

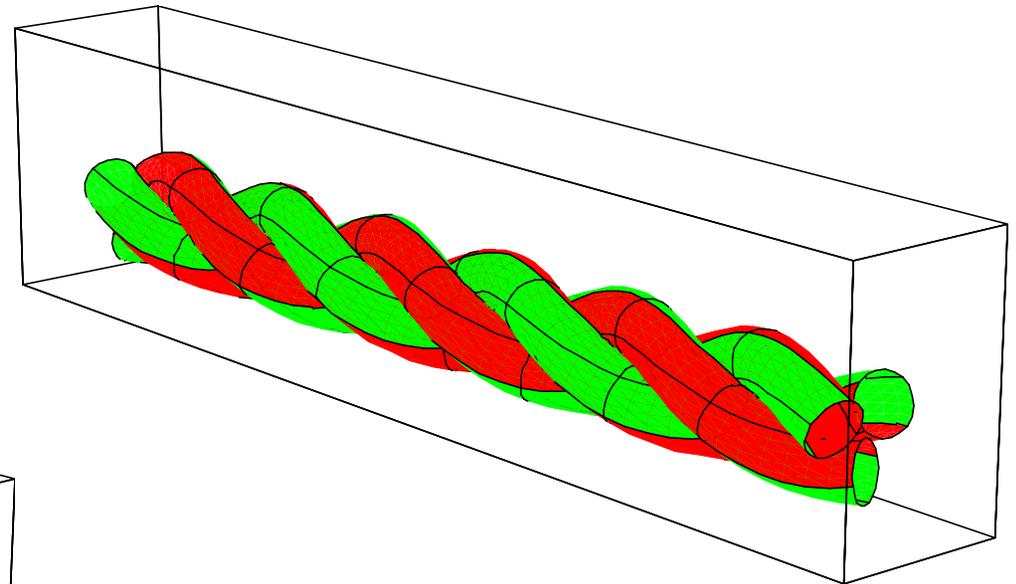
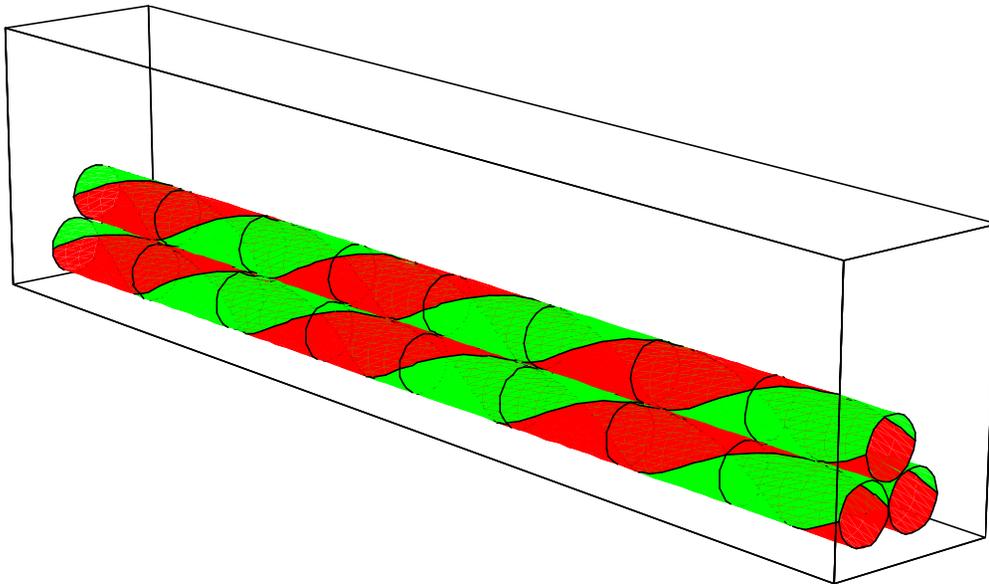
La triple hélice : vers une mécanique du collagène

S. Neukirch & G. van der Heijden

$$L_k = -9$$

$$T_w = -9$$

$$W_r = 0$$

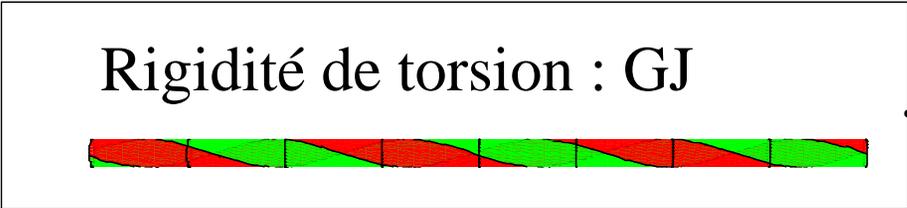
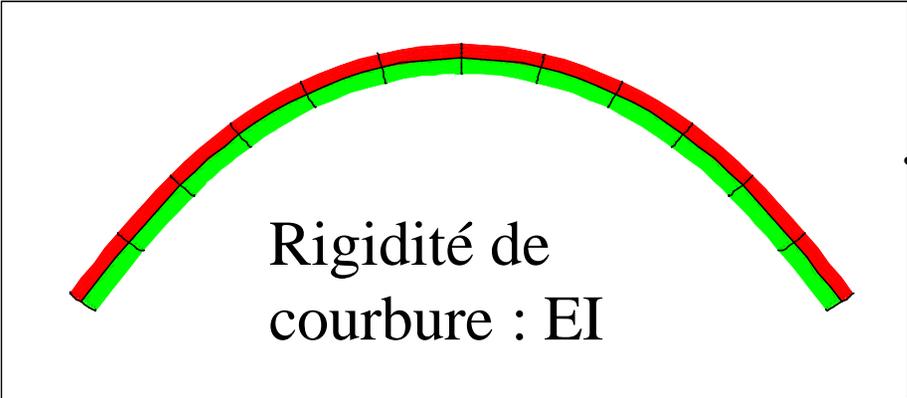


$$L_k = -9$$

$$T_w = -3.3$$

$$W_r = -5.7$$

Compétition courbure / torsion



$$g = \frac{GJ}{EI}$$

silicone	$g \approx 0.67$
métal	$g \approx 0.75$
A.D.N.	$0.7 \leq g \leq 1.5$
collagène	$g = ?$

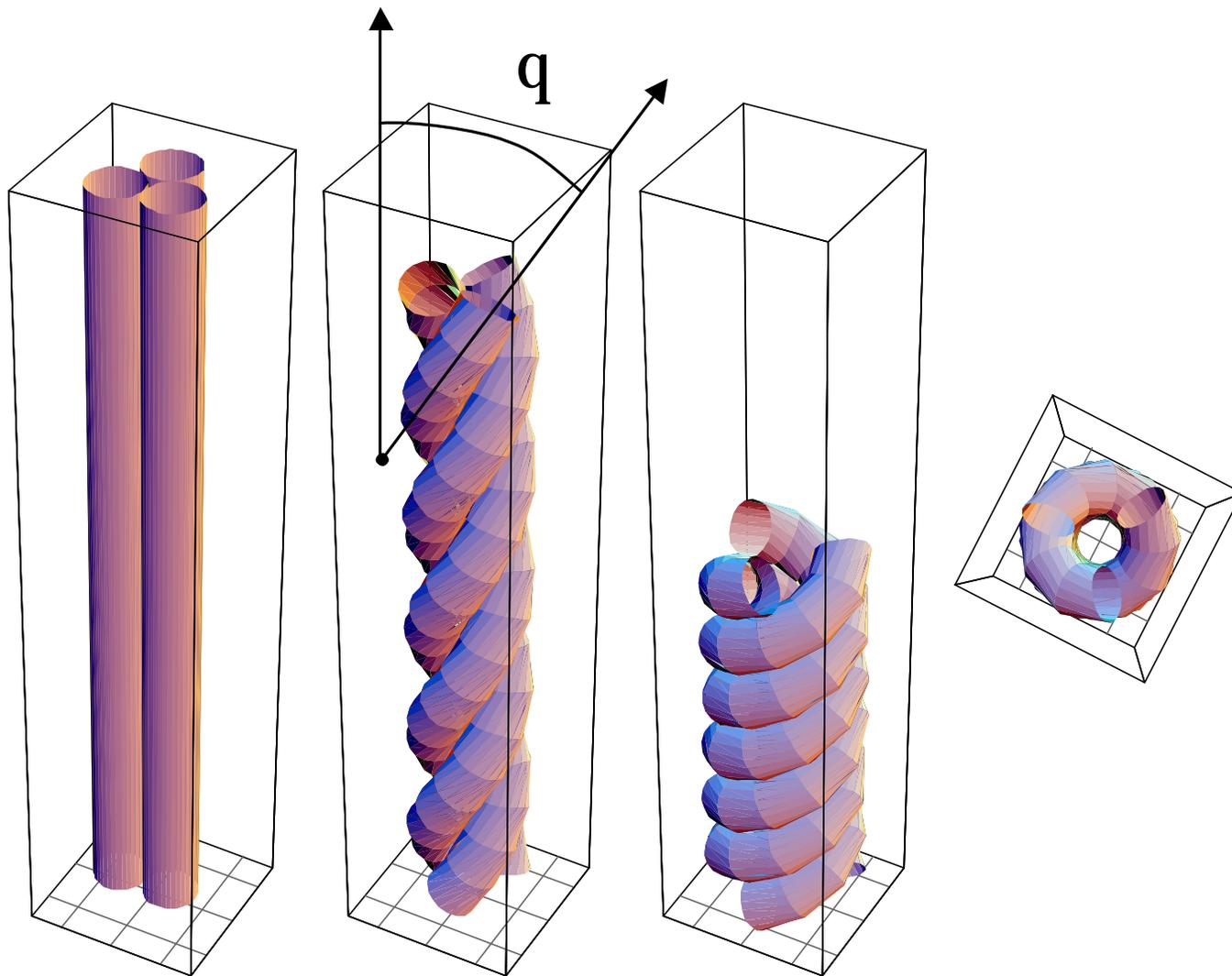
hyperélastique

$$m_k = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{k}} \quad m_t = \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$V = \int_0^L W(s) ds \quad \text{élasticité linéaire}$$

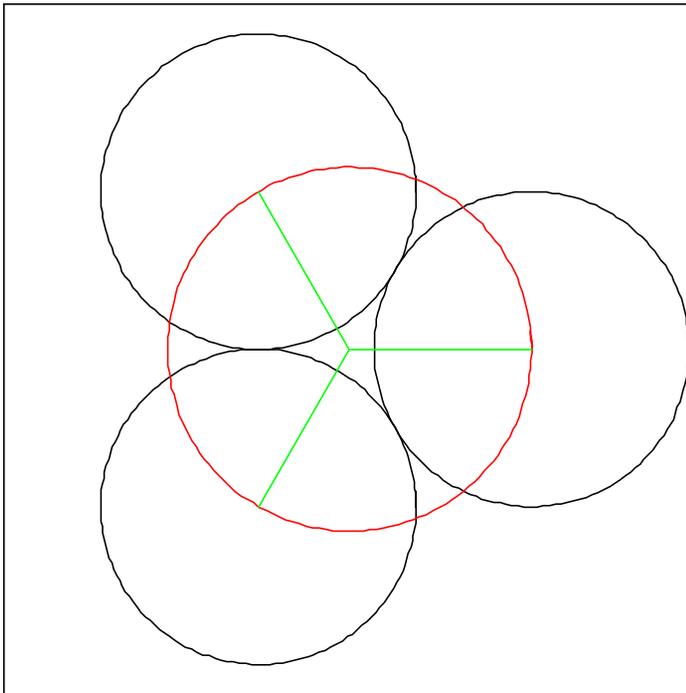
$$W(s) = \frac{1}{2} EI \mathbf{k}^2(s) + \frac{1}{2} GJ t^2(s)$$

Géométrie : enroulement en triple hélice

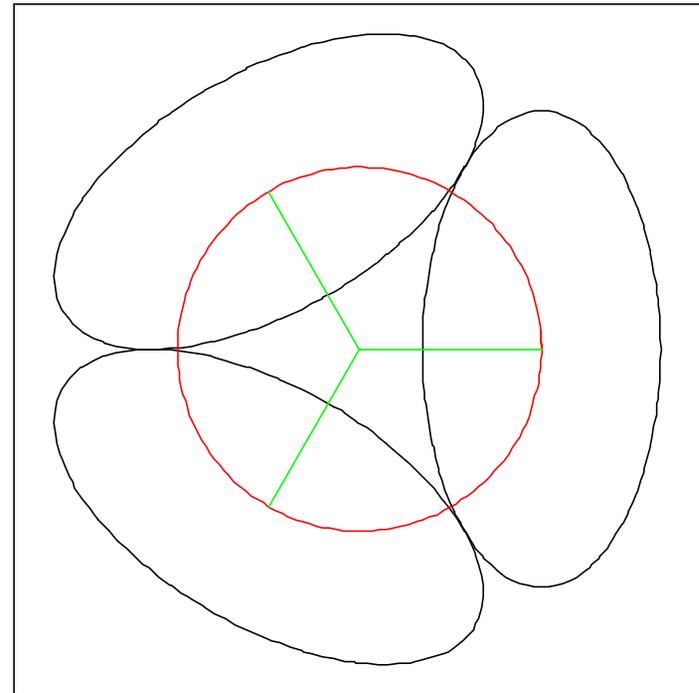


Géométrie : contact entre les brins (incorrect)

$q = 0$



$q > 0$



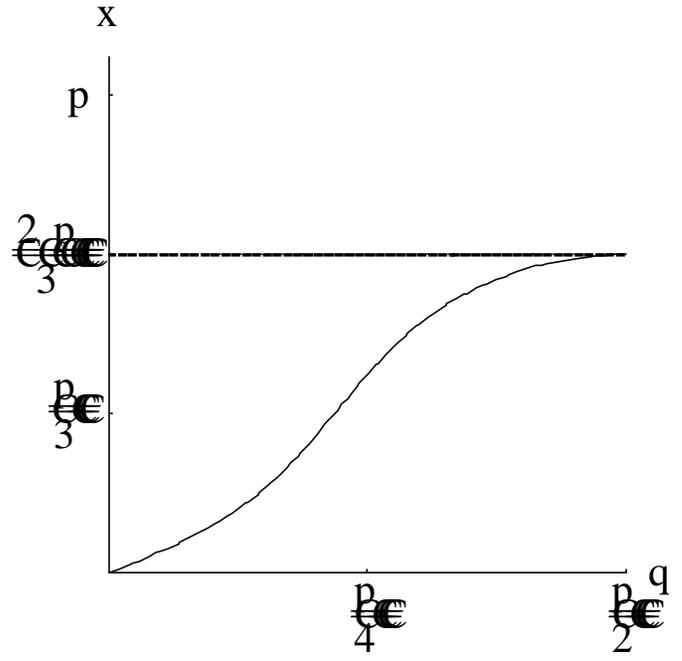
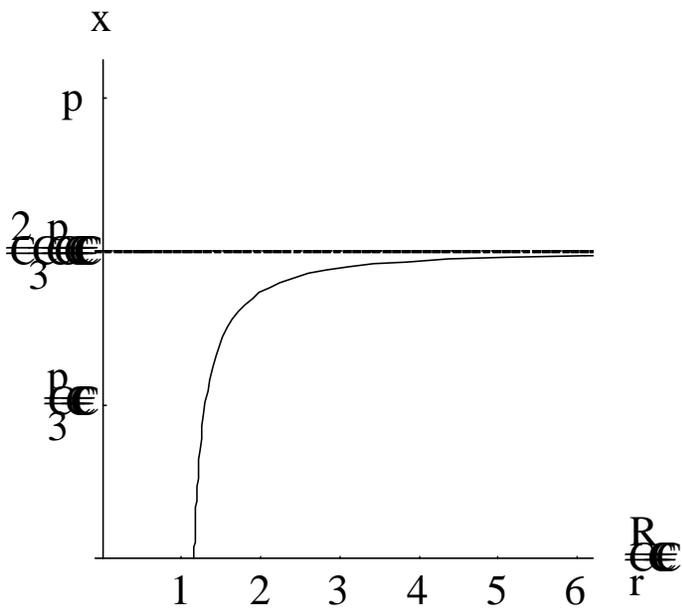
Cette erreur apparaît dans
différents articles, livres
(cables, textile)

Géométrie : contact entre les brins (correct)

- inter distance = $2r$
- contact tangentiel

ligne de contact est une hélice de rayon : $R \cos\left(\frac{1}{2} x \sin q - \frac{p}{n}\right)$

décalage en abscisse curviligne : $x = \frac{s_1 - s_2}{R}$



Mécanique de la torsade

(1) Pourquoi sur-enroulement ? $V = \int_0^L \left(\frac{1}{2} EI \mathbf{k}^2(s) + \frac{1}{2} GJ \mathbf{t}^2(s) \right) ds$

(pour minimiser l'énergie de déformation élastique)

(2) Quel est l'angle de sur-enroulement ?

(3) Quelle est la pression de contact entre les brins ?

Mécanique : obtenir l'équation d'équilibre 1/3

Approche variationnelle : extremum de l'énergie déformation élastique

$$V[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}}] = \int_0^L W(\mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s), \mathbf{f}(s), \dot{\mathbf{f}}(s)) ds \quad V \text{ fonctionnelle}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{f}} = \frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial \dot{\mathbf{f}}}$$

eqs. Lagrange

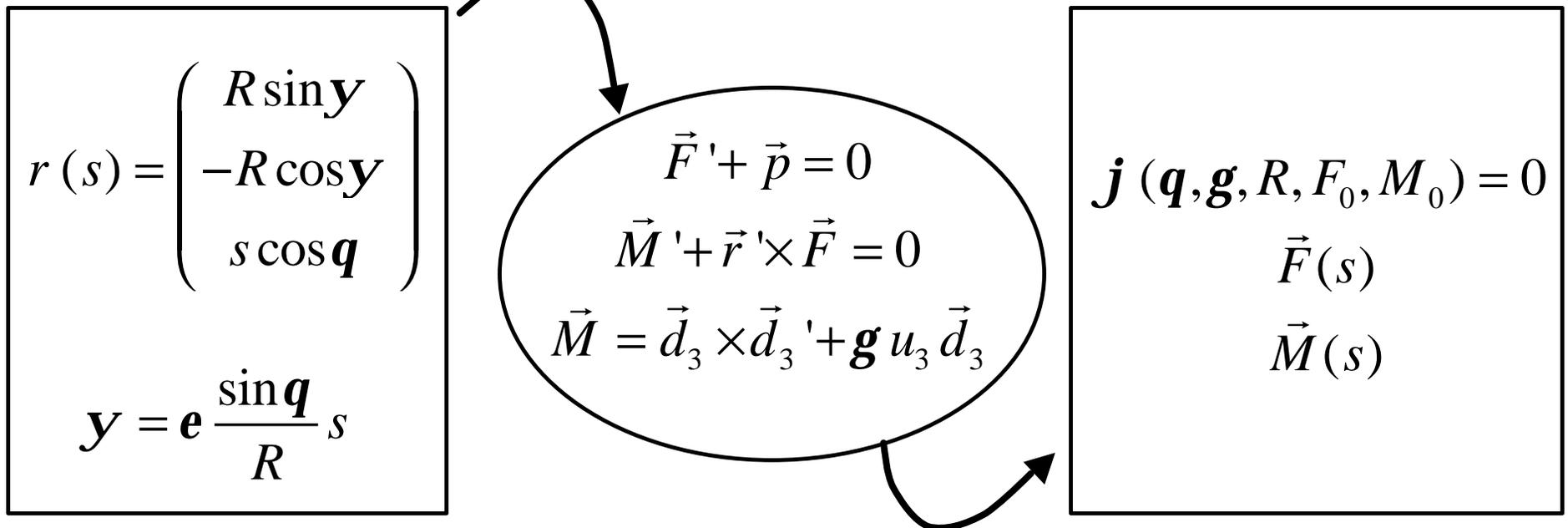
Ne donne pas
la pression de
contact !

Mécanique : obtenir l'équation d'équilibre 2/3

bilan des forces : (1) pour chaque brin et puis (2) pour la torsade

Mécanique : obtenir l'équation d'équilibre 3/3

On impose un type de configuration -> équation devant être vérifiée



Mécanique : équations d'équilibre

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{q}, R, x, u_3) \\ \text{inconnues} \end{array} \right\{ \begin{array}{l} \left(\frac{r}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\mathbf{p}}{n} - x \sin \mathbf{q} \right) \right) + \frac{1}{4} x^2 \cos^2 \mathbf{q} \\ x \cos^2 \mathbf{q} - \sin \mathbf{q} \sin \left(\frac{2\mathbf{p}}{n} - x \sin \mathbf{q} \right) = 0 \\ 2n \sin^3 \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + e n \frac{R}{r} \mathbf{g} u_3 \cos 2\mathbf{q} + \left(\frac{R}{r} \right)^2 f \sin \mathbf{q} - e \frac{R}{r} m \cos \mathbf{q} = C \end{array}$$

n : nombre de brins

système sous contraint !

(f, m) : charges
externes

Pression de contact :
$$\frac{pr^3}{B} = \frac{\sin \mathbf{q}}{r^3} \left[\frac{e\mathbf{r}}{n} m - \mathbf{r} e \mathbf{g} u_3 r \cos \mathbf{q} - \sin^3 \mathbf{q} \right]$$

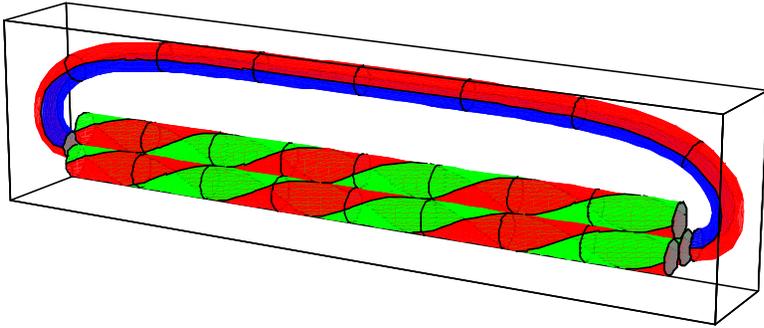
Mécanique : birdcaging of a wire rope

Force de contact :

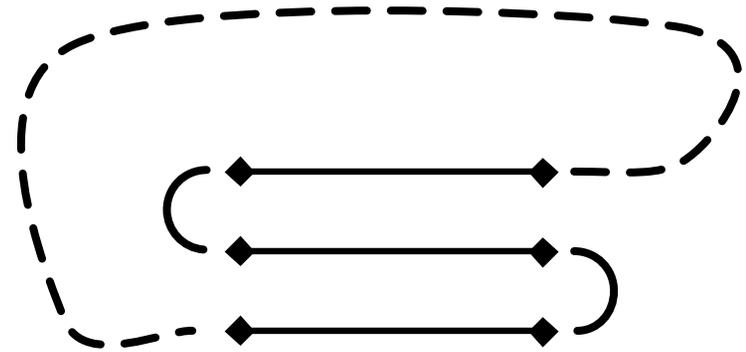
$$\frac{pr^3}{B} = \frac{\sin \mathbf{q}}{\mathbf{r}^3} \left[\frac{\mathbf{er}}{n} m - \mathbf{reg} u_3 r \cos \mathbf{q} - \sin^3 \mathbf{q} \right]$$

Cable à 3 brins : contrainte topologique

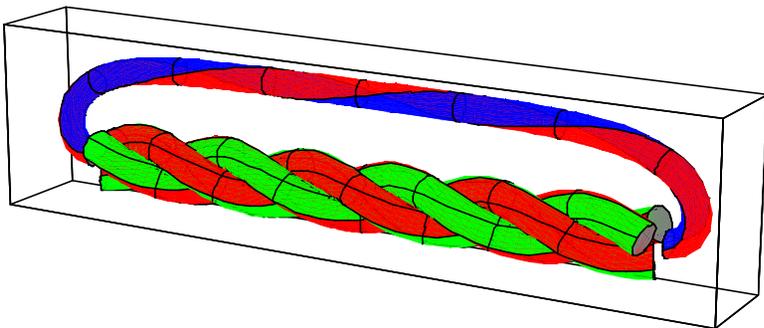
$$L_k = T_w(\text{torsade}) + W_r$$



boucle



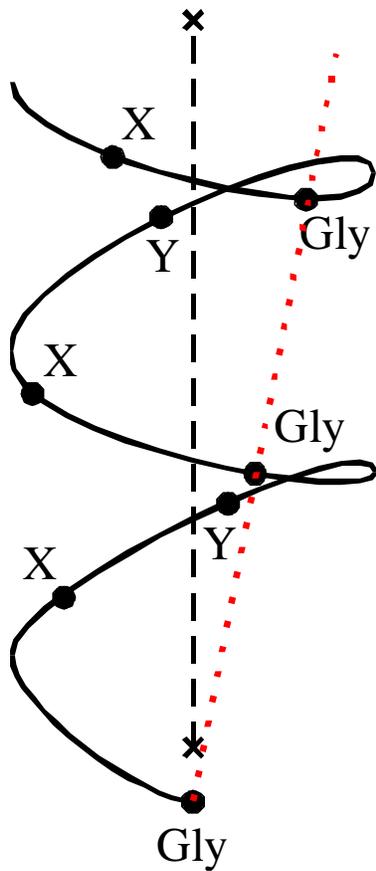
$$L_k = T_w(\text{torsade}) + T_w(\text{boucle}) + W_r$$



Biologie du collagène

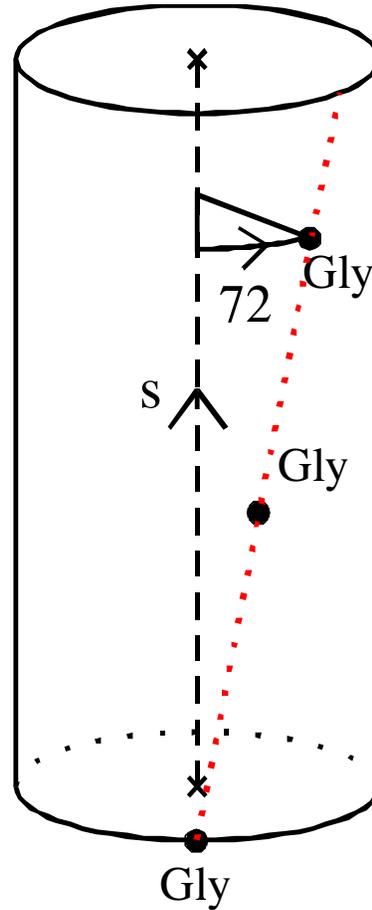
- Protéine fibreuse (os, tendon).
- 25% de la masse protéinique du corps humain.
- Filaments extra-cellulaires (au contraire de l'actine, kératine).
- Hiérarchie : organisation de fibres.
- Tropocollagène : triple hélice.
- Chaque brin compte 1050 résidus.
- Chaque brin est lui même une hélice : polymère $(\text{Gly-X-Y})_n$

Collagène : les résidus de Glycine

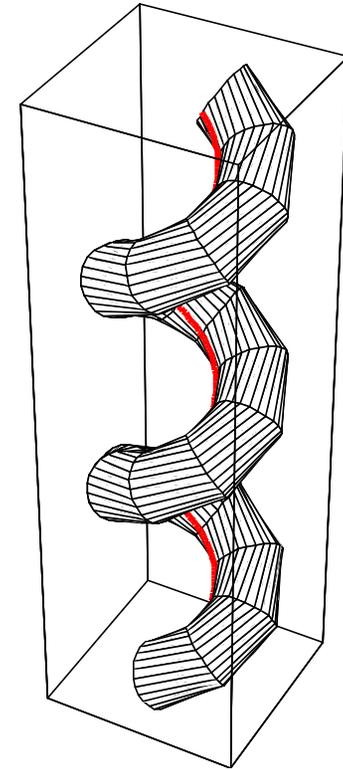


17,16 Å

3.3 résidus / tour



$\hat{t} = 0.0732 \text{ rad} / \text{Å}$



$\hat{f} = -\hat{t}$

Collagène : estimation du rapport des rigidités (brins)

rayon de la triple hélice : $R = 2.8 \text{ \AA}$

Diffraction rayons X (Bella & al., 1994)

pas de la triple hélice : $\Delta_z = 85.5 \text{ \AA} \Rightarrow \mathbf{q} = 0.203 \text{ rad}$ $\left(\Delta_z = \frac{2pR}{\tan \mathbf{q}} \right)$

$$u_3 = \mathbf{f}' + \mathbf{y}' \cos \mathbf{q} = -\mathbf{t} + \frac{\mathbf{e}}{R} \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} = -0.0027 \text{ rad} / \text{\AA}$$

$$\mathbf{g} u_3 = -\mathbf{e} \frac{\sin 2\mathbf{q} \sin^2 \mathbf{q}}{R \cos 2\mathbf{q}} = -0.0062 \text{ rad} / \text{\AA}$$

$\mathbf{g} = 2.3$ hélice primitive : plus facile à courber qu'à tordre

silicone	$\mathbf{g} \approx 0.67$
métal	$\mathbf{g} \approx 0.75$
A.D.N.	$0.7 \leq \mathbf{g} \leq 1.5$
collagène	$\mathbf{g} = ?$

Collagène : modules de rigidité en extension et torsion

relation nonlinéaire entre charges externes et déformations :

$$\Xi(f, m, \Theta(f, m)) = 2n \sin^3 \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + \mathbf{e} n \frac{R}{r} \mathbf{g} u_3 \cos 2\mathbf{q} + \left(\frac{R}{r} \right)^2 f \sin \mathbf{q} - \mathbf{e} \frac{R}{r} m \cos \mathbf{q} = 0$$

linéarisation autour de $(f, m) = (0, 0)$:

rigidité en torsion : $M_0 = C_{ply} u_{3ply} : C_{ply} = B \cos \mathbf{q}_0 \left. \frac{\partial \Xi}{\partial \mathbf{q}} \right|_0$

$$B_{ply} = ? \Rightarrow \mathbf{g}_{TROPO-COL} = ?$$

rigidité en extension : $F_0 = K_{ply} e_{ply} : K_{ply} = \frac{B \cos \mathbf{q}_0}{R^2 \sin^2 \mathbf{q}_0} \left. \frac{\partial \Xi}{\partial \mathbf{q}} \right|_0$