

DST Samedi 28 mars 2009

prépa CCP, mécanique des fluides, durée: 2 heures.

Aucuns documents, calculatrices autorisées.

Donner les unités physiques pour tous les résultats.

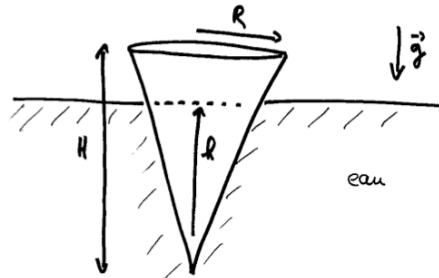
Il sera tenu compte de la présentation.

Ex1. Deux objets flottants

A)

On considère un récipient cône de hauteur H , de rayon R , et de faible épaisseur e , composé d'un matériau de densité ρ_c . Il flotte à la surface de l'eau (densité ρ_e) en position verticale.

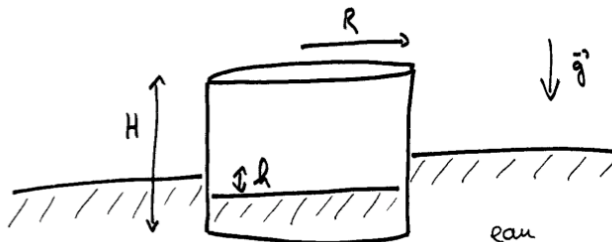
- 1) donner l'expression du volume V et du poids P de ce récipient.
- 2) Calculer la profondeur h à laquelle ce récipient est immergé.
- 3) Application numérique: pour $R=1\text{m}$, $H=2\text{m}$, $\rho_e=1000\text{kg/m}^3$, $e=1\text{cm}$, $g=9.8\text{m/s}^2$, donner la densité maximale ρ_c au delà de laquelle le cône coulera.



B)

On considère maintenant un récipient cylindrique de rayon R , hauteur H , faible épaisseur e , composé d'un matériau de densité ρ_c . Il flotte à la surface de l'eau en position inversée (ouverture vers le bas). Ce récipient est en partie immergé et contient de l'air. On considère l'air comme incompressible.

- 1) Calculer la différence de niveau h entre la surface de l'eau en dehors du récipient et en dedans.
- 2) Calculer la pression de l'air à l'intérieur du récipient.



Ex2. Barrage

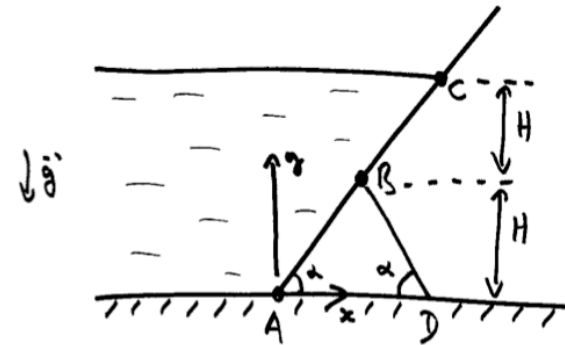
Un barrage ABC est maintenu en position par des poteaux BD. Il retient de l'eau de densité ρ_e .

On considère un barrage de longueur 10m :

- 1) Calculer dans le repère (x,y) la résultante des efforts de pression sur le barrage.
- 2) Calculer le moment en A des efforts de pression.
- 3) Calculer la position du centre de poussée des efforts de pression.

Le barrage est soutenu par un seul poteau:

- 4) Calculer l'effort de compression dans le poteau
- 5) Application numérique: résultante des efforts de pression (question 1) pour $H=2\text{m}$, $\alpha=60^\circ$, $\rho_e = 1000\text{kg/m}^3$, $g=9.8\text{m/s}^2$.

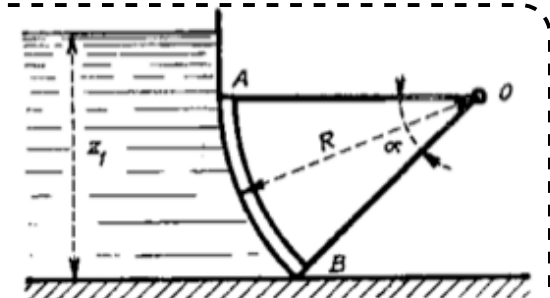


Ex3. Théorème

Enoncer le théorème d'archimède

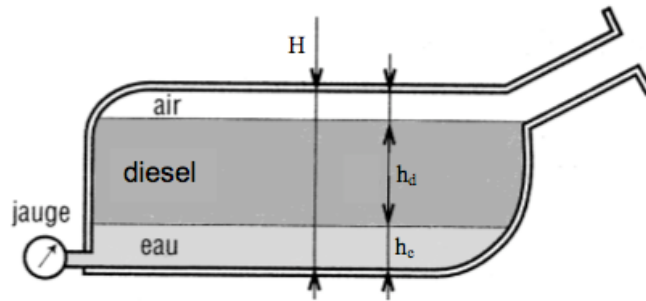
Ex4. Vanne secteur

On considère une vanne secteur articulée en O, comme représentée sur le schéma. Expliquer en une phrase pourquoi le moment des efforts de pression en O est nul.



Tournez la page pour le dernier exercice

Ex5. Réservoir



Le principal danger pour les nouveaux moteurs diesel (HDI, TDI,...) est une forte présence d'eau dans le carburant.

L'indication de remplissage d'un réservoir de carburant est proportionnelle à la pression mesurée par une jauge placée au fond du réservoir.

L'eau, de densité plus élevée que le diesel, vient se loger au fond du réservoir, faussant ainsi la mesure prise par la jauge.

Le réservoir possède une hauteur totale H .

On note ρ_e la masse volumique de l'eau, ρ_d la masse volumique du diesel, g l'accélération de la pesanteur et p_a la pression atmosphérique.

- 3.1 Déterminer la pression $p_{\max}$ indiquée par la jauge lorsque le réservoir est rempli uniquement de diesel en fonction de p_a , ρ_d , g et H .
- 3.2 Le réservoir contient maintenant de l'eau sur une hauteur h_e , déterminer en fonction de ρ_e , ρ_d , h_e et H quelle est la hauteur h_d de diesel pour laquelle la jauge indique le plein du réservoir.
- 3.3 Application numérique: Calculer le taux de remplissage $T = 100 \frac{h_d}{H}$ pour $H = 250$ mm, $h_e = 18$ mm, $\rho_e = 1000$ kg/m³ et $\rho_d = 846$ kg/m³.

DST statique des fluides, correction

①

EX1 objet flottants

A) 1) $V: \frac{\pi R^2 H}{3}$, $P: (\pi R \sqrt{R^2 + H^2}) e \rho_c g$

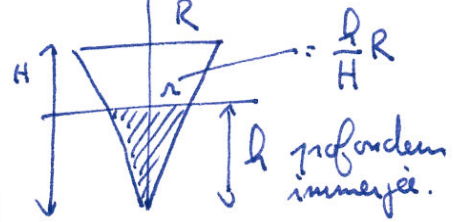
surface latérale $\times$ épaisseur : volume de matière.

2) La poussée d'Archimède compense le poids:

$$P: \frac{1}{3} \pi \left(\frac{hR}{H} \right)^2 h \rho_c g = \frac{\rho_c g \pi R^2 h^3}{3H^2}$$

volume immergé

$$\rightarrow \frac{h^3}{3H^2} \frac{\rho_c g \pi R^2}{P} = \frac{3eH^2 \sqrt{H^2 + R^2}}{R} \frac{\rho_c}{\rho_e}$$

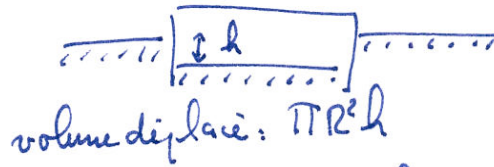


3) le cône coule pour $h \geq H \rightarrow \frac{h^3}{3H^2} \frac{\rho_c g \pi R^2}{P} \rightarrow P: \frac{\rho_c g \pi R^2 H}{3}$

$$\rightarrow \rho_c = \rho_e \frac{RH}{3e\sqrt{H^2 + R^2}} = \frac{1000 \times 1 \times 2}{3 \times 0,01 \times \sqrt{1+4}} \approx 29,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

B) 1) Poids: $P: (\pi R^2 + 2\pi RH) e \rho_c g$

surface du récipient



le poids est équilibré par la force d'Archimède: $P: \rho_c g \pi R^2 h$

$$\rightarrow h: \frac{P}{\rho_c g \pi R^2} = \frac{\rho_c}{\rho_e} e \left(1 + \frac{2H}{R} \right)$$

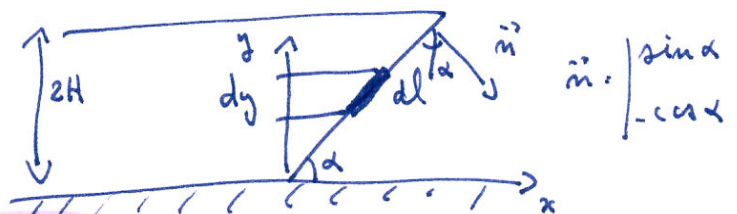
2) Pression hydrostatique à la profondeur h: $P_{atm} + \rho_e g h$.

EX2 la barge

1) La résultante:

$$\vec{R}: L \int_0^{2H} \underbrace{\rho_e g (2H-y)}_{p(y)} \underbrace{\frac{dy}{\sin \alpha}}_{dl} \underbrace{\left| \begin{matrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{matrix} \right|}_{\vec{n}} = 2\rho_e g L H^2 \left| \begin{matrix} 1 \\ -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{matrix} \right|$$

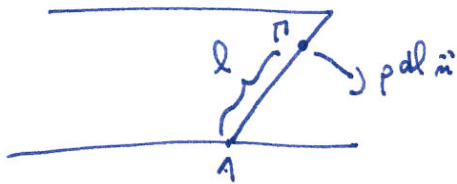
expression vectorielle.



$$\|\vec{R}\|: \frac{2\rho_e g L H^2}{\sin \alpha} \text{ la norme de } \vec{R}: \frac{2 \times 1000 \times 9,8 \times 10 \times 4}{\frac{1}{2}} \approx 1,57 \cdot 10^6 \text{ N}$$

2) Moment en A:

(2)



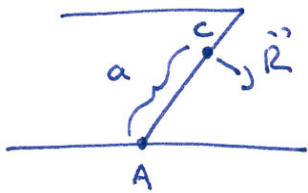
$\vec{AB}$ est orthogonal à $\vec{n}$, le moment est selon $-\vec{e}_y$

$$l = \frac{y}{\sin \alpha}$$

$$\vec{M}_A = (-\vec{e}_y) L \int_{y=0}^{2H} \underbrace{\frac{y}{\sin \alpha}}_l \underbrace{\rho g (2H-y)}_{p(y)} \underbrace{\frac{dy}{\sin \alpha}}_{dl}$$

$$= (-\vec{e}_y) \frac{\rho g 4H^3 L}{3 \sin^2 \alpha}$$

3) centre de poussée:

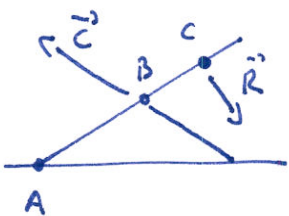


en C: $\vec{AC} \wedge \vec{R} = \vec{M}_A$

$$(-\vec{e}_y) a \|\vec{R}\| = \vec{M}_A \rightarrow a = \frac{2H}{3 \sin \alpha}$$

le centre de poussée est sur le barrage, à une distance $\frac{2H}{3 \sin \alpha}$ de A.

4) effort de compression sur le poutreau:



la somme des moments en A dus aux forces $\vec{R}$ en C et $\vec{C}$ en B est nulle:

$$\vec{AB} \wedge \vec{C} + \vec{M}_A = \vec{0}$$

$$H \left| \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \wedge \|\vec{C}\| \right| \sin \alpha = -\vec{M}_A \rightarrow \|\vec{C}\| = \frac{2 \rho g H^2 L}{3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}$$

EX3 Théorème.

Tout corps immergé subit une force opposée au poids et d'amplitude égale au poids du fluide déplacé.

EX4 Vanne section.

En tout point M de la vanne, l'effort de pression $d\vec{p}$ est dirigé vers O, donc le moment associé est nul: $\vec{OM} \wedge d\vec{p} = \vec{0}$.

EX5 Réservoir.

1) $P = P_{atm} + \rho_d g H$

2) $P_{atm} + \rho_d g H = P_{atm} + \rho_e g h_e + \rho_d g h_d \rightarrow h_d = H - \frac{\rho_e}{\rho_d} h_e$

3) $T = 100 \frac{h_d}{H} = 100 \left(1 - \frac{\rho_e h_e}{\rho_d H} \right) \approx 97\%$