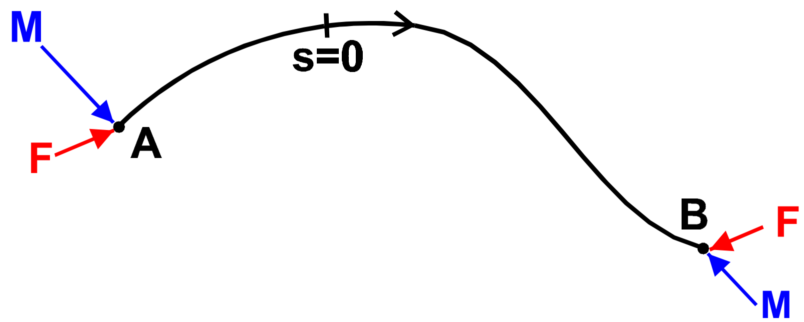
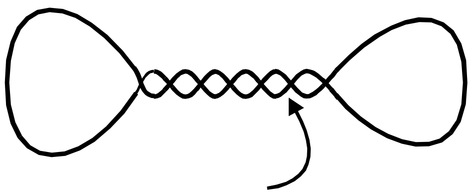
Finite size effects on twisted rods stability

Sébastien Neukirch (joint work with J.M.T. Thompson)

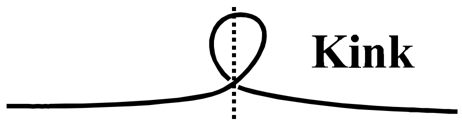
Elasticité des filaments



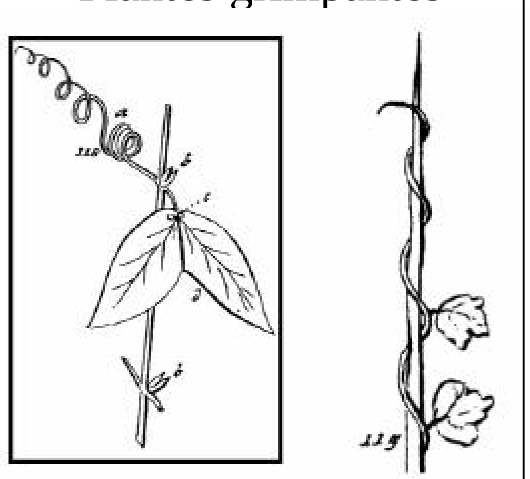
supercoiling of DNA plasmids



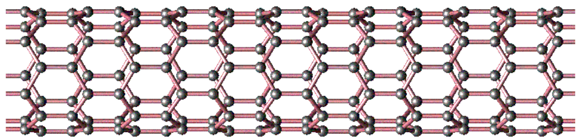
Cables sous-marins



Plantes grimpantes

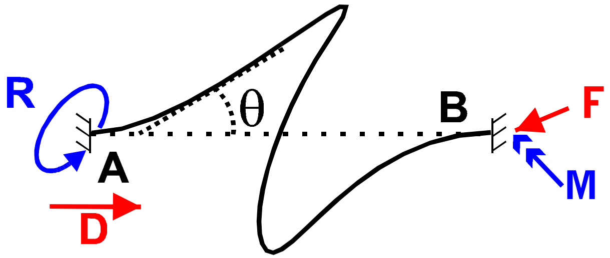


nanotubes de carbone



Applications

2 Expériences types

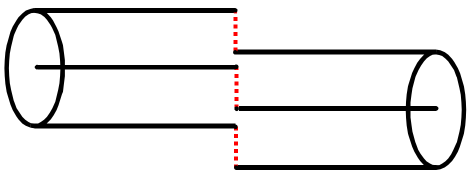


- translation sans rotation (R constant)
- rotation sans translation (D constant)

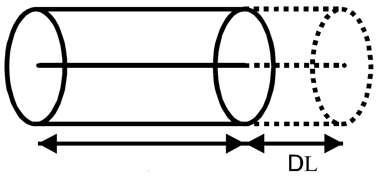
Hypothèses

- pas de courbure intrinsèque
- pas de force ni moment distribué (gravitation)

- pas de déchirement



- pas d'extension



$\left(\vec{u},\vec{v}\right)$	tenseur des déformations		
$\vec{u}$	flexure et torsion	$\vec{v}$	déchirement et extension
$\vec{u}=(k_1,k_2,t)$	courbure et twist		

$\left(\vec{F},\vec{M}\right)$	tenseur des contraintes		
$\vec{F}$	force interne : tension et force de déchirement	$\vec{M}$	moment interne : moment de flexion et de torsion

$\vec{d}_1,\ \vec{d}_2,\ \vec{d}_3$	directors frame	S	abscisse curviligne le long du filament
$\dfrac{d}{dS}\vec{d}_i=\vec{u}\times\vec{d}_i$	relation cinématique	$\dfrac{d}{dS}\vec{R}=\vec{v}=\vec{d}_3+\vec{y}$	relation cinématique

$\vec{M}=\begin{pmatrix} EI_1 & 0 & 0 \\ 0 & EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & GJ \end{pmatrix}(\vec{u}-\vec{u}_0)$	relation de constitution linéaire (loi de Hook) modules de flexion et torsion $\vec{u}_0$ courbure intrinsèque.
$\vec{F}=\begin{pmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}\left(\vec{v}-\vec{d}_3\right)$	relation de constitution linéaire (loi de Hook) modules de déchirement et d'extension

$\dfrac{d}{dS}\vec{F}+\vec{f}=0$	relation fond. Dynamique $\vec{f}$ force distribuée le long du filament	$\dfrac{d}{dS}\vec{M}+\vec{m}+\vec{v}\times\vec{F}=0$	relation fond. Dynamique $\vec{m}$ moment distribué le long du filament

Equations d'équilibre du filament

- 1 variable indépendante S : E.D.Os
- Static-Dynamic Kirhhoff analogy : spinning top <=> spatial *elastica*

$$\frac{d}{dS}\vec{F} = 0$$

$$\frac{d}{dS}\vec{M} = \vec{F} \times \vec{d}_3$$

$$\frac{d}{dS}\vec{R} = \vec{d}_3$$

$$\frac{d}{dS}\vec{d}_i = \vec{u} \times \vec{d}_i$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} EI & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & GJ \end{pmatrix} \vec{u}$$

7 équations

7 inconnues

$\vec{F}(S)$

$\vec{M}(S)$

$\vec{R}(S)$

$\vec{d}_1(S)$

$\vec{d}_2(S)$

$\vec{d}_3(S)$

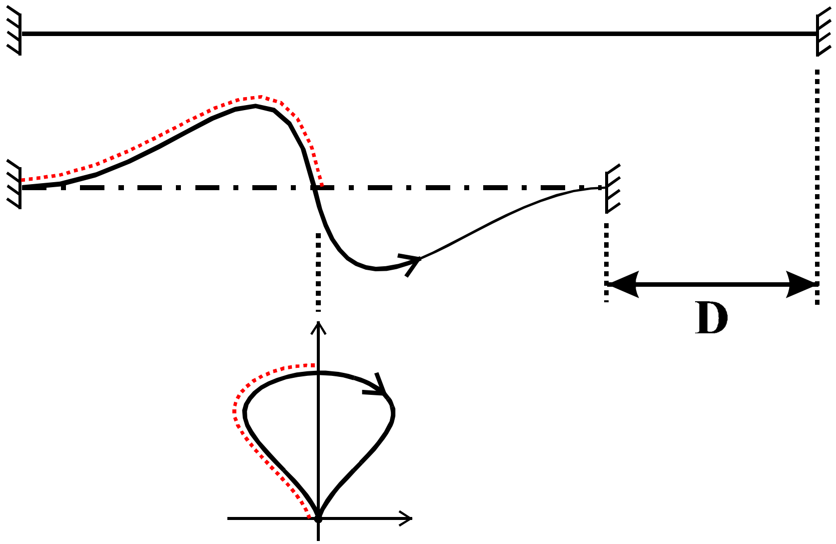
$\vec{u}(S)$

$EI_1 = EI_2$

intégrable

- Conditions aux bords : $\vec{AB} = k\,\vec{d}_3(B)$ $\quad \vec{d}_3(A) = \vec{d}_3(B)$

Filament de longueur infinie (van der Heijden - Thompson)



Réduction système à oscillateur équivalent (2D)

Localisation spatiale de la déformation.

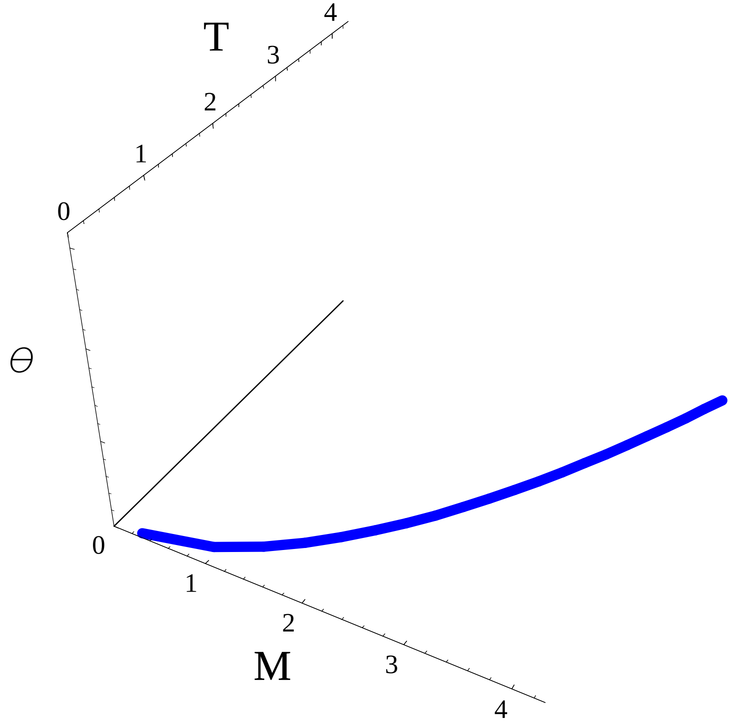
- és // axe .
- : $M^2 = 4T$
-

- Ensemble de toutes les configurations flambées possibles.
- cond. . qui décrivent cet

$$= 2T\left(1+\cos\left(q_{\max}\right)\right)$$

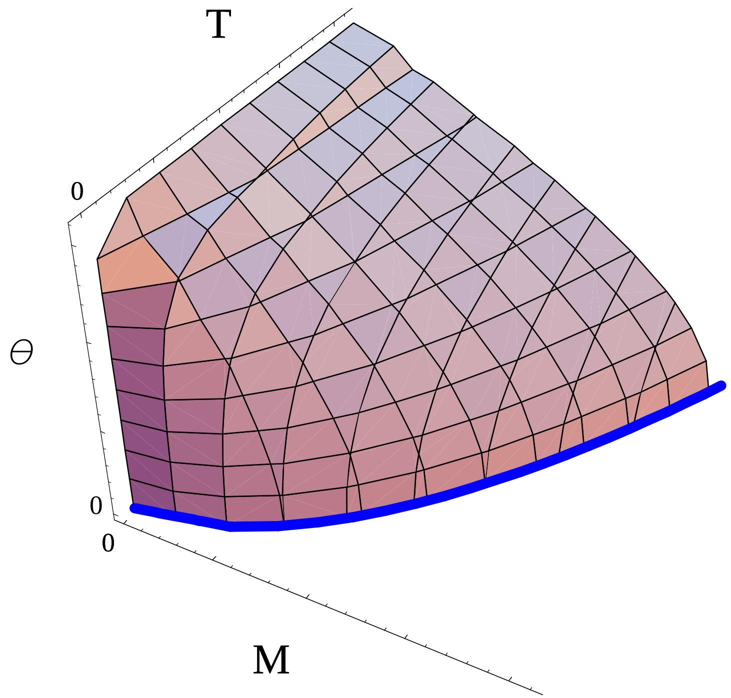
Rigid Loading *(R,D)* : $D = \sqrt{\frac{16}{T}\left(1-\frac{M^2}{4T}\right)}$ $R = \infty$ (dès que $M > 0$)

Filament de longueur infinie : surface post-flambage



$$\boxed{M^2 = 4T}$$

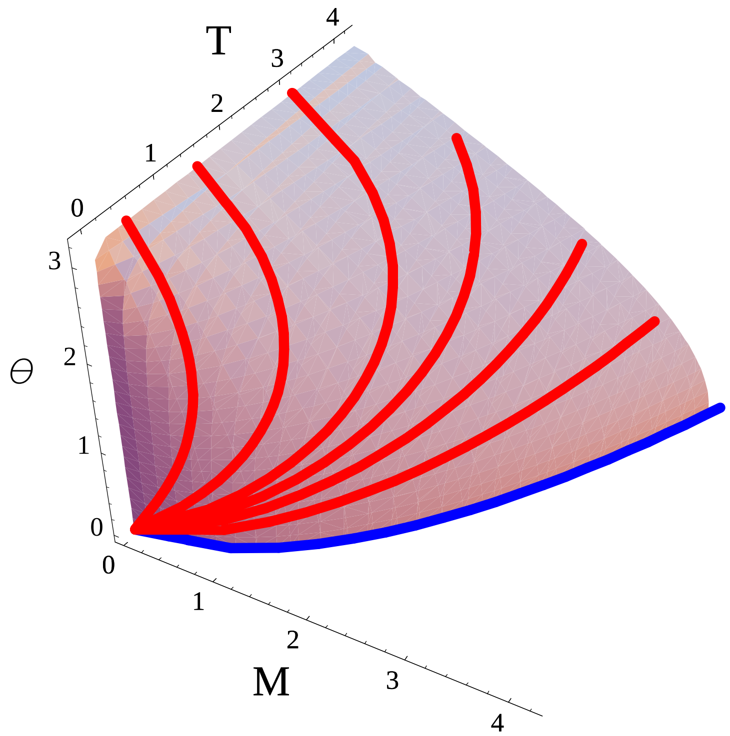
Filament de longueur infinie : <u>surface post-flambage</u>



$$\boxed{M^2 = 4T}$$

$$\boxed{M^2 = 2T\left(1+\cos\left(q_{\max}\right)\right)}$$

Filament de longueur infinie : <u>surface post-flambage</u>

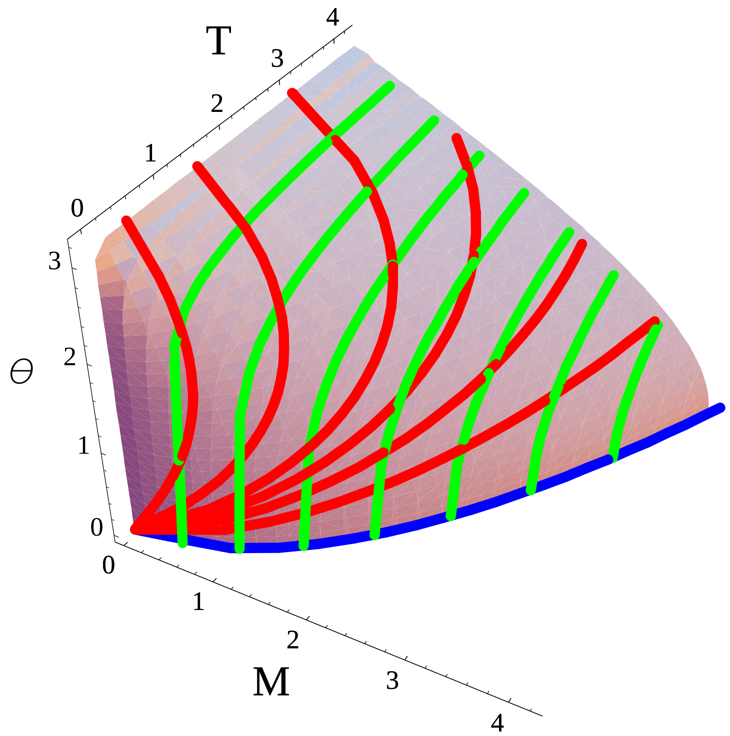


$$\boxed{M^2 = 4T}$$

$$\boxed{M^2 = 2T\left(1+\cos\left(q_{\max}\right)\right)}$$

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{16}{T}\left(1-\frac{M^2}{4T}\right)}}$$

Filament de longueur infinie : <u>surface post-flambage</u>



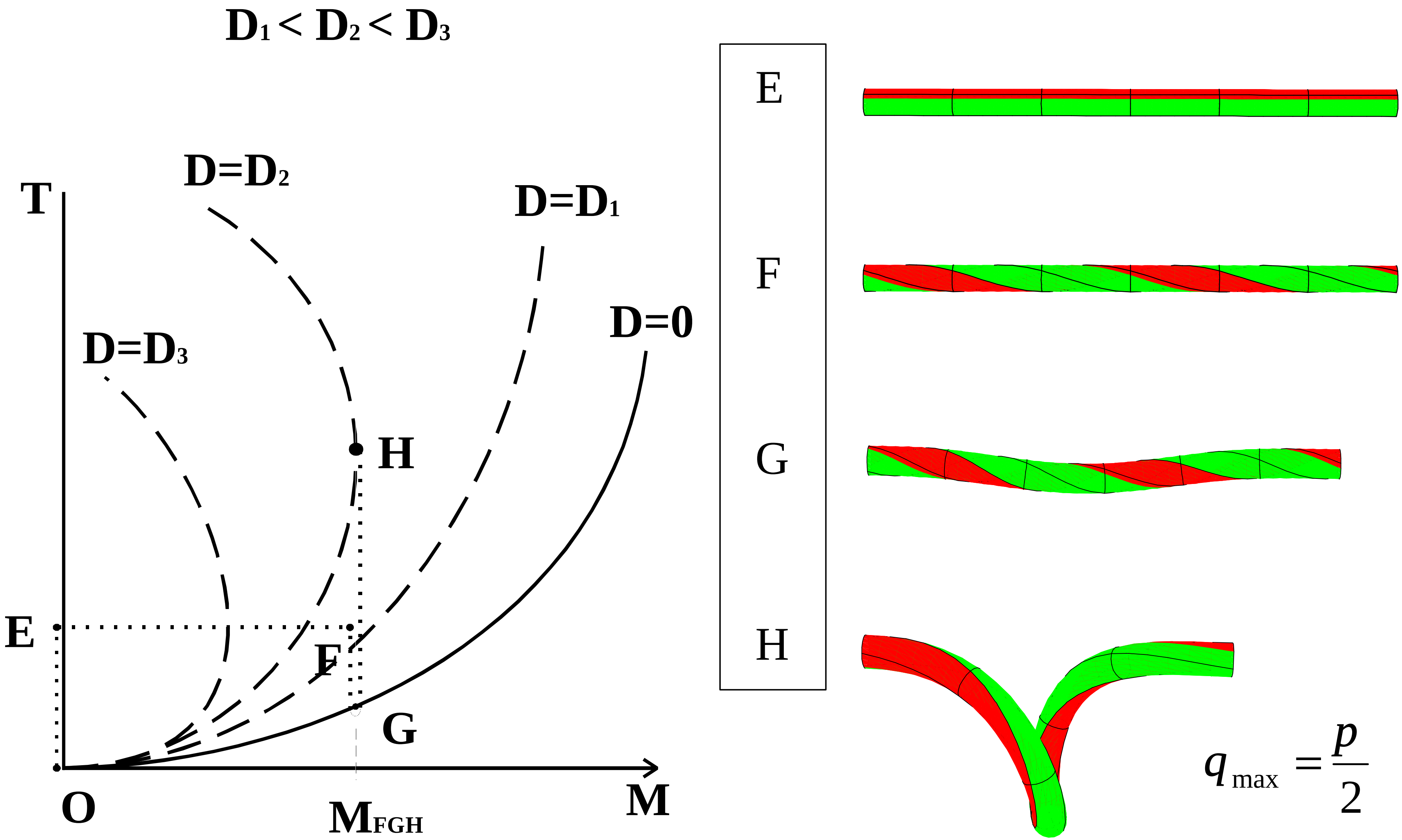
$$\boxed{M^2 = 4T}$$

$$\boxed{M^2 = 2T\left(1 + \cos\left(q_{max}\right)\right)}$$

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{16}{T}\left(1 - \frac{M^2}{4T}\right)}}$$

const: R <=> const. M

Filament de longueur infinie : <u>expérience translation sans rotation</u>



$$q_{\max} = \frac{p}{2}$$

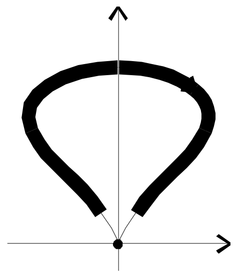
Filament très long : <u>const. R $\neq$ const. M</u>

• Longueur L : $m = \dfrac{M\,L}{EI}$, $t = \dfrac{T\,L^2}{EI}$, $\Gamma = \dfrac{GJ}{EI}$, $d = \dfrac{D}{L}$, $s = \dfrac{S}{L} \in [-\dfrac{1}{2};+\dfrac{1}{2}]$

• Même formule pour D : $d = \sqrt{\dfrac{16}{t}\left(1 - \dfrac{m^2}{4t}\right)}$

• Même formule pour surface post-flambage : $m^2 = 2t\left(1 + \cos\left(q_{\max}\right)\right)$

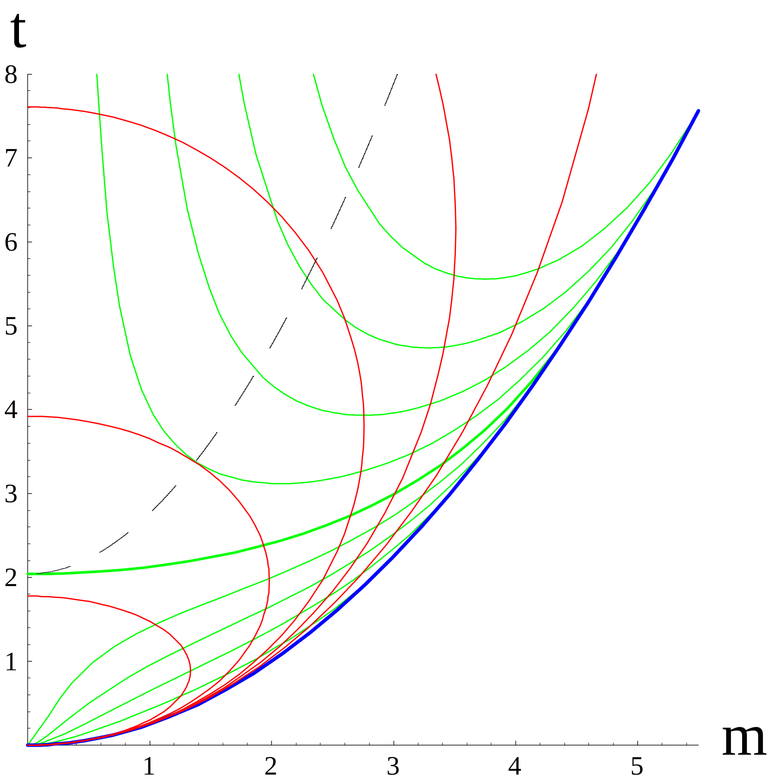
• $R < \infty$, mais on intègre le long de la trajectoire homocline :



$$R = \frac{m}{\Gamma} + 4\,ArcCos\left(\frac{m}{2\sqrt{t}}\right)$$

• Dépendance de R % G alors que d et m^2 ne dépendent pas de EI ni de GJ

Filament très long : surface post-flambage



- On retrouve la tangence (point H)
- Limite de stabilité : $m^2 = 4t\left(1 - \frac{\left(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 + 2t}\right)^2}{4t}\right)$

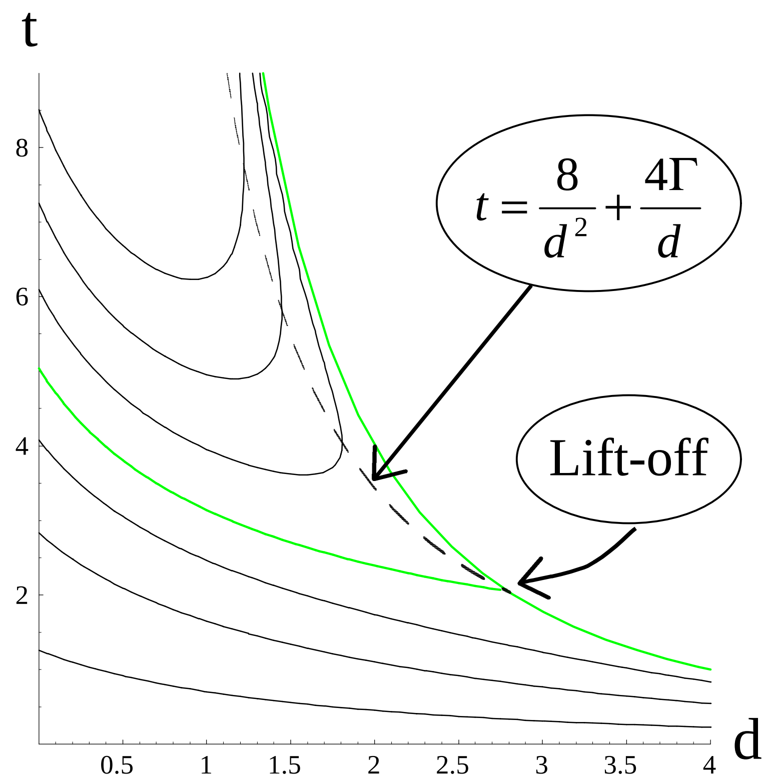
  Correspond à $q_{max} > \frac{p}{2}$

  Plus stable que dans le modèle précèdent.

- Courbe spéciale : $R = 2p$
- pas d 'instabilité pour $R < 2p$
- Ce diagramme permet d 'avoir accès à toutes les configurations possibles.

- Projection !
- Correction semi-finie

Filament très long : <u>stabilité lorsque *R* fixe</u>



Courbes de niveau :

$$R_0 = \frac{2}{\Gamma}\sqrt{t}\sqrt{1-\frac{d^2 t}{16}} + 4\,ArcCos\left(\sqrt{1-\frac{d^2 t}{16}}\right)$$

- Changement de stabilité aux points limites en *D*

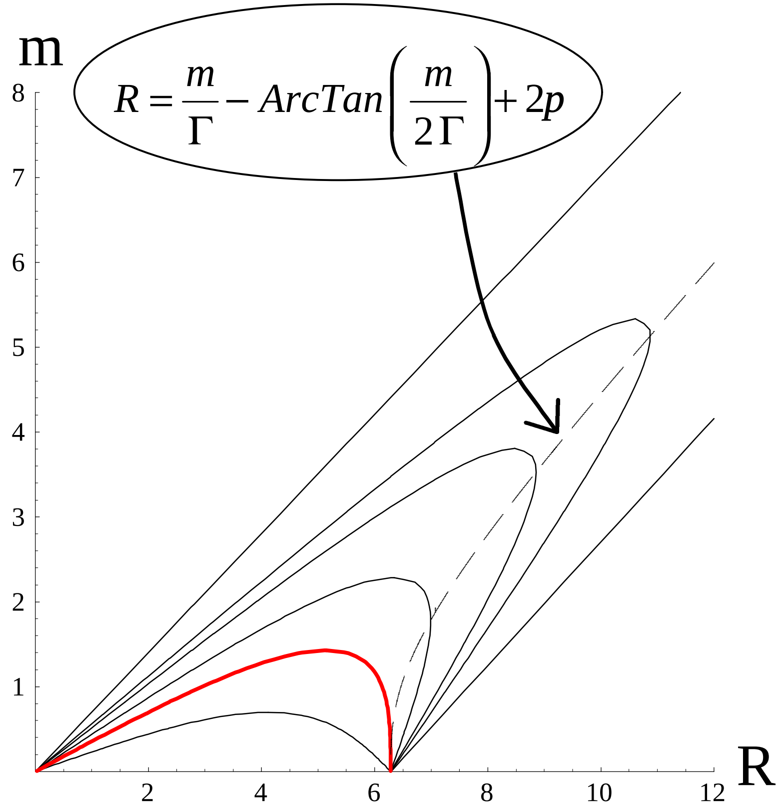
  Energie pot. déformation : $U(k,t)$

  On contrôle *D*, paramètre conjugué : $-\left.\frac{dU}{dD}\right|_{path} = T$

  Thm : proche point limite, pente positive <=> stable

- Branche spéciale : $R = 2p$
- Les courbes $R < 2p$ ne présentent pas de point limite

Filament très long : <u>stabilité lorsque *D* fixe</u>



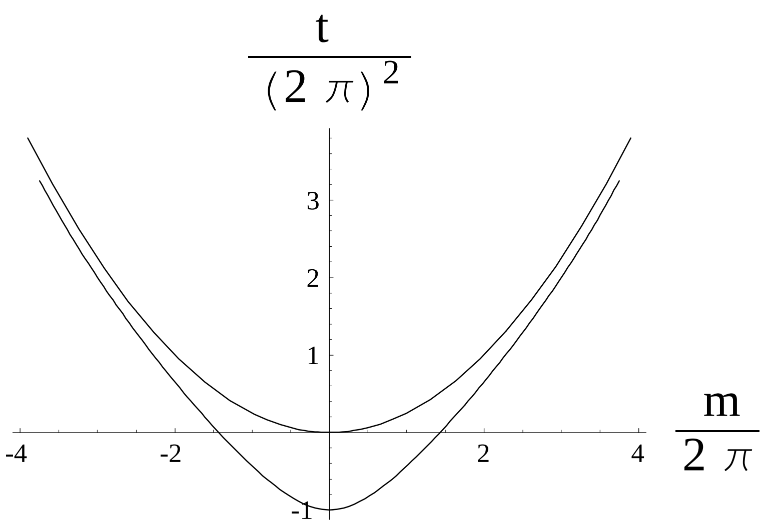
Courbes de niveau :

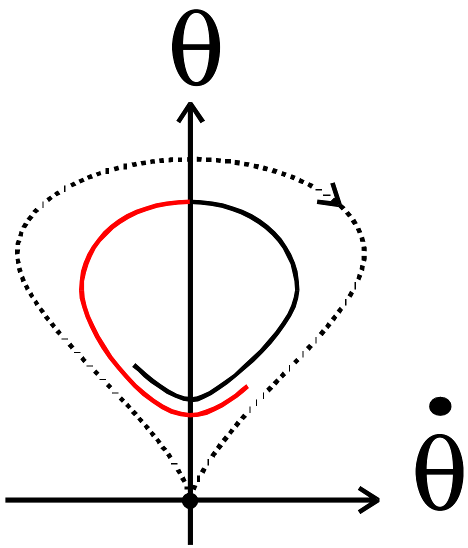
$$R_{\pm} = \frac{m}{\Gamma} + 4\,ArcCos\left(\frac{m\,d_0}{2\sqrt{2}\sqrt{4 \pm \sqrt{16 - m^2\,d_0}}}\right)$$

- On tourne les extrémités sans translation
- On contrôle *R*, le paramètre conjugué est - *m*
- Changement stabilité. : point limite en *R*
- Faible raccourcissement : instabilité vers contact
- Fort raccourcissement : le filament vient se toucher de façon quasistatique (config. plane)

$$d_{LIM} = \frac{2}{\Gamma}$$

Filament de longueur finie : ~~homocline~~





• Flambage sous compression

$$\left(Cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4t}\right)-Cos\left(\frac{m}{2}\right)\right)\sqrt{m^2-4t}=t\,Sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4t}\right)$$

• Différence théorique

mêmes équations mais plus de paramètres

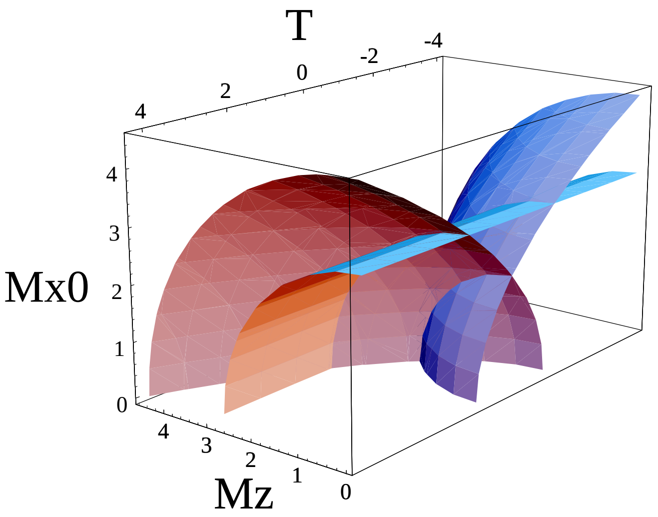
système toujours intégrable

espace des phases ne contient plus de courbe homocline (de façon générique).

• 'Wrench' équivalent (moment, force) n'est plus // aux deux bornes de l'appareil.

• Présence d'une force de déchirement et d'un moment de flexion aux bornes.

Filament de longueur finie : surface post-flambage



$$d_{3x}{}' = t\,x\,d_{3z} - m_z\,d_{3y}$$
$$d_{3y}{}' = t\,y\,d_{3z} - m_{x0}\,d_{3z} + m_z\,d_{3x}$$
$$d_{3z}{}' = -t\,y\,d_{3y} - t\,x\,d_{3x} + m_{x0}\,d_{3y}$$
$$x' = d_{3x}$$
$$y' = d_{3y}$$
$$z' = d_{3z}$$

- Problème avec conditions aux bords (BVP)
- Réduction vers un système 6D
- GRS : global representation space (IVP)

  \+ conditions initiales non triviales q_0

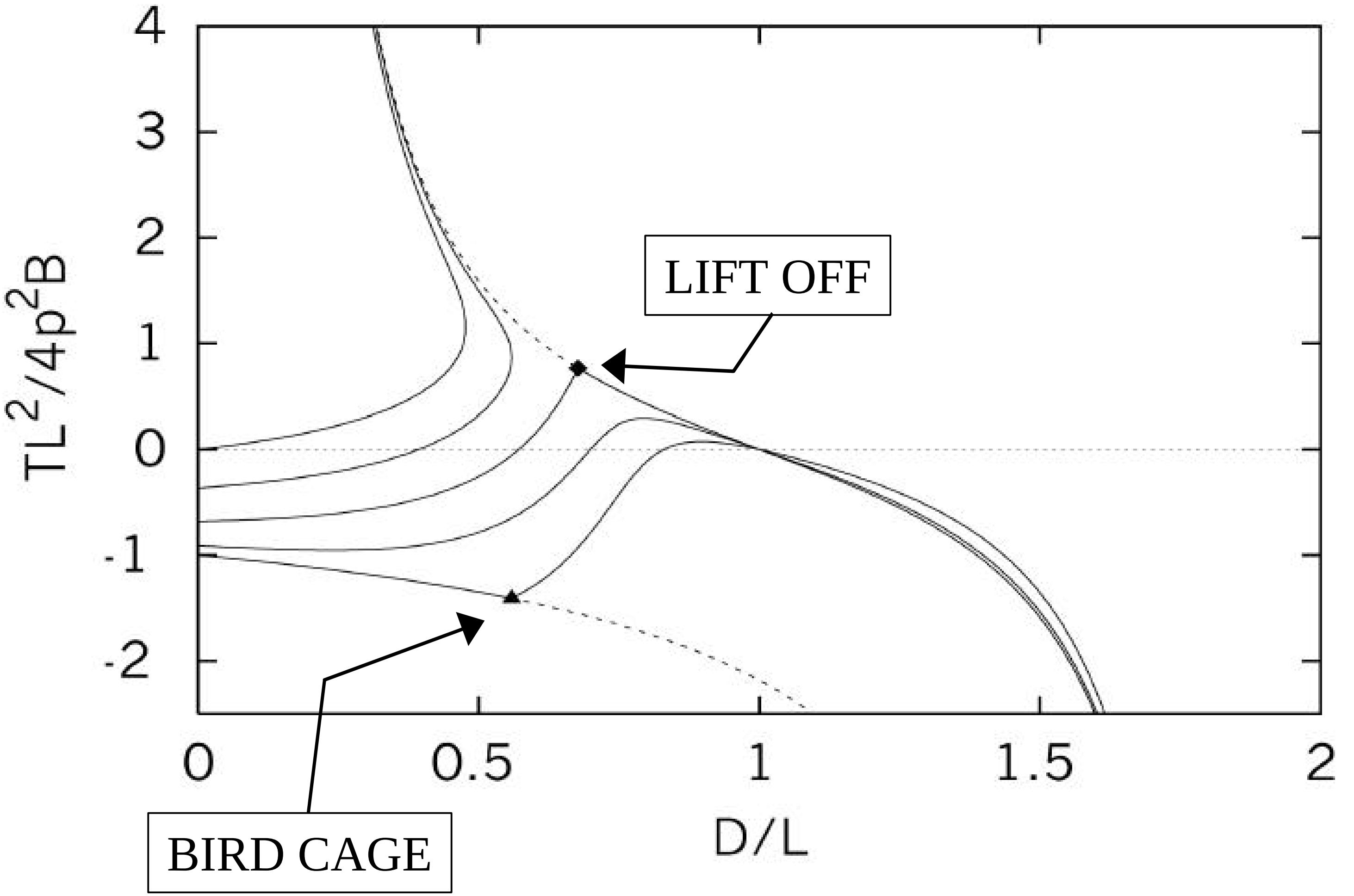
  \+ paramètres libres m_z, t, m_{x0}

  => toutes les configurations possibles

  => unicité configuration % (m_z, t, m_{x0}, q_0)

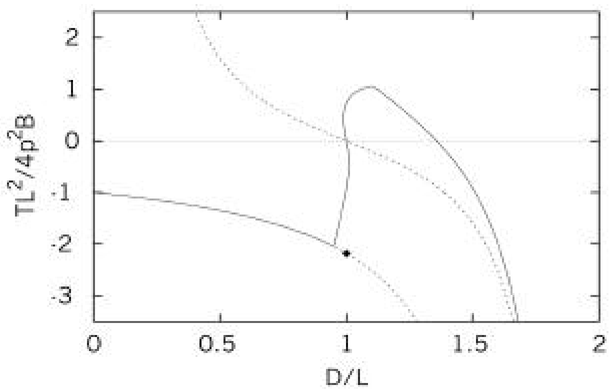
- Condition aux bords : $\begin{cases} d_{3y} = 0 \\ x\,d_{3z} = z\,d_{3x} \end{cases}$
- Toutes les configurations sont s-symétriques.

Filament de longueur finie : <u>translation sans rotation</u>

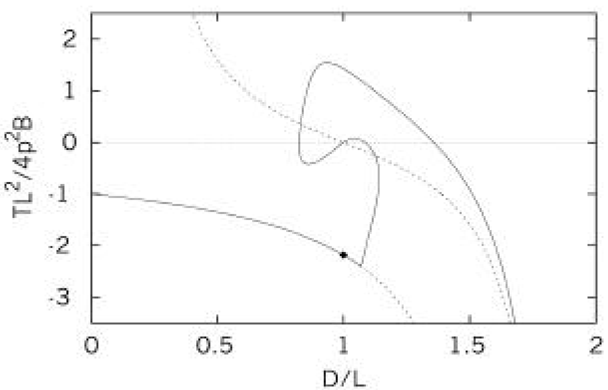


Filament de longueur finie : <u>translation sans rotation</u> dépendance en Γ

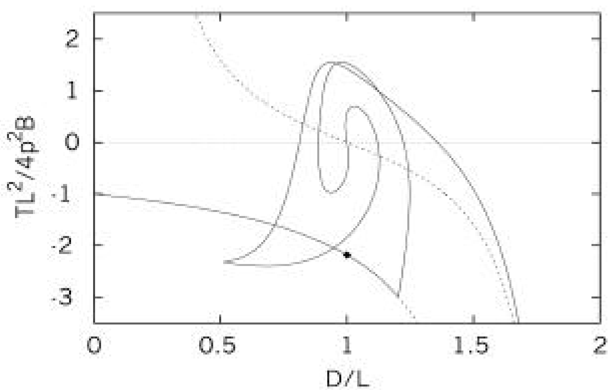
Γ = 1.8



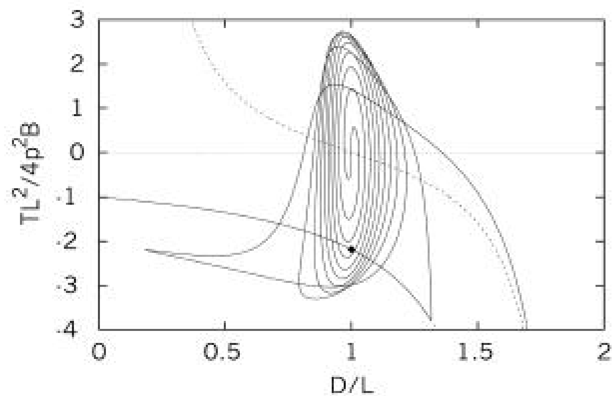
Γ = 2.4



Γ = 4.0

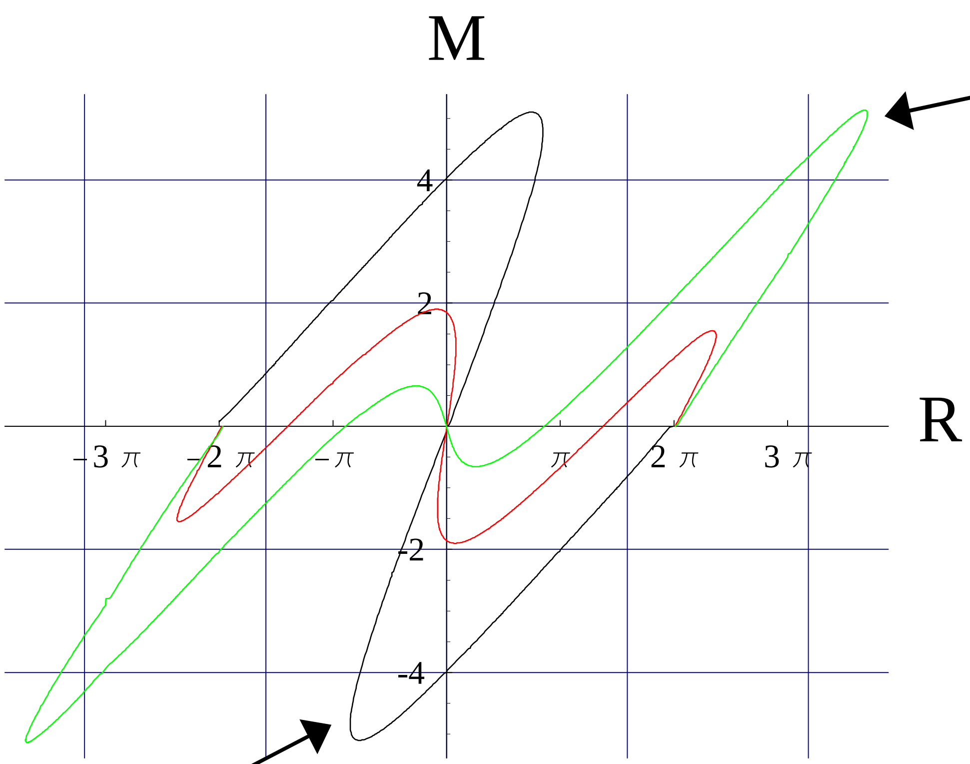


Γ croissant



Γ = 12

Filament de longueur finie : rotation sans translation

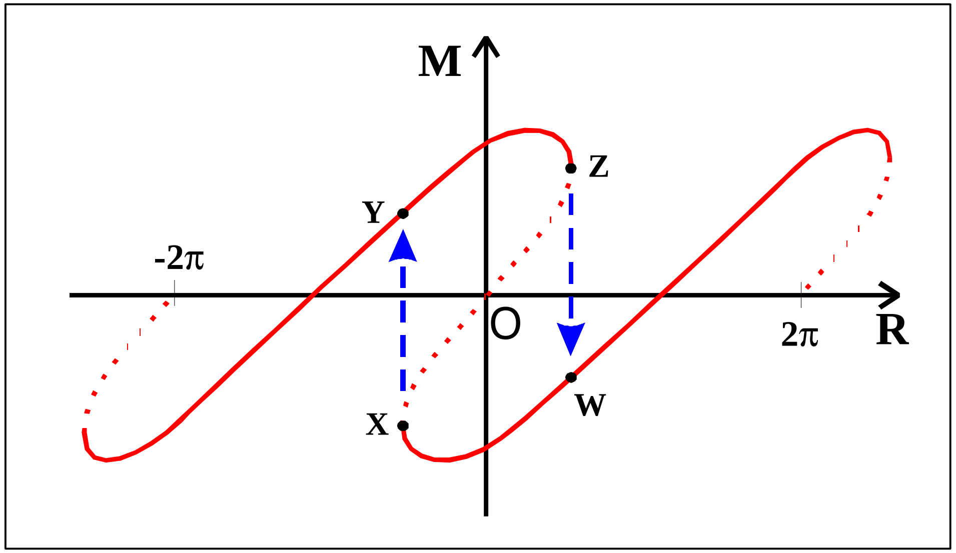


Même point limite que précédemment.

D_0=0.5

D_0=0.62

D_0=0.8



Nouveau point limite => hystérésis

Filament de longueur finie : rotation sans translation dépendance en Γ