Intégrabilité et attracteurs chaotiques *

Sébastien Neukirch†

C.N.R.S. Lab. math. et phys. théo. Université de Tours

Abstract

L'utilisation de la structure analytique de systèmes dynamiques dissipatifs nous permet de caractériser leur attracteurs chaotiques dans l'espace des phases. Mais aussi de déterminer des plages de valeurs des paramètres pour lesquels il n'y a pas de chaos et occasionnellement de recueillir de l'information sur les bassins d'attractions des points d'équilibre.

1 Introduction

L'intégrabilité est une notion importante dans la théorie des sytèmes dynamiques. On l'étudie en général via des méthodes d'analyse des singularités des équations et on distingue intégrabilité complète et intégrabilité partielle [1]. Au siècle dernier, la plupart des travaux portaient sur le développement analytique des solutions (de la variable complexe) autour des singularités (travaux de Cauchy, Briot et Bouquet, Weierstrass). Puis Poincaré introduisit l'étude géométrique et globale des solutions. La puissance de son étude qualitative, après avoir eu du mal à s'imposer, éclipsa (presque) totalement les développements analytiques. Dans la première partie du 20^e siècle, Painlevé fit faire un retour percutant à l'étude analytique (mais cette fois ci globale) des solutions. Plus récemment, l'arrivée d'ordinateurs puissants permettant de calculer une approximation des solutions à relégué les méthodes analytiques au second plan. Certains auteurs [2] ont néanmoins remarqué que les informations sur la structure analytique d'un système peuvent éclairer ses aspects chaotiques ou turbulents (certaines singularités seraient responsables de l'intermittance par exemple).

Nous allons voir que ces méthodes analytiques et en particulier les méthodes d'intégrabilité peuvent être utilisées pour acquerir de l'information sur les différents comportements des systèmes chaotiques : localisation des attracteurs chaotiques, détermination de plages de valeurs des paramètres pour lesquelles il n'y a pas de chaos, détection de parties des bassins d'attraction des points d'équilibre.

2 De l'intégrabilité au chaos

Nous allons illustrer notre méthode sur un système classique. Le système de Lorenz est la simplification des équations de Boussinesq modélisant le mouvemenent d'un fluide placé entre deux plaques horizontales et traversé par un flux de chaleur [3].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma\,(y-x) \\ \dot{y} &= r\,x - y - x\,z \\ \dot{z} &= -b\,z + x\,y \end{aligned} \tag{1}$$

*publication prévue dans *Les Editions Paris Onze (1999) Orsay*

†seb@celfi.phys.univ-tours.fr

On remarque que la divergence du champ de vecteur est constante et négative. Ceci est un héritage de l'aspect fortement dissipatif du système physique de départ. Le système (1) a 3 paramètres (positifs) et donc un espace des paramètres inclus dans $\mathbb{R}^3$.

Dans le cas général (pour presque toutes les valeurs des paramètres), on ne peut pas intégrer le système, c'est à dire qu'on ne peut pas écrire les solutions $x(t), y(t), z(t)$ de manière analytique. On calcule une approximation de ces solutions numériquement.

• Intégabilité complète

Néanmoins, pour certaines valeurs des paramètres, on peut intégrer les équations : si $b = 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$, $\forall r$, le système passe le test de Painlevé et admet deux intégrales du mouvement :

$$I_1 = (y^2 + z^2)\, e^{2t} \quad , \quad I_2 = (x^2 - z)\, e^t \tag{2}$$

c'est à dire que $\dot{I}_{1,2} \equiv 0$. Les trajectoires évoluent donc à l'intersection des deux surfaces définies par les équations I_1 = constante et I_2 = constante. De plus les solutions s'écrivent en terme de fonctions elliptiques [4, 6]. Dans ce cas particulier où il n'y a évidemment pas de chaos, nous avons énormement d'information sur les solutions du système mais dans une infime partie de l'espace des paramètres (une droite dans l'espace à 3 dimension des paramètres).

• Intégrabilité partielle

Si on relâche les conditions d'intégrabilité : $b = 2\sigma$, $\forall r$, le système ne passe plus le test de Painlevé et on ne peut plus écrire les solutions à l'aide de fonctions connues. Il n'y a plus qu'une intégrale du mouvement :

$$I_3 = (x^2 - 2\,\sigma\, z)\, e^{2\sigma\, t} \tag{3}$$

ce qui assure toujours l'absence de comportement chaotique (théorème de Bendixon-Poincaré). On a donc moins d'information sur le système qu'auparavant mais sur une plus grande partie de l'espace des paramètres (un plan dans l'espace des paramètres).

• Non intégrabilté

Si on relâche encore les conditions d'intégrabilité : $b \neq 2\,\sigma$, $\forall r$, il n'y a plus d'intégrale du mouvement. De plus pour $r > r_{ho}(\sigma, b)$ un comportement chaotique (asymptotique ou transitoire) est possible. Que peut on faire pour continuer de donner de l'information sur le système ? Comment utiliser maintenant les résultats analytiques existant auparavant ?

On tient le raisonnement suivant : si le système accepte la surface I_3 comme intégrale première lorsque $b = 2\,\sigma$ alors les surfaces :

$$I_4 = a_1\, x^2 + a_2\, z + a_3 \tag{4}$$

doivent avoir des propriétés caractéristiques même lorsque $b \neq 2\,\sigma$.

Il est clair que ces nouvelles surfaces I_4 ne seront pas des intégrales du mouvement, c'est à dire que $\dot{I}_4$ ne sera pas identiquement nulle. Mais après calcul, on s'apreçoit que sous certaines conditions, l'inégalité :

$$\dot{I}_4 < 0 \quad \forall (x, y, z) / I_4 = 0 \tag{5}$$

est vérifiée (si on renverse les conditions on trouve $\dot{I}_4 > 0$). Dans ce cas on a une relation moins forte qu'auparavent : on a une fonction $I(x, y, z)$ telle que $\dot{I}$ est de signe constant et non plus identiquement nulle. On a donc encore moins d'informations que précedement *mais* sur une *bien plus grande* partie de l'espace des paramètres : $b \neq 2\sigma$, $\forall r$: deux demi-espaces entiers qui d'ailleurs contiennent des valeurs des paramètres pour lesquels le système (1) est chaotique !

• **Interprétation géométrique**

Quelles sont les implications sur le portrait de phases de l'inégalité $\dot{I}_4 > 0$? Si on remarque que $\dot{I}_4 = \nabla I_4 \cdot Flot$, alors on comprend que les surfaces I_4 qui vérifient $\dot{I}_4 > 0$ sont telles que les trajectoires traversent ces surfaces toujours dans le sens de leur normale. Autrement dit, ces surfaces ne laisssent passer les trajectoires que dans un seul sens, elles sont semi-perméables. Pour le système (1), les surfaces $I_4 = x^2 - 2\sigma\, z + a_3 = 0$ sont semi-perméables lorsque $(b - 2\sigma)$ et du même signe que a_3. La géométrie de ces surfaces semi-perméables nous permet de donner des bornes

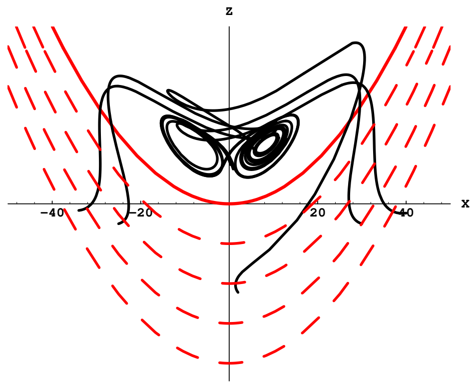


Figure 1: La famille de surfaces $x^2 - 2\sigma z + a_3 = 0$ avec $a_3 < 0$ dans le cas où $b = (\frac{8}{3}) < 2\sigma(= 20)$. toutes les paraboloïdes sont semi-perméables. Elles sont traversées par les trajectoires vers le haut. L'attracteur chaotique est confiné dans la zone de l'espace des phases où il n'y a pas de surfaces semi-perméables.

algébriques à l'étendue de l'attracteur chaotique (voir fig.(1)). En utilisant les autres intégrales du mouvement du système de Lorenz, on peut borner plus présicement l'attracteur chaotique. Dans d'autres cas, les surfaces semi-perméables empêchent l'existence de l'attracteur chaotique. Ces résultats sur l'attracteur de Lorenz ont été exposés dans [5].

3 Système de Rabinovich

Ce système a été introduit par le physicien russe M. I. Rabinovich [7] comme modèle de l'interaction de trois ondes résonnantes dans un plasma. Deux de ces ondes sont amplifiées et la troisième est là pour dissiper l'énergie et stabiliser le système (linear damping). Il s'avère que lorsque l'excitation paramétrique est trop forte le comportement chaotique prévault.

$$\dot{x} = h\, y - \nu_1\, x - y\, z\,, \quad \dot{y} = h\, x - \nu_2\, y + x\, y\,, \quad \dot{z} = -\nu_3\, z + x\, y \tag{6}$$

Points d'équilibre :

L'origine $O(0,0,0)$ est stable pour des valeurs de $h^2 < h_F^2 = \nu_1\,\nu_2$. En $h^2 = \nu_1\,\nu_2$, les points $M \pm \left(\sqrt{\frac{\nu_3}{\nu_1}\, z_0\,(h - z_0)}, \sqrt{\nu_1\,\nu_3\,\frac{z_0}{h - z_0}}, z_0 = \sqrt{h^2 - \nu_1\,\nu_2}\right)$ naissent dans une bifurcation fourche. Si on augmente h, ces points $M\pm$ perdent leur stabilité dans une bifurcation de Hopf, laissant place à l'attracteur chaotique. Une condition nécessaire pour la bifurcation de Hopf est : $\nu_1 > \nu_2 + \nu_3$ ou $\nu_2 > \nu_1 + \nu_3$. La divergence du champ de vecteurs vaut $-(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)$.

Intégrabilité : $I = (x^2 + y^2 - 4\,h\,z)\,e^{2\nu\,t}$ pour $\nu = \nu_1 = \nu_2 = \frac{\nu_3}{2}$

Surfaces semi-perméables :

$$S = z - a\,(x^2 + y^2) - b \tag{7}$$

Les surfaces S sont des paraboloïdes de révolution.

$$\dot{S}|_{S=0} = a\,(2\,\nu_2 - \nu_3)\,y^2 + (1 - 4\,a\,h)\,x\,y + a\,(2\nu_1 - \nu_3)\,x^2 - b\,\nu_3$$

$\dot{S}|_{S=0}$ est un polynôme de degré 2 en y, il a un signe constant ssi :

$$\Delta_y(\dot{S}) = a\,b\,(2\nu_2 - \nu_3)\,\nu_3 + x^2\,P(h, \nu_i, a) < 0 \tag{8}$$

$$P(h, \nu_i, a) = 1 - 8\,h\,a + 4a^2(4h^2 + (2\nu_2 - \nu_3)(\nu_3 - \nu_1)) \tag{9}$$

Or $P(a = 0) = 1 > 0$. $P(h, \nu_i, a)$ sera donc négatif pour des valeurs de a situées de part et d'autre de ses racines : pour $a \in I_a$. Pour qu'il y ait des racines, il faut et suffit que :

$$\Delta_a(P) = 16\,(2\nu_2 - \nu_3)(\nu_3 - \nu_1) > 0 \tag{10}$$

Cas de semiperméabilité :

- $2\nu_2 - \nu_3 > 0$: $(\Delta_y(\dot{S}) < 0 \Rightarrow a\,b < 0)$ et $(\Delta_a(P) > 0 \Rightarrow 2\nu_1 - \nu_3 > 0)$

  (A) $h^2 > h_0^2 = \frac{\Delta_a}{64}$, $a \in I_a > 0$, $b < 0$
  L'attracteur chaotique est entouré (par le bas) par des surfaces semi-perméables (voir fig. (2)). Exemple : $\nu_3 = 1, \nu_2 = 4, \nu_1 = 1 \rightarrow \Delta_a = 112, h_0 = 1.32, h_F = 2$, $h = 6$, $a = 0.05 \in I_a = [0.034; 0.053]$

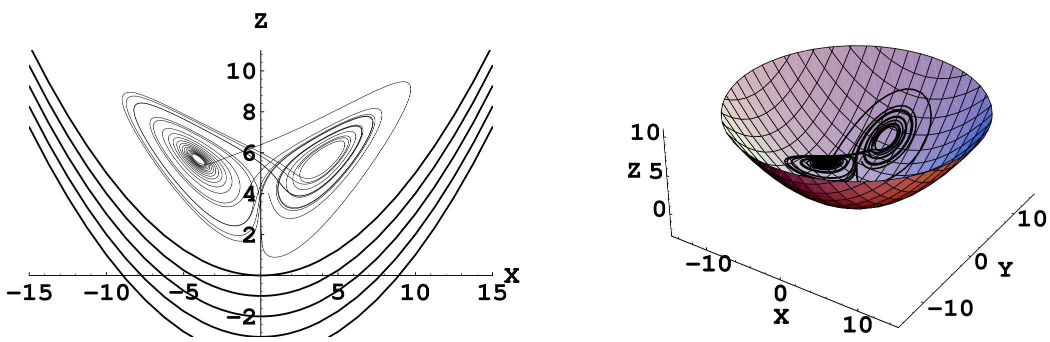


Figure 2: Attracteur de Rabinovich entouré (par le bas) par des surfaces (7), semi-perméables dans le cas (A).

  (B) $h^2 < h_0^2 = \frac{\Delta_a}{64}, a \in I_a$: $(a > 0, b < 0)$ ou $(a < 0, b > 0)$
  Les surfaces semi-perméables montrent que l'origine est asymptotiquement stable.

- $2\nu_2 - \nu_3 < 0$: $(\Delta_y(\dot{S}) < 0 \Rightarrow a\,b > 0)$ et $(\Delta_a(P) > 0 \Rightarrow 2\nu_1 - \nu_3 < 0)$

  (C) $h^2 > h_0^2 = \frac{\Delta_a}{64}$, $a \in I_a > 0, b > 0$
  Des surfaces semi-perméables sont présentes à l'emplacement 'normal' de l'attracteur chaotique : pas de chaos possible. Exemple : $\nu_3 = 11, \nu_2 = 4, \nu_1 = 1 \rightarrow \Delta_a = 432, h_0 = 2.5, h_F = 2$, $h = 3$ $a = 0.05 \in I_a = [0.044; 0.622]$

  (D) $h^2 < h_0^2 = \frac{\Delta_a}{64}$, $a \in I_a, (a > 0, b < 0)$ ou $(a < 0, b > 0)$
  Même chose que le cas (C) : pas de comportement chaotique possible

4 Burke-Shaw

Ce système a été introduit par R. Shaw dans le cadre de l'étude de l'attracteur de Lorenz [8]. Pour une étude topologique de l'attracteur ainsi que de sa population d'orbites périodique voir [9].

$$\dot{x} = -S\,(x+y)\;, \quad \dot{y} = -y - S\,x\,z\;, \quad \dot{z} = V + S\,x\,y \tag{11}$$

Points d'équilibre :
Lorsque $(V \cdot S) > 0$, le système a deux points d'équilibre symétriques $M_{\pm}(\pm\sqrt{\frac{V}{S}}, \mp\sqrt{\frac{V}{S}}, \frac{1}{S})$. Ces points apparaissent dans une bifurcation nœud-col en $V = 0$ et bifurquent avec l'infini en $S = 0$. La divergence du champ de vecteur vaut $-(S+1)$.

Intégrabilité :
Ne connaissant pas d'intégrale première au système (11), on détermine pour quelles valeurs des paramètres ce système passe le test de Painlevé. On trouve $S = \frac{1}{3}$ et $V = 0$. Pour ces valeurs le système admet $I(x,y,z,t) = (x^4 + 8\,x\,y - 4\,y^2 + 4\,x^2\,z)\,e^{\frac{4}{3}t}$ comme intégrale première.

Surfaces semi-perméables :

$$V = d - \frac{x^4}{4} + a\,x\,y + y^2 - x^2\,z \tag{12}$$

$\dot{V}_{|V=0}$ est un polynôme de degré 2 en y. Il sera de signe constant si $\Delta_y(\dot{V}) = (\ldots)\,x^4 + (\ldots)\,x^2 + (\ldots) < 0$. Ce polynôme bi-carré de degré 4 sera négatif $\forall x$ ssi : ou bien son discriminant est négatif et son coefficient constant est négatif, ou bien chacun des coefficients est négatif.

Cas de semiperméabilité (cas où S et V sont positifs) :

condition nécessaire : $(S(1-a)-1)\,S\,(a+2) > 0$

- $S(1-a) - 1 > 0$ et $a + 2 > 0$
  L'attracteur chaotique est entouré (par le bas) par les surfaces semi-perméables.

ou bien (E) $d > f(a) > 0$

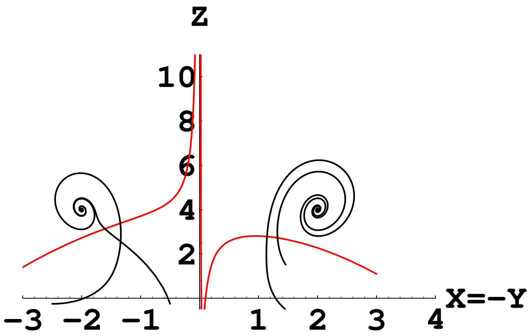
ou bien (F) $\forall d > 0$ et $8V + a^2\,(S(1-a)-1) < 0$

exemple : $d = 1$, $a = -1$, $V = 1$, $S = 2$

- (G) $S(1-a) - 1 < 0$ et $a + 2 < 0$ et $8V + a^2\,(S(1-a)-1) < 0$
  Pour $d = 0$, les surfaces semi-perméables sont situées à l'emplacement de l'attracteur chaotique quand il existe. Il n'y a donc pas de chaos. De plus ces surfaces divisent l'espace des phases en deux zones déconnectées, chacune de ces deux zones étant une partie du bassin d'attraction de chacun des points d'équilibre (voir fig. (3)).
  exemple : $d = 0$, $a = -\frac{5}{2}$, $V = 1$, $S = \frac{1}{4}$

5 Conclusion et perspectives

On a montré que l'on peut se servir de la structure analytique de certains systèmes dynamiques dissipatifs pour caractériser leur attracteurs chaotiques. La question importante est l'applicabilité



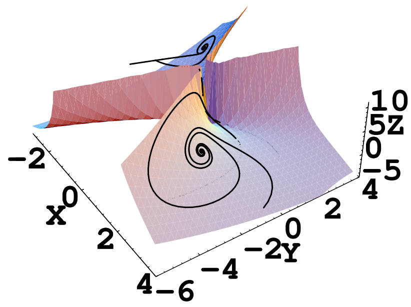


Figure 3: Points d'équilibre du système (11) séparés par les surfaces (12), semi-perméables dans le cas (G). Dans ce cas il n'y a pas de comportement chaotique possible.

de la méthode à d'autres systèmes et d'autres classes de systèmes. Par essence, la méthode semble réservée aux systèmes dissipatifs. Les systèmes étudiés ici étaient des systèmes à divergence négative constante et avaient donc un terme en $e^{\alpha t}$ dans leurs intégrales du mouvement. Il serait intéressant de savoir si il peut y avoir des surfaces semi-perméables qui ne dérivent d'aucune intégrale du mouvement ou, de façon équivalente, si on peut trouver des surfaces semi-perméables pour des systèmes sans intégrale du mouvement. Néanmoins, il est probable que l'on puisse étudier des systèmes à divergence constante de plus grande dimension, le problème étant toujours de trouver les intégrales du mouvement sur lesquelles on va s'appuyer. Par contre, il n'est pas certain que la méthode soit applicable à des systèmes dissipatifs ayant une divergence non-constante (système de Rössler par exemple).

References

[1] A. Goriely, J. Math. Phys. **37** (4) (1996) 1871-1893.

[2] M. Tabor, Nature **310** (1984) 277-282

[3] E. Lorenz, J. Atmosph. Sci. **20** (1963) 130.

[4] T. C. Bountis, A. Ramani, B. Grammaticos and B. Dorizzi, Physica A **128** (1984) 268-288.

[5] H. Giacomini, S. Neukirch, Physics Letters A **227** (1997) 309-318

[6] G. Levine and M. Tabor, Physica D **33** (1988) 189-210.

[7] A.S. Pikovskii, M.I. Rabinovitch,V.Y. Trakhtengerts, Sov. Phys. JETP **47** #4 (1978) 715-719 (American Institute of Physics)

[8] R. Shaw, Z. Naturf a **36** (1981) 80-112.

[9] C. Letellier, P. Dutertre, J. Reizner and G. Gouesbet, J. Phys. A : Math. Gen. **29** (1996) 5359-5373.