

Réaction diffusion en écoulement stationnaire rapide

Basile Audoly, Henri Berestycki et Yves Pomeau

Laboratoire de Physique Statistique et DMI de l'École Normale Supérieure, associé au CNRS,
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

Titre anglais : Reaction diffusion in fast steady flow.

Keywords : turbulent combustion, flows, reaction-diffusion.

Rubrique : M12 (mécanique des fluides), M14 (transferts thermiques, milieux réactifs, combustion).

Mots-clé : combustion turbulente, écoulements, réaction-diffusion.

Résumé – Cette Note considère la question de la vitesse de propagation d'une réaction chimique dans un écoulement stationnaire de grande vitesse, ce qui peut s'appliquer dans certaines conditions aux cas d'une flamme. La structure de l'écoulement est 1) celle d'un écoulement parallèle cisailant perpendiculaire au front de réaction, où la vitesse de flamme est proche du maximum de vitesse fluide vers les gaz frais, 2) celui d'un écoulement structuré en rouleaux périodiques où la vitesse de propagation de la réaction croît comme la racine quatrième de la vitesse fluide.

Abstract - This Note is concerned with the speed of propagation of a chemical reaction in a fast, steady and non uniform flow, which may apply to flame propagation in some instances. The structure of the flow is 1) a parallel shear flow with velocity perpendicular to the average front, where the flame speed is close to the maximum flow speed toward the fresh gases 2) a periodic cellular structure where the speed of propagation of the reaction grows like the fourth root of the fluid speed.

Short English version :

We examine the propagation of a reaction front in a fast steady flow with a given structure in space. We assume that this is actually a premixed flame without claims of an accurate representation of any real combustion process. The basic equations are given in (1) and would correspond in combustion theory to a Lewis number equal to unity. The flow field is $A q(r)$, r position in space and we study the limit $A \rightarrow \infty$. We assume furthermore that the typical length scale of the flow $q(r)$, denoted as Λ is much bigger than the flame thickness λ . Two types of flow structures are studied, a parallel shear flow, ("case a") and a space-periodic flow pattern ("case b"). In case "a", the eikonal approximation applies, because of the separation of scales between the flow structure and the reaction zone. When the flame front propagates in the flow

direction, the velocity of this front is, at the dominant order, the largest value of the fluid velocity toward the fresh mixture. The flame front changes slope in two different ways : first, near cusps where the fluid velocity is opposite the flame velocity ; second, near flat regions ("flats") where both velocities are almost the same. The inner structure near the cusp is deduced from the local solution of equation (4). Near the flat, the structure is given by local solution of equation (6).

In case "b" (periodic 2D rolls), things are much more complicated because almost all flow lines are closed, and, therefore, cannot carry the reaction to infinity. One has to study the contamination of one cell of the roll system to the next. Once a cell is ignited on its periphery, a front invades it inwardly at speed of order c_L , the speed of the reaction front without flow. It remains to find the large scale speed of propagation that depends on the heat transfer rate from cell to cell. Using as coordinate the area a inside a closed streamline, and the distance along this line for the reaction-diffusion equation, one shows that, at large A , the diffusion uniformizes very quickly the field u perpendicular to the streamlines. Therefore, the molecular diffusion remains important along the streamlines only, so that inside each cell, the reaction-diffusion equation reduces to an equation with only one "space" variable, a , that is the equation (11), where $D(a)$ is an effective diffusion coefficient. The propagation of the reaction from cell to cell occurs by contamination from one cell to the next. This contamination happens through the separatrices between adjacent cells. This occurs in a narrow layer, of width of order $A^{-1/2}$ near the separatrix, where the reaction term in the equation can be neglected in front of the diffusion term. Using the methods of reference [9], one obtains that the exchange between adjacent cells can be represented by a boundary condition for the effective equation (11). This boundary condition expresses the flux toward cell number i from the adjacent cells $i - 1$ and $i + 1$, this is equation (13). It is now possible to get rid of the large parameter A by rescaling in the formulation of the problem, by taking the variable i as continuous too. The boundary condition (13) is replaced by (15), hence an equation for a single cell only, but with a rather complicated boundary condition. However, this is sufficient to get that the effective velocity at the scales of many cells scales with the diffusion coefficient s like $s^{1/2}$, that yields finally that C scales like $A^{1/4}$, since s scales like the inverse width of the diffusion layer, that is like $A^{1/2}$.

To sum up, we consider the solutions of the equation $\frac{\partial u}{\partial t} + A \nabla \cdot (q(\frac{r}{B}) u) = \Delta u + f(u)$, in the large A and B limit (fast flow, and large flow scale compared to the flame thickness). The reaction rate f is assumed to be such that only one laminar speed c_L exists for $A = 0$ (the so-called ZFK situation). Our claims can be stated as follow :

1. in case "a" (parallel shear flow), the flame velocity C , as it appears in equation (2), is such that $C/A \rightarrow \max_y q(y)$ for $B \rightarrow \infty$. In the outer region of the cusp point, the tip has a small angle $2 c_L / (A |q(y_{cusp})|)$.
2. in case "b" (rolls), propagation of the reaction occurs along the separatrices of the flow. The flame velocity on large scales of space and time, C , is such that $C/A^{1/4}$ tends to a constant of order 1 as A and B tend to infinity.

1 Introduction

Depuis longtemps, la combustion est un sujet de recherche actif et important. Les travaux de Zel'dovitch [13] ont montré comment décrire une flamme de prémélange (celle que l'on étudiera), comme résultat de la propagation d'une zone de transition (le "front") d'un état métastable (ou plutôt stable-neutre, le "gaz frais") vers un état stable (gaz brûlé), une idée en germe dans la contribution d'Euler [4] au concours de l'Académie des sciences, couronnée en 1738. Bien que les effets de la turbulence hydrodynamique soient souvent importants sinon fondamentaux, ils n'apparaissent pas dans les équations de réaction-diffusion classiques.

Cette Note, qui ne prétend pas décrire toutes les situations possibles, se propose de montrer comment calculer précisément la vitesse de flamme équivalente lorsque le champ de vitesse imposé, incompressible, est stationnaire et grand devant la vitesse propre de la flamme. Si nos arguments sont de nature qualitative, ils restent en accord avec les résultats exacts concernant ce type de question et nous amènent à formuler de nouvelles conjectures sur les équations de réaction-diffusion.

Nous étudierons les solutions de l'équation de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \nabla \cdot (q(r)u) = \Delta u + f(u), \quad (1)$$

où $u(r, t)$ est la température, fonction de la position r et du temps t , Δ le Laplacien d'espace, $A q(r)$ le champ de vitesse imposé du fluide (A est un grand nombre), et $f(u)$ est la fonction de la température, positive, qui décrit la génération de chaleur par réaction. Nous aurons à considérer deux cas (tous deux à nombre de Lewis égal à 1) :

- (i) celui d'une chimie "douce" où $f(u)$ est par exemple en $k u(u - u_0)$, k constante positive et u_0 température finale des gaz brûlés, celle des gaz frais étant $u = 0$;
- (ii) celui d'une loi d'Arrhenius "raide" telle que la fonction f n'est relativement importante que près de la température maximum, soit une loi $f(u) = \epsilon^{-1} F((u_0 - u)/\epsilon u_0)$, telle que $F(\cdot)$, d'ordre 1, s'annule pour des arguments négatifs ou supérieurs à 1. La température $u_0(1 - \epsilon)$ à partir de laquelle la réaction démarre pratiquement est légèrement inférieure à celle des gaz brûlés, $0 < \epsilon \ll 1$. Dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, l'épaisseur de la zone de réaction (où f diffère de zéro) devient négligeable, la dynamique de la flamme se réduisant alors à celle d'une surface.

On connaît la solution des équations (1) en l'absence d'écoulement ($A = 0$). Dans le cas (i) (chimie douce), un continuum de solutions de front plan existe de la forme $u(x, t) = U_c(x - ct)$, $U \rightarrow 0$ ($/u_0$) pour $(x - ct) \rightarrow +(-)\infty$, les gaz frais (/brûlés) étant toujours pris à $+(-)\infty$. Cette solution se réduit pour de très nombreuses situations physiques (conditions initiales) à la solution de Kolmogoroff, qui correspond à la plus petite valeur de c . En revanche, dans le cas (2), une seule solution en $U(x - ct)$ existe, avec $c = (2 \int_{u_0(1-\epsilon)}^{u_0} f(u) du)^{1/2} / u_0$ dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. On appellera c_L la vitesse intrinsèque de flamme (unique dans le cas raide, ou pour les situations telles que le critère de sélection de vitesse marginale de Kolmogoroff s'applique dans le cas de la chimie douce). De (1), on déduit par transformation galiléenne et par rotation une classe de solutions de fronts plus générale, de type $U(x \cos \alpha + y \sin \alpha - (c_L + q_{un})t)$, où α est l'angle de la direction des x positifs avec la normale au front de flamme dirigée vers les gaz frais, et où q_{un} est une éventuelle vitesse uniforme du fluide, la fonction U étant la même que pour la propagation à une dimension et sans vitesse fluide.

Nous allons considérer deux situations, soit deux types de champs $q(r)$ stationnaires, l'un (cas "a") où ce champ est parallèle à l'axe x , et dépend de la seule coordonnée y : $q(y)$; l'autre ("b") correspond à un champ de vitesse de type cellules de convection générées par exemple par une instabilité de Taylor-Couette ou Rayleigh-Bénard [6] (cf. la figure 1). Sans chercher à représenter fidèlement un tel champ de vitesse, nous supposons seulement qu'il dépend des coordonnées x et y et qu'étant incompressible, il se déduit d'une fonction de courant $\Psi(x, y)$, périodique en x et y , les composantes cartésiennes de la vitesse étant $q_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ et $q_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$. Ce champ de vitesse "b" dessine un ensemble de cellules où les lignes de courant intérieures sont fermées. Ces cellules sont séparées par un réseau de lignes séparatrices reliant les points stationnaires hyperboliques du champ $q(x, y)$. Nous examinons maintenant la solution de (1) dans la limite des grands A et pour les deux géométries considérées. On supposera aussi que l'épaisseur de flamme, dénotée λ , est très inférieure aux échelles de longueur des écoulements.

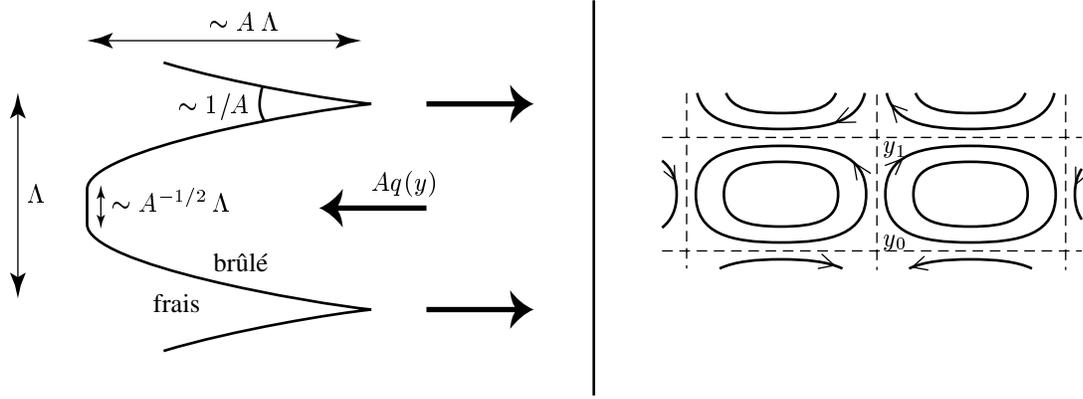


FIG. 1 – Écoulement considérés : cas a (cisailant) avec l’allure du front de réaction à gauche, et cas b (rouleaux) à droite. *Studied flow patterns : case a (shear flow) with a sketch of the reaction front, left, and case b (rolls), right.*

2 Écoulement parallèle rapide

On suppose ici que $q(r) = q(y) e_x$. Il s’agit de trouver la solution de l’équation de réaction-diffusion sous forme d’un front progressif de type $u(x - ct, y)$. Dans le repère de la flamme, on est donc conduit à l’équation :

$$(-C + Aq(y)) \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta u + f(u), \quad (2)$$

avec les conditions aux limites $u \rightarrow u_0(\neq 0)$ en $x \rightarrow (-/+)\infty$. Pour tout profil $Aq(y)$, l’existence d’une solution a été établie dans [2] et l’unicité dans [3]. L’objet de notre investigation ici est d’étudier le comportement de cette solution pour A grand.

Comme conséquence de la séparation d’échelle entre l’épaisseur de flamme et les échelles de l’écoulement, on supposera d’abord que la flamme est localement plane (approximation d’eikonale), sa normale faisant un angle θ avec l’écoulement. L’analyse de l’effet d’une transformation galiléenne et d’une rotation sur les solutions de l’équation (1) conduit à la relation cinématique suivante entre vitesse intrinsèque de flamme, vitesse locale du fluide et vitesse de la flamme C (dirigée suivant x et inconnue pour le moment) :

$$C - Aq(y) = \frac{c_L}{\cos(\theta)} \quad (3)$$

Dans cette équation, l’angle θ , fonction de y , est pris dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dans la limite où A est très grand, cette équation ne peut être satisfaite que si le membre de droite est grand ($|\cos \theta| \ll 1$), ou si $C - Aq(y)$ est petit, d’ordre $c_L \ll A$. La seconde éventualité ne peut concerner que le voisinage immédiat d’un ensemble discret de points en y , les méplats y_{mep} , tels que $C = Aq(y_{mep})$. Ailleurs, le premier cas de figure a lieu, et le front est fortement incliné : l’angle θ reste proche des valeurs limites $\pm \frac{\pi}{2}$. Comme on suppose que la flamme se propage en moyenne dans la direction x , c’est-à-dire qu’elle n’a pas d’inclinaison moyenne par rapport à l’axe des y , cette flamme doit changer d’inclinaison par rapport à l’axe x en deux points au moins, où l’on passe de la solution de (3) proche de $\frac{\pi}{2}$ à celle proche de $-\frac{\pi}{2}$ (front en forme de pointe, ou points "cusp").

Près des "cusps", pour que les termes de l’équation (2) soient du même ordre, la grande quantité $-C + Aq(y)$ doit être compensée par une petite dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$. Ceci impose à l’épaisseur en y de la région du cusp d’être grande, d’ordre $A\lambda$. Dans le Laplacien, ceci rend le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ négligeable devant $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Dans cette

région, où u varie comme fonction de y sur l'échelle λ , on néglige la variation de $q(y)$. D'où l'équation locale :

$$(-C + A q(y_{cusp})) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(u), \quad (4)$$

qui n'est autre que l'équation de réaction-diffusion, à une dimension d'espace (la coordonnée y) et avec un "temps" fictif $\tilde{t} = \frac{x}{-C + A q(y_{cusp})}$. Du point de vue de cette "dynamique", les conditions asymptotiques en temps très négatifs sont celles de deux fronts convergents l'un vers l'autre, les gaz brûlés étant à l'infini positif et négatif en y . La région "interne" du cusp (soit celle pour laquelle on ne peut résoudre (4) par une solution à deux fronts éloignés l'un de l'autre), correspond au moment où les deux fronts se rencontrent pour éliminer la poche de gaz frais restante.

Cette remarque montre qu'on ne peut traiter de cette façon les points en méplat de la flamme tels que les gaz frais entourent les deux côtés du méplat : en ces points doivent se raccorder deux solutions externes d'eikonale, correspondant dans l'analogie dynamique à deux fronts de flamme indépendants s'écartant l'un de l'autre. Reste donc à résoudre cette question de l'initiation, soit celui de la couche limite raccordant les deux eikonales. Ce raccordement ne peut se faire que dans une région où $-C + Aq(y)$ est proche de zéro. Sinon on aurait à imposer à une solution de (2) un allumage spontané, ce qui est impossible. Puisque $-C + Aq(y)$ est proche de zéro près de ce point, C vaut, à l'ordre dominant, $A \max_y q(y)$, ceci étant entendu en valeur algébrique. Développons $(-C + Aq(y))$ près de ce minimum, supposé situé en $y = 0$:

$$-C + Aq(y) \approx d_0 - d_1 y^2 + \dots \quad (5)$$

Dans ce développement, d_1 est positif, et $d_0 = -C + A \max_y q(y)$, qui doit être petit devant A , reste à déterminer. Insérant ce développement de Taylor dans (2), on obtient :

$$(d_0 - d_1 y^2 + \dots) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(u). \quad (6)$$

Comme dans le cas précédent, si on suppose $y \approx \lambda$, on doit prendre $x \approx d_1$ grand et proportionnel à A (A multiplie $q(y)$, et donc $d_1 \sim A$) pour rendre le terme de gauche de (6) d'ordre 1, ce qui conduit à négliger $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ devant $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, y étant supposé rester d'ordre 1. Les différents termes restant s'équilibrent si $d_0 \approx d_1 \approx \frac{A\Lambda}{\Lambda^2}$ où $\Lambda (\gg \lambda)$ est l'échelle spatiale typique sur laquelle varie $q(y)$. Apparaissent deux possibilités suivant que $\frac{A\Lambda^2}{\Lambda^2}$, produit d'un grand (A) et d'un petit ($\frac{\lambda^2}{\Lambda^2}$) paramètre est grand ou petit. Si cette quantité est grande, alors on doit résoudre l'équation (6) sans autre approximation, y restant d'ordre λ . On en déduit une équation de couche limite à un paramètre inconnu, d_0 , qui est une valeur propre non linéaire d'ordre $A \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}$. Cette valeur propre permet de satisfaire à la condition $u \rightarrow 0$ à $x \rightarrow +\infty$ (gaz frais) pour la solution de l'équation de couche limite

$$(d_0 - d_1 y^2) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(u), \quad (7)$$

les termes suivants du développement de Taylor de $q(y)$ ayant été éliminés parce que $q(y)$ varie peu sur la distance λ . En revanche, si $\frac{A\lambda^2}{\Lambda^2}$ est petit, on peut résoudre (6) par la méthode d'eikonale, puisqu'on peut négliger alors la variation de $q(y)$ sur l'épaisseur de flamme. On retrouve pour d_0 la valeur finie c_L dans ce dernier cas. Si la position du méplat est donnée par la position des extrema de $q(y)$: $d_0 = -C + A \max_y q(y)$, celle des cusps considérés en premier est donnée par la condition de propagation horizontale en moyenne sur y (condition qui permet aussi de fixer C). Si l'on suppose l'écoulement périodique en y , cette condition revient à raccorder la solution d'eikonale pour assurer sa continuité d'une période en y à la suivante. On pourrait aussi imposer un angle moyen par rapport à l'axe x , en décalant au bout d'une période en y .

3 Propagation dans des rouleaux périodiques

Nous considérons à présent le cas d'un écoulement représenté par un réseau périodique de rouleaux, comme en (b). Il n'existe plus de front progressif. On généralise cette notion en considérant les solutions de type front progressif *pulsatoire*, $u(x, y, t)$, qui vérifient :

$$u\left(t + \frac{\Lambda}{C}, x, y\right) = u(t, x - \Lambda, y), \quad (8)$$

où Λ est la longueur d'une cellule et C la vitesse de propagation. Dans ce cadre, Xin citeXi1 montré l'existence et l'unicité de solutions (u, C) . Pour une revue sur ce type de problèmes on consultera [11] ou, plus spécifiquement, [5] pour des résultats d'homog n sation et [1] pour un résultat d'existence pour des milieux périodiques plus généraux avec une non-linéarité de type KPP.

Ce cas est plus complexe que le précédent puisque le problème de la diffusion passive (sans terme de réaction) recèle déjà certaines difficultés dans cette géométrie, le résultat final [8],[12] étant un coefficient de diffusion effectif, moyenne géométrique des coefficients de diffusion moléculaire et "turbulent". La source des difficultés se trouve dans le caractère fermé des lignes de courant qui sont les lignes de niveau de la fonction de courant : pour passer d'une cellule à l'autre, le scalaire passif ou la flamme doivent traverser les (lignes) séparatrices marquant les frontières entre cellules, le facteur limitant pour la vitesse de la propagation.

Avant d'examiner cette question du franchissement des séparatrices, donnons les lois de propagation de la flamme à l'intérieur d'une cellule, supposant la périphérie allumée (soit que $u \approx u_0$ sur cette périphérie). Dans la limite des grands A , on peut employer la méthode de [9] et utiliser comme variables d'espace la valeur de la fonction de courant et l'abscisse curviligne le long d'une ligne de courant. Pour A grand, la diffusion le long des lignes de courant est de loin plus rapide que celle d'une ligne de courant à l'autre. Le processus de diffusion du scalaire passif qui s'en déduit est celui d'une diffusion radiale suivant une loi définie avec la constante de diffusion moléculaire. Ainsi le temps d'envahissement d'une cellule par le scalaire passif sera de l'ordre du temps de diffusion radiale moléculaire, soit $\frac{\Lambda^2}{\kappa}$, Λ taille caractéristique d'une cellule, et κ coefficient de diffusion moléculaire (ramené à 1 précédemment par des changements d'unités tacites mais conservé ici pour rendre l'exposé plus clair). Un raisonnement très semblable montre que pour A très grand, une flamme allumée sur la périphérie se propagera radialement vers l'intérieur de la cellule avec une vitesse c_L . Le temps de combustion d'une cellule, une fois allumée sur la périphérie, est donc d'ordre $\frac{\Lambda}{c_L}$ (une transformation analogue à celle de Young et Rhines donne les lois de cette propagation, cf.infra). Reste à examiner la contamination d'une cellule à la suivante. La limite des grands A , si elle est bien définie pour la chimie douce, nécessite l'examen de deux cas différents pour la chimie raide. Par analogie avec la diffusion du scalaire passif, nous examinons ce qui se passe le long d'une séparatrice au cours du transit d'un point stationnaire à l'autre, qui dure un temps d'ordre $\frac{\Lambda}{A\bar{q}}$, \bar{q} valeur typique de q le long de la séparatrice. Pour la chimie douce, ce temps est infiniment court devant l'échelle de temps de la réaction, qu'on peut donc négliger. Ceci permet de traiter le problème local près de la séparatrice comme un pur problème de diffusion thermique, avec les méthodes de [12]. En revanche, si le temps de transit est supérieur au temps typique de la chimie raide, d'ordre ϵ^2 , on doit résoudre cette dynamique de la chimie raide couplée à l'advection si $\epsilon^2 \ll A^{-1}$, une situation que nous n'envisagerons pas.

La propagation d'une flamme dans une structure stationnaire de rouleaux se ramène donc à la question de la propagation d'une cellule à l'autre à travers la séparatrice. Comme on vient de le voir, ceci se fait (hors cas d'une chimie trop rapide) par contamination thermique d'une cellule à travers cette séparatrice, la réaction chimique ne jouant pas de rôle dans la zone de transfert, trop étroite pour cela (elle est d'ordre $(\kappa\Lambda/A\bar{q})^{1/2}$). Donc cette zone est, comme dans [12], le si ge d'un processus de diffusion qui conduit à un flux normal à la séparatrice, flux qui va servir de condition aux limites pour la solution interne de l'équation de réaction-diffusion formulée dans une variable reliée à Ψ . Pour rendre plus manifeste la relation avec [12],

nous allons en utiliser certaines notations, et considérer une géométrie du même type. Le flux intercellulaire est donné par l'équation (7) de [12], qui exprime le transfert convectif d'une cellule à l'autre comme :

$$F_i = s(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i), \quad (9)$$

F_i flux total des cellules $i + 1$ et $i - 1$ voisines de i vers la cellule i à travers les séparatrices, et f_i la valeur de u sur une ligne de courant plus proche de la périphérie que l'épaisseur de flamme et plus éloignée de celle-ci que l'épaisseur de couche limite de diffusion (ce f_i ne doit pas être confondu avec $f(u)$, taux de réaction). Le coefficient de diffusion effectif s est défini comme suit : supposons la séparatrice rectiligne, supportée par l'axe y , et située entre les points de coordonnée $y = y_0$ et $y = y_1$. Près de ce segment, la fonction de courant prend la forme $\Psi(x, y) \approx -x v(y)$, $v(y) = A q_y(x = 0, y)$ vitesse verticale le long de la séparatrice située en $x = 0$. Alors

$$s = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi} \left| \int_{y_0}^{y_1} v(y) dy \right|} \approx A^{1/2} \quad (10)$$

Reste à écrire l'équation de diffusion dans la variable Ψ . Il est plus commode d'utiliser comme variable l'aire $a(\Psi)$ insérée à l'intérieur d'une ligne de courant fermée solution de $\frac{da}{d\Psi} = \int \frac{dl}{q}$, dl élément de longueur le long de la ligne de courant et $q(l)$ valeur absolue du vecteur q en ce point de la ligne de courant. Dans cette variable, l'équation de réaction-diffusion moyennée le long des lignes de courant fermées s'écrit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left(D(a) \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right) \right) + f(u_i), \quad (11)$$

l'indice i étant pour le numéro de la cellule considérée. La fonction

$$D(a) = \kappa \oint dl q(l) \oint \frac{dl}{q(l)} \quad (12)$$

devient singulière près des séparatrices quand s'y applique la condition de non-glissement, ce qu'on ne considérera pas ici. Reste à écrire la condition aux limites pour (11). Cette condition exprime l'existence d'un flux provenant des cellules voisines d'indice $i - 1$ et $i + 1$. De (11) ce flux vaut $-D(a_M) \frac{\partial u}{\partial a}$, $D(a_M)$ étant la valeur de $D(a)$ au bord de la cellule, soit quand l'aire a atteint son maximum, a_M . Le flux total reçu à travers les séparatrices par une cellule vaut

$$-D(a_M) \frac{\partial u_i(a)}{\partial a} \Big|_{a=a_M} = s (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) \Big|_{a=a_M} \quad (13)$$

Toutes les quantités utiles ayant été définies, le problème posé par la propagation de la flamme dans la structure consiste donc à chercher une solution en $u(i - Ct = \zeta, a)$ de (11), soit de :

$$-C \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial a} \left(D(a) \frac{\partial u}{\partial a} \right) + f(u) \quad (14)$$

Pour écrire cette équation, on a supposé que u varie peu d'une cellule à l'autre. Ceci permet de traiter la variable i comme continue, ce qui est justifié un peu plus loin dans la limite $A \rightarrow \infty$. Dans (14) la variable a varie entre 0 et a_M (cette dernière valeur correspondant, rappelons-le, au bord de la cellule, a aire intérieure d'une ligne de courant fermée). Une des conditions aux limites pour (14) est que pour $\zeta \rightarrow +\infty$, u tend vers 0 (gaz frais) et vers u_0 pour $\zeta \rightarrow -\infty$ (gaz brûlés). L'autre condition aux limites est imposée en $a = a_M$, et provient de la condition de flux d'échange entre cellules :

$$-D(a_M) \frac{\partial u(\zeta, a)}{\partial a} \Big|_{a=a_M} = s \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \Big|_{a=a_M} \quad (15)$$

Même dans le cas de la simple diffusion, [12] montre qu'il n'est pas très facile d'imposer cette dernière condition. Dans le cas présent, et en s'inspirant de la méthode suivie dans [12], on peut imaginer résoudre de la façon suivante : partant d'une valeur arbitraire de C (une fois les éliminations de constantes telles que A faites) et de la fonction de ζ (cf. infra), valant $-D(a_M) \frac{\partial u(\zeta, a)}{\partial a} |_{a=a_M}$ et une fois fixée la condition aux limites de (14), on en déduit une solution de cette dernière équation qui va donner une valeur du second membre de (15). L'égalité de cette fonction de transfert avec la condition aux limites choisie a priori au début devrait permettre de trouver par itération à la fois la forme de cette fonction du temps et la valeur de C . Nous nous proposons d'examiner la solution numérique de ce problème dans un travail à venir. Cette analyse montre que la vitesse C croît comme $A^{1/4}$ aux grands A . Ceci résulte de ce que le coefficient de diffusion effectif est d'ordre de grandeur

$$s \approx \sqrt{\kappa A \bar{q} \Lambda}. \quad (16)$$

Ce coefficient de diffusion effectif est la seule grande quantité qui subsiste dans la formulation du problème. On doit rendre petite la quantité qui le multiplie dans (13), soit $(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)|_{a=a_M}$, ce qui conduit à remplacer l'indice i par une variable continue, soit la combinaison $(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)|_{a=a_M}$ par $\frac{\partial^2 u(i)}{\partial i^2}$. Tout petit ou grand paramètre va finalement disparaître en supposant que la distance typique de variation en i (variable continue maintenant) est d'ordre de la grande quantité \sqrt{s} , ce qui conduit à une vitesse effective de flamme (moyennée sur des distances bien supérieures à la taille d'une cellule) d'ordre $c_{eff} \approx K A^{1/4} \bar{q}^{1/4} c_L^{3/4}$, K constante numérique d'ordre 1. Une borne inférieure en $A^{1/5}$ vient d'être établie dans [7]. La formulation du problème sans petit ou grand paramètre qui donne K peut se faire maintenant à partir de l'analyse présentée. La validité de ces résultats implique que l'échelle de temps sur laquelle se fait la réaction est d'ordre 1, ou tout au moins suffisamment lente pour que pendant ce temps là plusieurs cellules s'allument. Ceci impose $c_{eff} \epsilon \gg \Lambda$ pour la chimie raide, soit $A^{1/4} \epsilon \gg 1$. Si cette condition n'est pas réalisée, la vitesse de flamme est déterminée par le temps d'allumage d'une cellule à l'autre.

Références

- [1] H. Berestycki et F. Hamel, *Front propagation in periodic media*, en préparation.
- [2] H. Berestycki, B. Larroutou et P.-L. Lions, *Multidimensional travelling wave solutions of a flame propagation model*, Arch. Rat. Mech. Anal., **111**, (1990), p. 33–49.
- [3] H. Berestycki, L. Nirenberg, *Travelling wave in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non Linéaire, **9**, (1992), p. 497–572.
- [4] L. Euler et al. *De la nature et de la propagation du feu*, ASPM Ed. Wasry (52130), France. ISBN2-958902-0-2.
- [5] S. Heinze, *Homogenization of flame fronts*, Preprint IWR, Heidelberg, 1993. A paraître.
- [6] L. Kagan et G. Sivashinsky, *On flame propagations and extinctions in large-scale vortical flows*, preprint Tel-Aviv University, avril 1999. P. D. Rodney, B. D. Haslam, et N. O. Rhys, Phys. Rev. Letters **74**, p. 3804 (1995).
- [7] A. Kiselev, L. Ryzhik, *Enhancement of the traveling front speeds in reaction-diffusion equations with advection*, preprint.
- [8] Y. Pomeau, *Dispersion dans un écoulement en présence de zones de recirculation* C.R.Ac. Sci. **301**, Série II, 1323 (1985).
- [9] P.B. Rhines et W.R. Young, J. Fluid Mech. **133**, 133 (1983).
- [10] J.X. Xin, *Existence of planar flame fronts in convective-diffusive periodic media*, Arch. Rat. Mech. Anal. **121** (1992), pp 205-233.

- [11] J.X. Xin, *Analysis and modeling of front propagation in heterogeneous media*. A paraître.
- [12] W.R. Young, Y. Pomeau et A. Pumir, *Anomalous diffusion of tracer in convection rolls*, Phys. of Fluids **A 1**, 462 (1989).
- [13] Y.B. Zel'dovich, *Selected works*, Vol. I, part 2, p. 252 et sq. J.P. Ostriker ed. Princeton University press, Princeton (1992).