EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU 1ER ORDRE

Equation différentielle exacte

$$f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy=0$$

Si f et g sont de classe C^1 et vérifient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$, alors $\exists\, U(x,y)$ telle que $f=\dfrac{\partial U}{\partial x}$ et $g(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y)$.

La solution est $U(x,y)=Cte$.

Equation différentielle à variables séparées

$$\frac{dy}{dx}=f(x).g(y)$$

Poser $\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)\,dx$ et intégrer.

Equation différentielle homogène

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$$

* $f(\frac{y}{x})=\frac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x} \Rightarrow$ c'est une équation à variables séparées.
* $f(\frac{y}{x})\neq\frac{y}{x} \Rightarrow$ poser $y=tx \Rightarrow \dfrac{dx}{x}=\dfrac{dt}{f(t)-t} \Rightarrow$ c'est une équation à variables séparées et la solution est donnée sous forme paramétrique $[x=x(t),\, y=y(t)=tx(t)]$.

Equation différentielle linéaire

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)\,y=c(x)$$

Intégrer l'équation sans second membre qui est une équation à variables séparées puis ajouter une solution particulière de l'équation complète ou faire varier la constante.

Equation différentielle de Bernouilli

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)y^{\alpha} \qquad \alpha\neq 0{,}1$$

Diviser par y^{α} et poser $z=y^{1-\alpha}$

$\Rightarrow a(x)\,z'+(1-\alpha)\,b(x)\,z=(1-\alpha)\,c(x) \Rightarrow$ c'est une équation différentielle linéaire.

Equation différentielle de Ricatti

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)\,y=c(x)\,y^2+d(x)$$

Si Y est une solution particulière, on pose $y=Y+z$

$\Rightarrow\ a(x)z'+[b(x)-2Y\,c(x)]z=c(x)z^2\ \Rightarrow$ c'est une équation de Bernouilli.

Equation différentielle de Lagrange

$$y=x\,f(y')+g(y') \qquad f\neq id$$

Poser $y'=p$ et dériver par rapport à $x\ \Rightarrow\ p-f(p)=[xf'(p)+g'(p)]\dfrac{dp}{dx}$

1°) soit p_0 une racine de l'équation $p-f(p)=0\ \Rightarrow\ p_0=Cte\ \Rightarrow$ cela donne une solution singulière $y=x\,f(p_0)+g(p_0)=x\,p_0+g(p_0)$.

2°) si p est variable $\Rightarrow\ [p-f(p)]\dfrac{dx}{dp}-f'(p)x=g'(p)\ \Rightarrow$ c'est une équation linéaire que l'on intègre pour obtenir la solution générale sous forme paramétrique $[x=x(p)\,,y=y(p)]$.

Equation différentielle de Clairaut

$$y=x\,y'+g(y')$$

Poser $y'=p$ et dériver par rapport à $x\ \Rightarrow\ [x+g'(p)]\dfrac{dp}{dx}=0$.

1°) si $\dfrac{dp}{dx}=0\ \Rightarrow\ p=y'=C\ \Rightarrow\ y=Cx+g(C)\ \Rightarrow$ c'est une famille de droites formant la solution générale.

2°) si $x+g'(p)=0\ \Rightarrow x=-g'(p)\ \Rightarrow$ cela donne une solution singulière sous forme paramétrique $[x=-g'(p)\,,y=-p\,g'(p)+g(p)]$ qui est l'enveloppe de la famille de droites.