Dynamique et fragmentation de tiges fragiles : pourquoi les spaghetti cassent en trois morceaux ?

Basile Audoly et Sébastien Neukirch
Laboratoire de Modélisation en Mécanique,
CNRS/Université Pierre et Marie Curie,
4 place Jussieu, Paris, France
sebastien.neukirch@lmm.jussieu.aeffacer.fr

Résumé

Lorsqu'on brise en flexion des tiges cassantes, telles que les spaghetti crus, on obtient plus de deux morceaux, souvent trois, quatre ou plus. Dans le but d'expliquer ces brisures multiples, nous étudions la dynamique d'une tige fléchie juste en-deçà de sa courbure de rupture puis soudainement libérée à une extrémité. Nous trouvons que la détente brusque de la courbure induit un train d'onde de flexion dont la dynamique est décrite par une solution auto-semblable sans paramètre ajustable. Ces ondes de flexion *augmentent* localement la courbure et nous montrons que ce mécanisme contre-intuitif est à l'origine de la fragmentation des tiges cassantes en flexion. Nous présentons une expérience simple qui confirme cette assertion.

Abstract

When thin brittle rods such as dry spaghetti pasta are bent beyond their limit curvature, they often break into more than two pieces, typically three or four. With the aim to understand these multiple breakings, we study the dynamics of a rod bent just below its limit curvature and suddenly released at one end. We find that the sudden relaxation of the curvature at the newly freed end leads to a burst of flexural waves, whose dynamics are described by a self-similar solution with no adjustable parameters. These flexural waves locally increase *the curvature in the rod and we argue that this counter-intuitive mechanism is responsible for the fragmentation of brittle rods under bending. A simple experiment supporting the claim is presented.*

1 Introduction

La fragmentation concerne de nombreux domaines scientifiques et techniques. Plusieurs phénomènes physiques sont à l'œuvre, ce qui explique sans doute pourquoi la fragmentation a surtout été étudiée du point de vue statistique [1, 2, 3, 4, 5]. Des études récentes sont néanmoins fondées sur des considérations mécaniques ou physiques : contribution de l'énergie de surface [6], propriété de croissance et nucléation en théorie de la rupture [7], flambage dynamique [8, 9] et propagation des ondes élastiques [10].

On considère une tige élastique tenue en ses deux extrémités et qui est progressivement courbée uniformément et de manière quasi-statique. Elle casse au temps $t = 0$ lorsque sa courbure κ_0 atteint sa valeur limite κ^*: une fissure dynamique se propage alors transversalement et sépare la tige en deux morceaux. La courbure avant rupture étant uniforme, la position du premier point de rupture est sélectionnée par les défauts. Nous ne discuterons pas plus en détail cette rupture initiale afin de nous concentrer sur l'évolution ($t > 0$) dynamique de chacun des deux fragments ainsi créés : nous montrons qu'elle conduit à des nouvelles ruptures à des temps ultérieurs.

Comme on ne s'intéresse pas à la première rupture, on introduit un modèle simplifié de *catapulte*, que l'on étudie dans toute la suite : la libération d'une tige fléchie sert à simuler la première rupture. On se débarrasse ainsi de l'incertitude sur la position de cette première rupture, la longueur L de la catapulte étant connue par avance. Les deux problèmes (l'évolution de chacun des deux fragments juste après la première rupture d'une tige en flexion d'une part et la libération soudaine d'une tige à une extrémité d'autre part) obéissent aux mêmes équations. Dans l'expérience de catapulte, la tige est initialement courbée et au repos. On obtient cet état initial en encastrant une extrémité et en appliquant sur l'autre extrémité un moment fléchissant M_0, que l'on fait disparaître au temps initial $t = 0$ en libérant soudainement ce côté de la tige. La tige n'est alors plus en équilibre et on étudie son évolution dynamique.

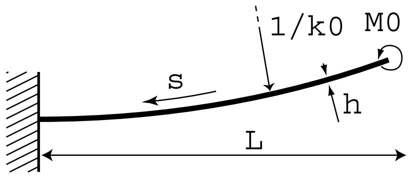

FIG. 1 – *L'évolution dynamique d'un fragment qui suit la rupture initiale d'une tige fragile est modélisée par la libération au temps $t = 0$ d'une tige de longueur L fixée, de courbure initiale κ_0 ne possédant pas de vitesse initiale.*

2 Modèle

La dynamique des tiges est décrite par les équations de Kirchhoff [11] qui dans la limite des faibles fléchissements planes s'écrivent:

$$L^4\,\kappa_{,s^4}(s,t) + T^2\,\kappa_{,t^2}(s,t) = 0, \qquad (1)$$

où les virgules en indices dénotent les dérivées partielles. Nous avons introduit un temps caractéristique T construit à partir des propriétés mécaniques de la tige : $T = L^2/\gamma$ où $\gamma = \sqrt{EI/(\rho A)}$, avec E le module d'Young, ρ la masse volumique, A l'aire et I le moment principal d'inertie de la section. Pour une tige de section circulaire de rayon r, $I = \pi r^4/4$ et $\gamma = c\,r/2$, où $c = \sqrt{E/\rho}$ désigne la vitesse du son dans le matériau. Notons que T est directement proportionnel à la période du fondamental pour les petites oscillations libres de la tige, $T_{\text{free}} = 1.79\,T$.

Dans l'équation (1), on cherche à déterminer l'inconnue $\kappa(s,t)$, fonction de l'abscisse curviligne s et du temps t. On utilise les équations linéarisées pour les petites oscillations dans le seul but de simplifier l'exposé : nous avons effectué des calculs numériques fondés sur les équations complètes non linéaires de Kirchhoff, et n'avons pas obtenu de différence essentielle avec ce que la théorie linéaire permet de prédire. Les conditions initiales pour l'équation (1) sont des conditions d'encastrement en $s = L$: $\kappa_{,s^2}(L,t) = 0$, $\kappa_{,s^3}(L,t) = 0$, et des conditions de bord libre en $s = 0$: $\kappa(0,t) = 0$, $\kappa_{,s}(0,t) = 0$. Avec les conditions initiales $\kappa(s,0) = \kappa_0$ and $\kappa_{,t}(s,0) = 0$ (courbure uniforme κ_0, pas de vitesse initiale), on s'attend en principe à une solution unique par intégration de l'équation aux dérivées partielle.

Il n'en n'est rien. Une analyse de ces conditions initiales et aux bords révèle la présence d'une incompatibilité : le problème est mathématiquement mal posé. Il se développe par conséquent une couche limite aux temps très courts $t \sim T_s \sim r/c$: au bord libéré, la courbure est initialement non nulle mais tend extrêmement rapidement vers zéro. Durant cette phase très rapide les équations de Kirchhoff ne s'appliquent pas, les sections ne restant pas planes. La conséquence [12] est que, pour décrire les temps grands devant ce temps très court de relaxation (régime dit intermédiaire), il faut chercher une solution auto-semblable aux équations de Kirchhoff. Le régime intermédiaire est caractérisé par :

$$T_s \ll t \ll T \; . \tag{2}$$

3 Solution

Au vue des exposants de L et de T dans l'équation (1), on cherche une solution auto-semblable sous la forme $\kappa(s,t) = \kappa_0 \, u(\xi)$ avec $\xi = (s/L)\,\sqrt{t/T}$. Les conditions aux bords pour la fonction $u(\xi)$ s'écrivent alors $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ et $u(+\infty) \to 1$. Si l'on injecte cette forme auto-semblable dans l'équation (1), on obtient l'équation différentielle ordinaire suivante pour $u(\xi)$:

$$4\,u''''(\xi) + \xi^2\,u''(\xi) + 3\,\xi\,u'(\xi) = 0 \tag{3}$$

Cette équation admet l'intégrale première suivante :

$$I = 4\,\xi\,u'''(\xi) - 4\,u''(\xi) + \xi^3\,u'(\xi) = \text{cte.} \tag{4}$$

La condition de bord $u(+\infty) \to 1$ impose $I = 0$. Transposée en $\xi = 0$, cette condition $I = 0$ implique $u''(0) = 0$. Cette troisième condition initiale sélectionne une unique solution (à une constante multiplicative près) de l'équation (3) :

$$\kappa(s,t) = 2\kappa_0\,S\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{s}{\sqrt{\gamma\,t}}\right), \tag{5}$$

où $S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}\,y^2)dy$ est l'intégrale sinus de Fresnel, utilisée en théorie de la diffraction. L'équation (5) ne décrit pas une solution progressive classique, $s \sim c\,t$, mais une solution auto-semblable $s \sim \sqrt{\gamma\,t}$. Ceci est relié aux propriétés dispersives de l'équation d'ondes (1).

Le comportement de toute tige libérée soudainement à un bord est décrit par la même solution auto-semblable (5) dans le régime intermédiaire (2), quelles que soient les propriétés du matériau, les détails de la libération initiale (qui doit néanmoins se produire sur un temps très court $T_s \ll T$), et même les conditions imposées sur le bord fixe. Cette solution universelle est tracée en bas de la figure 2, et comparée à une simulation numérique des équations non-linéaires de Kirchhoff. La solution numérique révèle bien, comme attendu, un régime auto-semblable pour $T_s \ll t \ll T$, pendant lequel un train d'onde de flexion parcourt la tige depuis le bord libéré $s = 0$ jusqu'au bord encastré $s = L$, la longueur parcourue croissant avec la racine carrée du temps. La solution auto-semblable (5) décrit fidèlement l'évolution dynamique de la tige jusqu'à ce que des réflections se produisent sur le bord encastré $s = L$, pour un temps $t \sim T$. Pour décrire ses réflexions, il faudrait alors combiner la solution auto-semblable (5) avec ses réflections obtenues par la méthode des images.

4 Discussion

Une propriété essentielle de la solution auto-semblable est qu'elle prédit localement un accroissement de courbure par rapport à la courbure initiale κ_0. L'étude du maximum

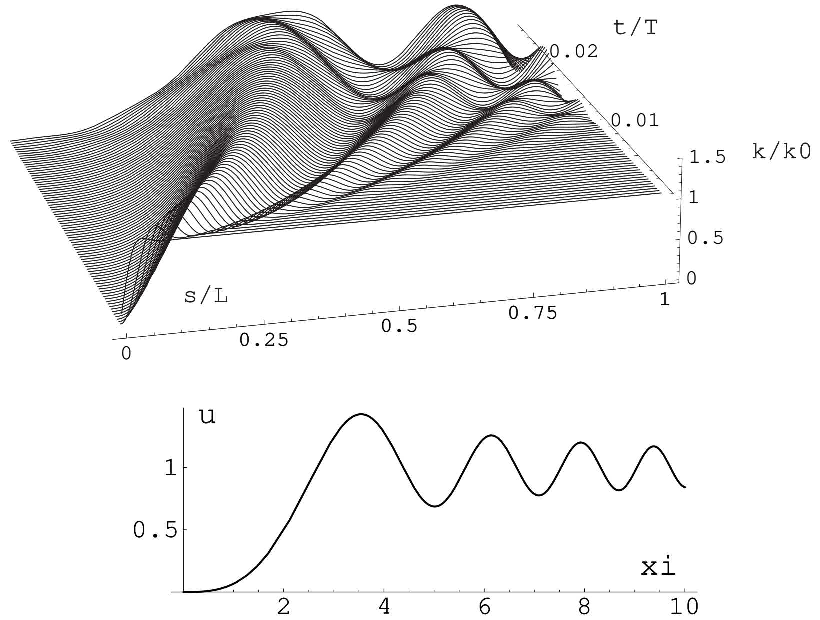

FIG. 2 – *En haut : simulation numérique des équations de Kirchhoff dynamiques pour une configuration initiale en demi-cercle* $\kappa_0 = \pi/L$. *La courbure au bord libéré* $\kappa(0,t)$ *relaxe vers zéro en quelques pas de temps puis est donnée dans le régime intermédiaire (2) par la solution auto-semblable (5). Aux temps ultérieurs, des réflections se produisent sur le bord encastré* $s = L$. *En bas: solution auto-semblable décrivant le régime intermédiaire* $\xi = s/\sqrt{\gamma t}$.

de l'intégrale sinus de Fresnel montre qu'un maximum de courbure se produit dans le régime intermédiaire pour $(s/L)/\sqrt{t/T} = 2\sqrt{\pi}$. La valeur de ce maximum de courbure rapportée à la courbure initiale est un nombre universel, $\kappa_m/\kappa_0 = 1.428$. Juste après la libération du bord libre, et jusqu'à ce que des réflexions se produisent, un train d'ondes de courbure traverse la tige de part en part, augmentant la courbure localement de 42.8%. Ce résultat est assez contre-intuitif car on s'attendrait en *libérant* le bord libre (i.e. en diminuant les contraintes) à voir les déformations diminuer de même. Il est vrai que sur le long terme, la tige va retourner à un état rectiligne (sans contrainte ni déformation), mais nous venons de voir grâce à la solution auto-semblable que sa dynamique très particulière aux temps courts exhibe une augmentation locale de la courbure.

Si l'on se souvient que la tige est initialement courbée avec une courbure κ_0 qui coïncide presque avec sa courbure limite de rupture κ^*, on voit que l'augmentation de courbure qui suit la libération d'un bord de la tige est incompatible avec le critère de stabilité à la rupture en flexion, $\kappa < \kappa^*$. On en déduit que si l'état initial est suffisamment chargé, la tige peut rompre uniquement parce qu'elle est relâchée. Autrement dit, une catapulte sans charge embarquée peut rompre uniquement parce qu'elle est déclenchée. Cette assertion plutôt surprenante peut être vérifiée par une expérience relativement simple. On courbe un spaghetti en arc de cercle jusqu'à une courbure proche de sa courbure limite. On le relâche brusquement à un bord. On observe alors souvent que le spaghetti rompt très rapidement, en un endroit plus ou moins éloigné du point de libération, parfois même au bord opposé. En filmant cette expérience à la caméra rapide, nous avons confirmé le rôle du train d'ondes de flexion décrit par l'équation (5). La figure 3 montre des clichés

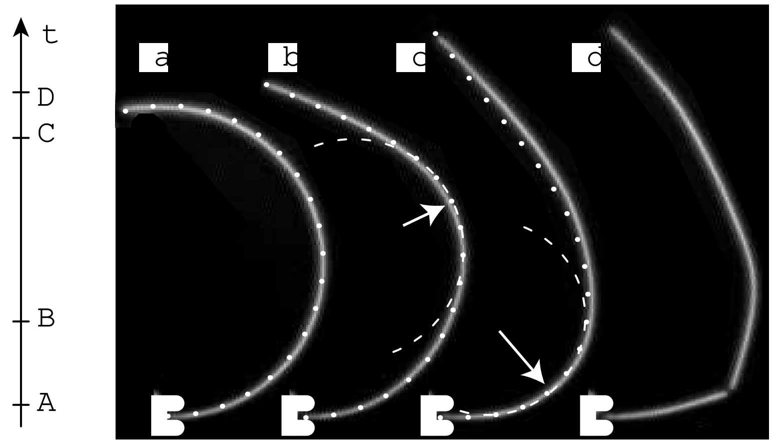

FIG. 3 – *Un spaghetti courbé peut casser lorsque on libère une de ses extrémités. La pâte est d'abord fléchie en arc de cercle jusqu'à une courbure légèrement inférieure à sa courbure de rupture. L'extrémité inférieure est encastrée. L'extrémité supérieure est libérée soudainement, au temps* $t_a = 0$*. On montre quelques images obtenues à la caméra rapide à 1000 Hz: (a) libération* $t_a = 0$*, (b) cliché intermédiaire* $t_b = 0.0159\,T$*, (c) cliché immédiatement antérieur à la rupture* $t_c = 0.0509\,T$*, et (d) immédiatement postérieur* $t_d = 0.0596\,T$*. Les simulations numériques fondées sur les équations dynamiques de Kirchhoff sont superposées, sans paramètre ajustable : profil de la tige (pointillés), et cercle osculateur (tirets) au point de courbure maximale (flèche). Noter que la rupture se produit bien au point de courbure maximale.*

expérimentaux superposés avec le calcul numérique sans paramètre ajustable. La rupture se produit exactement au point calculé de courbure maximale. En comparant le rayon de courbure initial sur cette figure, et les rayons de courbure beaucoup plus faibles atteints durant l'évolution dynamique de la tige, on voit qu'en effet, et contrairement à l'intuition, la courbure de la tige augmente bien localement.

5 Conclusion

Nous avons expliqué comment une tige fragile casse lorsqu'elle est libérée à la façon d'une catapulte. Dans l'expérience de la catapulte la tige est régie par les mêmes équations qu'une moitié de tige en flexion venant de subir sa première rupture. Cette rupture se traduit par la libération brusque de deux nouveaux fragments. Chacun de ces deux sous-fragments suit une évolution dynamique semblable à celle d'une catapulte, caractérisée par une augmentation locale de la courbure. Cette augmentation locale produit elle-même de nouveaux évènements de rupture puisque la courbure initiale, proche de la courbure de rupture, est largement dépassée. On voit ainsi apparaître un mécanisme de rupture en cascade pour les tiges fragiles en flexion.

Pour étudier les ruptures suivantes dans une tige en flexion, il faudrait étudier la dynamique des sous-fragments. La difficulté est qu'alors on ne part pas d'une solution de courbure constante, mais d'une condition initiale plus complexe quant à son profil de courbure. Les courbures ultérieures sont donc plus difficiles à étudier, mais pour une raison purement technique. Le mécanisme que nous avons mis en lumière reste néanmoins valable. Les seuls éléments susceptibles de limiter la taille finale des fragments sont liés à la dissipation de l'énergie (comportement plastique et/ou visco-élastique de la tige, dissipation de l'énergie durant la propagation d'une fissure transversale, etc.) ou à des phénomènes de retards à la rupture (la tige ne casse pas instantanément quand la courbure κ atteint sa valeur limite κ^*).

L'étude du système modèle de catapulte nous a permis de comprendre pourquoi les tiges ne cassent pas en général en deux morceaux. Il reste maintenant à comprendre ce qui limite en pratique la cascade de rupture vers les petites échelles, et ce qui fixe la statistique des fragments ainsi créés.

6 Remerciements

Les clichés des expériences de catapulte ont été pris avec la caméra rapide du laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes et avec l'aide précieuse et amicale de Luc Lebon et de Denis Vallet.

Références

[1] N. F. Mott and E. H. Linfoot. -. *Ministry of Supply Report No. AC3348*, January 1943. unpublished.

[2] D. E. Grady and M. E. Kipp. Geometric statistics and dynamic fragmentation. *Journal of Applied Physics*, 58(3):1210–1222, 1985.

[3] R. Englman. Fragments of matter from a maximum-entropy viewpoint. *J. Phys: Condens. Matter*, 3:1019–1053, 1991.

[4] Lene Oddershede, Peter Dimon, and Jakob Bohr. Self-organized criticality in fragmenting. *Physical Review Letters*, 71(19):3107–3110, 1993.

[5] Emily S. C. Ching, S. L. Lui, and Ke-Qing Xia. Energy dependence of impact fragmentation of long glass rods. *Physica A*, 287:89–90, 2000.

[6] L. Griffith. -. *Can. J. Res.*, 21:57, 1943.

[7] N. F. Mott. -. *Proc. Roy. Soc. London A*, 189:300, 1947.

[8] J. R. Gladden, N. Z. Handzy, A. Belmonte, and E. Villermaux. Dynamic buckling and fragmentation in brittle rods. preprint, 2004.

[9] F. Wittel, F. Kun, H. J. Herrmann, and B. H. Kröplin. Fragmentation of shells. *Physical Review Letters*, 93(3), 2004.

[10] D. A. Shockey, D. R. Curran, L. Seaman, J. T. Rosenberg, and C. F. Peterson. . *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 11:303, 1974.

[11] Bernard D. Coleman, Ellis H. Dill, Marzio Lembo, Zheng Lu, and Irwin Tobias. On the dynamics of rods in the theory of kirchhoff and clebsch. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 121:339–359, 1993.

[12] B. Audoly and S. Neukirch. Fragmentation of rods by cascading cracks: why spaghetti do not break in half. *Phys. Rev. Letters (submitted)*, 2005.