-a})\beta'$$
$$+ [2(2a'-b')e^{2a-b} + (2b'-a')e^{2b-a}]\alpha$$
$$+ 2[(2a'-b')e^{2a-b} - (2b'-a')e^{2b-a}]\beta \Big\}$$

$$y' = \frac{1}{3}\Big\{ (e^{2a-b}-e^{2b-a})\alpha' + (e^{2a-b}+2e^{2b-a})\beta'$$
$$+ [(2a'-b')e^{2a-b} - (2b'-a')e^{2b-a}]\alpha$$
$$+ [(2a'-b')e^{2a-b} + 2(2b'-a')e^{2b-a}]\beta$$

Reportons dans le système, ce qui donne après simplications

$$\begin{cases} \left[(2e^{2a-b} + e^{2b-a})\alpha' + 2(e^{2a-b} - e^{2b-a})\beta'\right] = 3e^{2b-a} \\ \left[(e^{2a-b} - e^{2b-a})\alpha' + (e^{2a-b} + 2e^{2b-a})\beta'\right] = -3e^{2b-a} \end{cases}$$

Le déterminant du système est

$$9e^{a+b} \neq 0$$

qui est le déterminant (au cœfficient près puisque nous avons multiplié chaque ligne par 3) de $R(t, t_0)$.

Nous avons donc

$$* \ \alpha' = \frac{\begin{vmatrix} 3e^{2b-a} & 2(e^{2a-b} - e^{2b-a}) \\ -3e^{2b-a} & e^{2a-b} + 2e^{2b-a} \end{vmatrix}}{9e^{a+b}}.$$

$$= \frac{3e^{a+b} + 6e^{2(2b-a)} + 6e^{a+b} - 6e^{2(2b-a)}}{9e^{a+b}} = 1$$

$$* \ \beta' = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{2a-b} + e^{2b-a} & 3e^{2b-a} \\ e^{2a-b} - e^{2b-a} & -3e^{2b-a} \end{vmatrix}}{9e^{a+b}}$$

$$= \frac{-6e^{a+b} - 3e^{2(2b-a)} - 3e^{a+b} + 3e^{2(2b-a)}}{9e^{a+b}} = -1$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = t + \lambda \\ \beta = -t + \mu \end{cases}$$

Reportons dans la solution de (2)

(10)

$$3X = \begin{pmatrix} (2e^{2a-b} + e^{2a-b})(t+\lambda) + 2(e^{2a-b} - e^{2b-a})(-t+\mu) \\ (e^{2a-b} - e^{2b-a})(t+\lambda) + (e^{2a-b} + 2e^{2b-a})(-t+\mu) \end{pmatrix}$$

Pour $t = t_0$, on doit alors vérifier

$$\begin{cases} 3x_0 = 3(t_0+\lambda) \\ 3y_0 = 3(-t_0+\mu) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = x_0 - t_0 \\ \mu = y_0 + t_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-t_0) + x_0 \\ -(t-t_0) + y_0 \end{pmatrix}$$

Ce qui redonne

$$X_0 + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(u,t_0)\, B(u)\, du$$

déjà trouvé comme

$$X = R(t,t_0) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = R(t,t_0)\left[X_0 + \int_{t_0}^{t} R^{-1}(u,t_0)\, B(u)\, du \right]$$

$\Rightarrow$ nous retrouvons la solution de (1) précédemment déterminée.