

Chapitre 3

Les ondes dans les fluides et les solides : un exemple biomécanique

3.1 Introduction

Après avoir consacré deux chapitres aux propriétés générales des ondes (dans les fluides), nous terminons ce premier survol des ondes avec un exemple de propagation dans les fluides et les solides, à savoir la propagation d'ondes dans les artères.

3.1.1 Motivations

Le transport de matière dans le corps des mammifères s'effectue bien souvent au moyen de longs tubes élastiques : transport d'oxygène dans les bronches ou de sang dans les artères. L'étude de ce type d'écoulements biologiques est en général motivé soit par la pure physiologie (comprendre le fonctionnement des êtres vivants), soit par la physiopathologie (comprendre l'origine du développement de certaines maladies), soit pour le diagnostic (identifier certaines pathologies par des moyens non intrusifs, *e.g.* mesure de la pression sanguine) soit enfin dans le but de traitement (bioingénierie, chirurgie ou conception de prothèses synthétiques). À titre d'illustration, les maladies des artères, par exemple l'athérosclérose, sont à la source de pas moins de 50 % des décès dans les pays occidentaux, à travers les attaques cardiaques ou les AVC.

3.1.2 Écoulement dans les artères

Jean Louis Marie Poiseuille, médecin français, a dérivé d'abord expérimentalement en 1838 une loi (qui porte maintenant son nom) décrivant la structure de l'écoulement dans une veine. Cette loi prédit un profil parabolique de vitesse et une relation entre l'écart de pression Δp entre l'entrée et la sortie de la veine et le débit sanguin Q :

$$\Delta p = \frac{8\mu L Q}{\pi r^4}$$

Malheureusement, cette loi ne décrit en pratique aucun écoulement dans l'être humain ! En effet, le réseau vasculaire est extrêmement tortueux (figure 3.1) et courbe (présence de recirculations), les tubes sont élastiques et surtout l'écoulement est fortement instationnaire car *pulsé*.

Nous allons dans la suite tenter de caractériser cet aspect de l'écoulement sanguin, en décrivant la propagation de l'onde de pouls dans un système modèle schématisant l'écoulement de sang dans une artère. Dans la suite, nous commençons par dériver les équations de conservation spécifiques à un écoulement fluide dans un tube élastique.

3.2 Les équations de conservation

3.2.1 Conservation de la masse

On suppose que le sang est un liquide incompressible. Pour exprimer la conservation de la masse, considérons une section de tube élastique, caractérisé par un rayon local $R(x, t)$, ou, de manière équivalente, par une section $A(x, t)$. Si on suppose que le champ de vitesse $u(x, t)$ est unidirectionnel et constant selon une section donnée (profil de type bouchon), alors on peut faire un bilan de masse sur un tronçon élémentaire de tube de

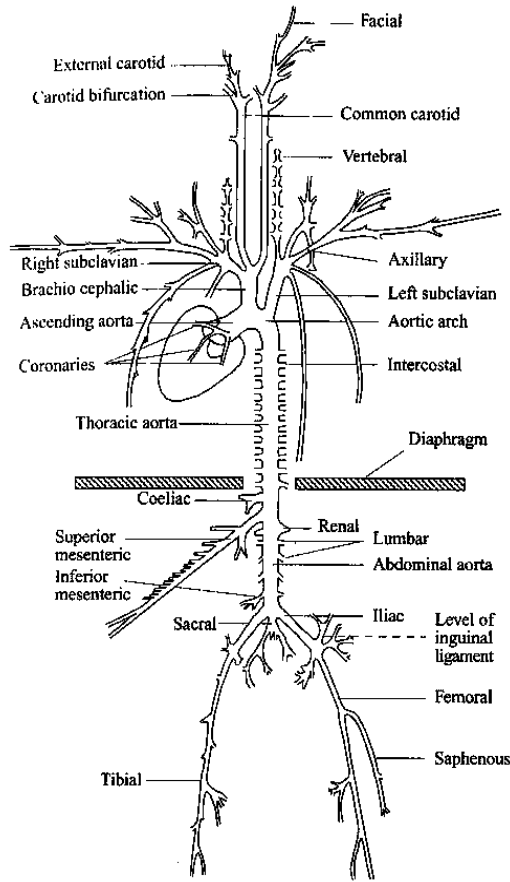


FIGURE 3.1 – Schéma du réseau artériel dans le corps humain (d'après McDonald, 1974).

longueur dx . Par unité de temps, il entre une certaine quantité de masse dans cet élément, et il en sort une autre, pas nécessairement égale. En effet, le tube étant élastique, il peut s'élargir pour stocker de la matière, ou au contraire se contracter. Mais dans tous les cas, la relation suivante sera vérifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variation de masse} \\ \text{de l'élément pendant } \Delta t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{quantité de masse} \\ \text{entrant en } x \text{ pendant } \Delta t \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{quantité de masse} \\ \text{sortant en } x + \Delta x \text{ pendant } \Delta t \end{array} \right\}$$

La masse de l'élément situé à la position x à un instant t donné est $m(x, t) = \rho A(x, t)\Delta x$. La variation de masse de cet élément entre t et $t + \Delta t$ est donc :

$$\rho \Delta x (A(x, t + \Delta t) - A(x, t))$$

La quantité de masse entrant en x pendant Δt est donnée en intégrant le flux de masse élémentaire $\rho A(x, t)u(x, t)$:

$$\int_t^{t+\Delta t} \rho A(x, t)u(x, t) dt \simeq \rho A(x, t)u(x, t)\Delta t$$

De même pour le flux de masse sortant. La relation précédente se réécrit donc :

$$\rho \Delta x (A(x, t + \Delta t) - A(x, t)) = \rho A(x, t)u(x, t)\Delta t - \rho A(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t)\Delta t$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{A(x, t + \Delta t) - A(x, t)}{\Delta t} + \frac{A(x + \Delta x, t)u(x + \Delta x, t) - A(x, t)u(x, t)}{\Delta x} = 0$$

En passant à la limite $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, l'équation devient :

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Au) = 0} \quad (3.1)$$

Cette équation est analogue à l'équation de conservation de la masse pour un fluide compressible, A jouant le rôle de ρ .

3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

Effectuons maintenant un bilan de quantité de mouvement sur l'élément de volume de la figure X.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{variation de quantité de mouvement} \\ \text{de l'élément pendant } \Delta t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{quantité de mouvement} \\ \text{entrante en } x \text{ pendant } \Delta t \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{quantité de mouvement} \\ \text{sortante en } x + \Delta x \text{ pendant } \Delta t \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{somme des forces appliquées} \\ \text{sur l'élément pendant } \Delta t \end{array} \right\}$$

À un instant t donné, la quantité de mouvement contenue dans l'élément est $\rho \Delta x A(x, t) u(x, t)$. La variation de quantité de mouvement entre pendant Δt est donc donnée par :

$$\rho \Delta x (A(x, t + \Delta t) u(x, t + \Delta t) - A(x, t) u(x, t))$$

La quantité de mouvement entrante en x pendant Δt est donnée en intégrant le flux de quantité de mouvement élémentaire $\rho A(x, t) u^2(x, t)$:

$$\int_t^{t+\Delta t} \rho A(x, t) u^2(x, t) dt \simeq \rho A(x, t) u^2(x, t) \Delta t$$

De même pour la quantité de mouvement sortante du domaine.

Examinons maintenant la somme des forces appliquées sur le domaine de contrôle. En négligeant les forces volumiques, et dans l'hypothèse d'évolution non-visqueuse, ces forces se limitent aux seules forces de pression. Sur les parois latérales, la pression appliquée est constante et vaut p_e , alors qu'au niveau des sections x et $x + \Delta x$ la pression est respectivement égale à $p(x, t)$ et $p(x + \Delta x, t)$. Comme indiqué sur la figure X, on peut toujours réécrire la somme des forces de pression comme :

$$-\oint p \mathbf{n} dS = \underbrace{-\oint p_e \mathbf{n} dS}_{=0 \text{ car } p_e \text{ est constant}} - \oint (p - p_e) \mathbf{n} dS$$

Ce dernier terme se limite simplement à ses contributions selon les sections x et $x + \Delta x$. Une fois projeté suivant x , il devient :

$$(p(x, t) - p_e) A(x, t) - (p(x + \Delta x, t) - p_e) A(x + \Delta x, t)$$

Au final, le bilan de quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\rho \Delta x (A(x, t + \Delta t) u(x, t + \Delta t) - A(x, t) u(x, t)) =$$

$$\rho A(x, t) u^2(x, t) \Delta t - \rho A(x + \Delta x, t) u^2(x + \Delta x, t) \Delta t + (p(x, t) - p_e) A(x, t) \Delta t - (p(x + \Delta x, t) - p_e) A(x + \Delta x, t) \Delta t$$

En divisant par $\rho \Delta x \Delta t$ on obtient :

$$\frac{A(x, t + \Delta t) u(x, t + \Delta t) - A(x, t) u(x, t)}{\Delta t} = \frac{A(x, t) u^2(x, t) - A(x + \Delta x, t) u^2(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + \frac{1}{\rho} \frac{(p(x, t) - p_e) A(x, t) - (p(x + \Delta x, t) - p_e) A(x + \Delta x, t)}{\Delta x}$$

En passant à la limite $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (Au) = -\frac{\partial}{\partial x} (Au^2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} ((p - p_e) A)$$

En utilisant la conservation de la masse, cette équation peut se simplifier en :

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + Au \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} ((p - p_e) A)$$

D'où l'expression finale de l'équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho A} \frac{\partial}{\partial x} ((p - p_e) A)} \quad (3.2)$$

3.2.3 La loi d'état $\mathcal{P}(A)$

Les deux équations de conservation dérivées font apparaître la surpression $p - p_e$, l'aire courante A et la vitesse u . Pour fermer le système, il nous faut donc une troisième équation. Celle-ci nous sera fournie par la 'loi d'état' suivante :

$$\boxed{p - p_e = \mathcal{P}(A)} \quad (3.3)$$

reliant la surpression courante à l'aire de la section. Nous précisons plus loin cette relation.

3.3 L'onde de pouls

3.3.1 Derivation de l'équation d'onde

On suppose désormais que l'onde de pouls peut être modélisée comme une petite perturbation à un état de base caractérisé par

- une vitesse u nulle,
- une surpression $p - p_e$ nulle, et
- une aire constante A_0 sur toute la longueur du tube.

En injectant une petite perturbation, ces champs deviennent :

$$\begin{aligned} u &= 0 + \delta u \\ p - p_e &= 0 + \delta p \\ A &= A_0 + \delta A \end{aligned}$$

et au premier ordre, les équations de conservation et la loi d'état s'écrivent désormais :

$$\frac{\partial \delta A}{\partial t} + A_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho A_0} \frac{\partial}{\partial x} (A_0 \delta p) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x} \quad (3.4b)$$

$$\delta p = \delta A \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial A} \quad (3.4c)$$

On peut réduire ce jeu d'équations en prenant $\frac{\partial}{\partial t}(3.4a) - A_0 \frac{\partial}{\partial x}(3.4b)$:

$$\frac{\partial^2 \delta A}{\partial t^2} = \frac{A_0}{\rho} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2}$$

L'utilisation de la loi d'état (3.4c) permet de former une *équation d'onde* pour la perturbation de pression :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2}} \quad (3.5)$$

où la vitesse de phase est donnée par

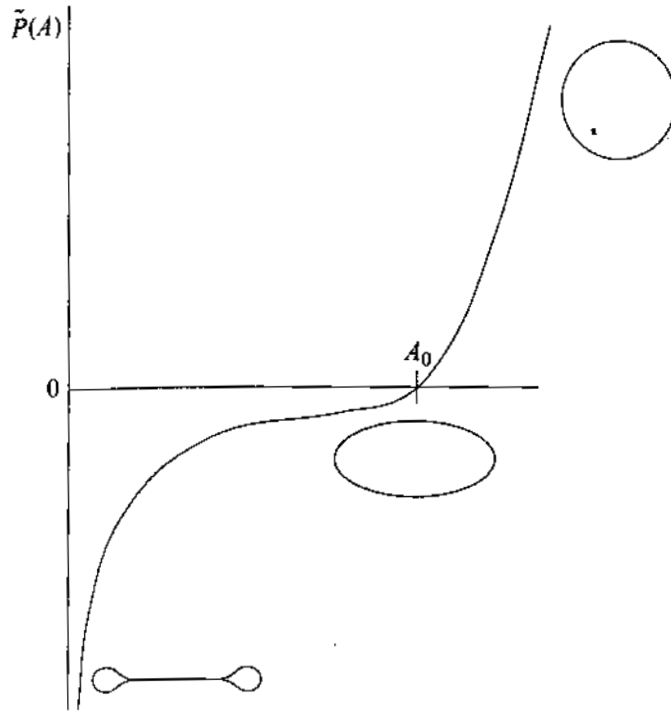
$$c^2 = \frac{A_0}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial A} \quad (3.6)$$

Il existe donc des solutions couplant la déformation de l'artère et une surpression sanguine de la forme $f(x-t)$ ou $g(x+ct)$!

3.3.2 La vitesse de phase : le rôle de l'élasticité

De façon analogue au cas acoustique, nous avons dérivé formellement l'expression de la vitesse de phase en faisant apparaître la quantité $\mathcal{P}'(A)$. Pour aller plus loin, il nous faut maintenant éclaircir cette relation. Ce faisant, nous allons identifier le rôle joué par l'élasticité de l'artère ; en effet, jusqu'ici nous avons essentiellement écrit des bilans qui concernaient la partie fluide.

La figure 3.2 illustre la dépendance de l'écart de pression $p - p_e$ avec l'aire du tube élastique. Lorsque la surpression est importante, la paroi est sous tension, a une forme circulaire, et un accroissement même minime d'aire nécessite d'accroître considérablement la pression : c'est le *régime artériel*. Lorsque la surpression est très faible voire nulle, la membrane perd sa forme circulaire et des variations de pression faible peuvent entraîner

FIGURE 3.2 – Allure de la relation entre la pression transmurale $p - p_e$ et l'aire de la section A .

des variations de forme (et d'aire) importantes. Enfin, lorsque le tube est en dépression par rapport à son environnement, il devient totalement écrasé et adopte une forme caractéristique à deux lobes. La rigidité à la flexion empêche le tube de devenir totalement plat et il faut à nouveau dépenser une énergie considérable en pression pour observer des changements d'aire : c'est le *régime veineux*.

Tentons maintenant d'établir la relation entre la pression et la section. Nous allons en préambule formuler quelques hypothèses simplificatrices. Tout d'abord, nous assimilerons l'artère à un tube élastique de section circulaire de rayon R et d'épaisseur h . On suppose ici que l'épaisseur h est très petite devant le rayon courant. De la sorte on va pouvoir considérer au premier ordre que le champ de contraintes est principalement composé de $\sigma_{\theta\theta}$ ($\sigma_{rr} \ll \sigma_{\theta\theta}$). Considérons une demie-section de tube comme indiqué sur la figure X, et écrivons l'équilibre des forces s'exerçant sur cette portion de structure :

$$(p - p_e) 2R = 2\sigma_{\theta\theta}h$$

Ici $\sigma_{\theta\theta}$ se déduit de la déformation $e_{\theta\theta}$ par la loi de Hooke :

$$\sigma_{\theta\theta} = Ee_{\theta\theta} = E \frac{R - R_0}{R_0}$$

Par ailleurs, en considérant une paroi incompressible, on peut écrire $2\pi R_0 h_0 \simeq 2\pi R h$ soit

$$h = \frac{R_0}{R} h_0$$

Ainsi on pourra écrire :

$$p - p_e = E \frac{(R - R_0)h_0}{R^2} = E \frac{h_0 (A^{1/2} - A_0^{1/2})}{A} \sqrt{\pi}$$

D'où on déduit

$$\frac{\partial}{\partial A} (p - p_e) = \frac{Eh_0}{A^2} \left(\frac{1}{2} A^{1/2} - A^{1/2} + A_0^{1/2} \right) \sqrt{\pi}$$

Évaluée en A_0 , cette dérivée vaut :

$$\left. \frac{\partial}{\partial A} (p - p_e) \right|_{A=A_0} = \frac{Eh_0}{A_0^2} \left(\frac{1}{2} A_0^{1/2} \right) \sqrt{\pi} = \frac{Eh_0}{2A_0 R_0}$$

On en déduit finalement l'expression de la vitesse de phase de l'onde de pouls :

$$c = \left(\frac{Eh_0}{2\rho R_0} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

Cette expression de la vitesse de propagation pour l'onde de pression sanguine a été trouvée par Moëns (1878) et Korteweg (1878).