EXERCICE I

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + e^{-x}\sin y = e^{-x}(\sin y - x\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{-x}(x\cos y - \cos y + y\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -e^{-x}(\sin y - x\sin y + y\cos y) - e^{-x}\sin y = -e^{-x}(2\sin y - x\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = e^{-x}(-x\sin y + \sin y + \sin y + y\cos y)$$

$\longrightarrow \Delta P = 0$

Comme P est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, P est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ P est harmonique sur $\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$ P est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Comme $P(0,0) = 0$

$$\Longrightarrow f(z) = 2P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - P(0,0) + iK = 2P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + iK \quad K \in \mathbb{R}$$

$$= 2e^{-\frac{z}{2}}\left[\frac{z}{2}\sin\left(\frac{z}{2i}\right) - \frac{z}{2i}\cos\left(\frac{z}{2i}\right)\right] + iK$$

$$= ze^{-\frac{z}{2}}\left[-\sin\left(i\frac{z}{2}\right) + i\cos\left(i\frac{z}{2}\right)\right] + iK$$

$$= ize^{-\frac{z}{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{z}{2} - \operatorname{sh}\frac{z}{2}\right) + iK$$

$$= ize^{-\frac{z}{2}} \cdot e^{-\frac{z}{2}} + iK$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{f(z) = ize^{-z} + iK \qquad K \in \mathbb{R}}$$

EXERCICE II

La fonction définie par

$$(x+iy) \in \mathbb{C} \longrightarrow P(x,y) + i\,Q(x,y) = (x^2-y^2) + iy(3x^2-y^2) \in \mathbb{C}$$

donne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x \neq \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y \neq -\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -6xy \end{cases}$$

Les conditions de Cauchy ne sont pas vérifiées

$\Longrightarrow$ $P+iQ$ n'est pas holomorphe

Remarque : P et Q sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2$ mais P est la partie réelle de z^2 et Q la partie imaginaire de z^3.

Ce qui montre que $f = P+iQ$ harmonique n'est pas suffisant pour que f soit holomorphe. Cela l'est pour que P (ou Q) soit la partie réelle d'une fonction holomorphe (partie imaginaire).

EXERCICE III

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)$$
$$= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$\Longrightarrow |\cos z|^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y$$
$$= (1-\sin^2 x)\operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x(\operatorname{ch}^2 y - 1)$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{|\cos z|^2 = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$$

$|\cos z|$ augmente indéfiniment si et seulement si $\mathrm{ch}^2 y$ augmente indéfiniment $\Longleftrightarrow$ y tend vers $\pm\infty$.

On a

$$\cos z = 2i \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x \, \mathrm{ch}\, y = 0 & (1) \\ \sin x \, \mathrm{sh}\, y = -2 & (2) \end{cases}$$

$(1) \longrightarrow \cos x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

On porte dans (2)

$\Longrightarrow (-1)^k \mathrm{sh}\, y = -2 \longrightarrow \mathrm{sh}\, y = (-1)^{k+1} 2$

$\Longrightarrow y = \mathrm{Argsh}\,(-1)^{k+1} 2 = (-1)^{k+1} \mathrm{Argsh}\, 2$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\,(-1)^{k+1} \mathrm{Argsh}\, 2 \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Remarque :

$$\mathrm{Argsh}\, \alpha = \theta \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{sh}\,\theta = \alpha \\ \mathrm{ch}\,\theta = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\theta} = \sqrt{1+\alpha^2} \end{cases}$$

$\longrightarrow e^\theta = \mathrm{ch}\,\theta + \mathrm{sh}\,\theta = \alpha + \sqrt{1+\alpha^2} \Longrightarrow \theta = \mathrm{Log}\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right)$

$\longrightarrow$

$$\boxed{z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\,(-1)^{k+1} \mathrm{Log}\left(2 + \sqrt{5}\right) \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

EXERCICE IV

$$z \in \mathbb{C} \longrightarrow f(z) = \frac{7-z}{(z-1)^2(z+2)}$$

1°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{C} - \{-2, 1\}$

-2 est un pôle simple de f (racine simple du dénominateur) et 1 est un pôle double (racine double du dénominateur).

2°) D'après le second lemme de Jordan, on a

$$z f(z) = \frac{z(7-z)}{(z-1)^2(z+2)} = -\frac{1}{z}\,\frac{1-\frac{7}{z}}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2\left(1+\frac{2}{z}\right)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{|z|=R \to +\infty} z f(z) = 0 \Longrightarrow \lim_{|z|=R \to +\infty} \int_{C_1^+} f(z)\,dz = 0$$

3°) D'après le second lemme de Jordan, on a

$$(z-i) f(z) = \frac{(z-i)(7-z)}{(z-1)^2(z+2)^2} = \frac{(z-i)\left[(7-i)-(z-i)\right]}{\left[(z-i)-(1-i)\right]^2\left[(z-i)+(2+i)\right]}$$

$$= \frac{-1}{z-i}\,\frac{1-\frac{7-i}{z-i}}{\left(1-\frac{1-i}{z-i}\right)^2\left(1+\frac{2+i}{z-i}\right)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{|z-i|=r \to +\infty} (z-i) f(z) = 0 \longrightarrow \lim_{|z-i|=r \to +\infty} \int_{C_2^+} f(z)\,dz$$

4°)

$$\int_{C_3^+} f(z)\,dz = \int_{C_3^+} \frac{\frac{7-z}{z+2}}{(z-1)^2}\,dz = \int_{C_3^+} \frac{g(z)}{(z-1)^2}\,dz$$

Comme 1 est à l'intérieur de C_3 et comme g est holomorphe sur et à l'intérieur de C_3, la formule de Cauchy pour les dérivées donne

$$\int_{C_3^+} f(z)dz = \frac{2i\pi}{1!} g'(1) = 2i\pi \left[\frac{-9}{(\ \ +2)^2} \right]_{z=1} = -2i\pi$$

<u>Autre méthode :</u>

$$f(z) = \frac{7-z}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}$$

$$\Longrightarrow \int_{C_3^+} f(z)dz = 2 \underbrace{\int_{C_3^+} \frac{dz}{(z-1)^2}}_{0} - \underbrace{\int_{C_3^+} \frac{dz}{z-1}}_{2i\pi} + \underbrace{\int_{C_3^+} \frac{dz}{z+2}}_{0}$$

$$\Longrightarrow \int_{C_3^+} f(z)dz = -2i\pi$$

$$\boxed{\text{EXERCICE V}}$$

1°) On pose $z = e^{i\theta}$

$$\Longrightarrow \int_{C^+} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

$$* \ n = -1 \Longrightarrow \int_{C^+} z^{-1} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi$$

$$* \ n \neq -1 \Longrightarrow \int_{C^+} z^n dz = i \left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1}\left(e^{i(n+1)2\pi} - 1 \right) = 0$$

2°) On a

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} C_N^k a^k b^{N-k}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^{2k-2n-1}$$

$$\Longrightarrow \int_{C^+} \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} \int_{C^+} z^{2k-2n-1}\, dz$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{C^+} \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = 2i\pi\, C_{2n}^{n}}$$

3°) On pose $z = e^{i\theta}$ $\quad \theta \in [0, 2\pi[$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \int_{C^+} \left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i2^{2n}} \int_{C^+} \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}}\, C_{2n}^{n}}$$