

Ségrégation par taille de grains dans les écoulements granulaires: temps caractéristiques, mobilité

L. Staron^{a,b}, J. C. Phillips^b

a. CNRS - Université Pierre et Marie Curie Paris 6, UMR 7190, Institut Le Rond d'Alembert, F-75252 Paris, France

b. School of Earth Sciences, University of Bristol, Queens Road, Bristol BR8 1RJ, UK

Résumé :

Alors que notre compréhension du comportement des écoulements granulaires mono-disperses a bénéficié d'importantes avancées durant ces dix dernières années, des systèmes présentant rigoureusement une seule taille de grain sont rarement rencontrés dans la nature ou dans l'industrie. Ainsi, les écoulements géophysiques impliquent une très large gamme de tailles de grains, causant de ce fait la formation de motifs de ségrégation, et par la même, la modification des propriétés des écoulements. La formulation explicite de critères de ségrégation, ainsi que la compréhension du contrôle que celle-ci exerce sur l'écoulement, demeurent problématiques en dépit de récents progrès. De plus, la description physique des forces de poussée et de trainée auxquelles sont soumis les grains reste un enjeu actuel. Dans cette contribution, nous appliquons la modélisation numérique discrète pour tenter d'apporter des éléments de réponse à ces questions. Nous étudions le comportement d'écoulements sur plan inclinés à deux dimensions, en nous intéressant spécifiquement aux échelles de temps caractéristiques de la ségrégation, et de son influence sur la vitesse de l'écoulement, en fonction de la fraction volumique des différents grains.

Abstract :

While our understanding of mono-disperse granular flows has recently benefited from significant progresses, granular systems exhibiting strictly a single grain size are rarely encountered in nature or industry. Geophysical flows for instance involve a large range of grains sizes, leading to the formation of segregation patterns and thereby modifications of the flow properties. The explicit formulation of segregation criteria, as well as the understanding of the control exerted by the latter on the flow, remain problematic in spite of recent advances. Moreover, the physical description of the lift and drag forces grains are submitted to is still a challenge. In this contribution, we apply discrete numerical simulation to bring insights in these questions. We study the behaviour of two-dimensional chute flows, focussing on the characteristic time scale of segregation, and its influence on the flow velocity, as a function of the composition of the granular packing.

Mots clefs : Ségrégation, simulations numériques

1 Introduction

La ségrégation par taille de grain dans les systèmes granulaires est un phénomène fréquent qui se produit dès que la distribution de tailles de grain est suffisamment large, et que le système est soumis à un cisaillement suffisamment rapide, ou suffisamment long [13]. Dans ce cas, les grains de plus grande taille migrent vers la surface tandis que les grains plus petits migrent vers le fond, créant ainsi un système spatialement hétérogène. L'apparition de la ségrégation concerne une large variété de contextes, de la vidange des silos aux procédés pharmaceutiques de mélange, du grano-classement des lits de rivières à celui des dépôts d'éruptions volcaniques [10, 3]. Une caractérisation précise du processus de ségrégation semble donc un objectif enviable. Cependant, et en dépit de la facilité avec

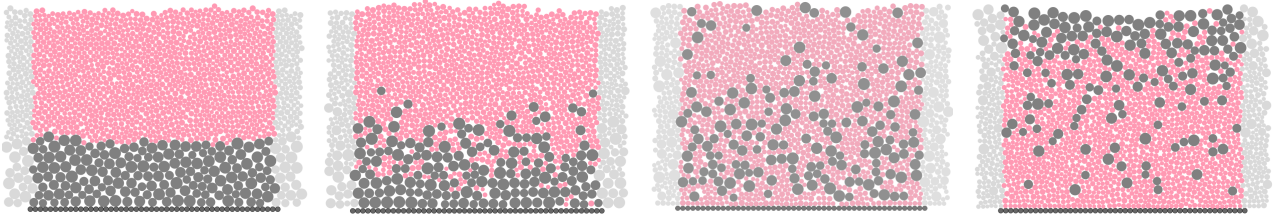


FIGURE 1 – Quatre instants d’un écoulement de pente $\theta = 18^\circ$ avec une fraction volumique de gros grains $\xi = 0.37$.

laquelle le phénomène peut être observé, une telle caractérisation reste en grande partie à établir. Les difficultés sont nombreuses, et parmi elles figurent celles déjà posées par les systèmes mono-disperses, notamment la difficulté d’accéder expérimentalement à des mesures dynamiques. Le cas d’un seul intrus dans une matrice de grains plus petits a été étudié avec succès, cependant, son application au phénomène collectif de ségrégation dans un écoulement est loin d’être claire [7]. Enfin, le phénomène de ségrégation est par essence transitoire. Il est initié par le cisaillement en présence de large grains dans l’écoulement et cesse quand ceux-ci en ont atteint la surface ; cependant, les fractions volumiques locales varient dans l’espace et le temps, affectant le cisaillement lui-même suivant toute probabilité. Relier la dynamique des grains à celle de l’écoulement n’est donc pas une tâche aisée.

Dans cette contribution, nous nous intéressons à la migration des grains à la surface de l’écoulement résultant de la ségrégation. A cette fin, des simulations numériques discrètes, utilisant la méthode de dynamique des contacts, sont réalisées et analysées systématiquement [5, 16]. Nous nous attachons à relier l’échelle de temps caractéristique du phénomène à la dynamique de l’écoulement, et proposons un modèle fondé sur des arguments dimensionnel qui permet de prédire le comportement ségrégoire des systèmes simulés. La façon dont les propriétés de l’écoulement sont affectées par la ségrégation est également étudiée.

2 Les écoulements numériques

Nous considérons des lits granulaires parfaitement bi-dimensionnels formés de grains de deux tailles distinctes, sur un plan incliné de pente θ et soumis à la gravité. L’algorithme de dynamique des contacts est appliqué [5] : les grains sont supposés infiniment rigides, et interagissent au contact par une loi de frottement solide telle que localement, les forces normale et tangentielle de contact satisfont $f_t \leq \mu f_n$, où μ est le coefficient de frottement au contact. De plus, un coefficient de restitution e fixe la quantité d’énergie dissipée lors des collisions entre grains. La valeur numérique de μ et e contrôle en partie les propriétés effectives de dissipation des écoulements. Dans la suite, leur valeur est fixée à $\mu = 0.5$ et $e = 0.25$. La Figure 1 montre différents instants d’une simulation typique. Les gros grains ont un diamètre moyen d_L et les grains plus petits un diamètre moyen d_S . Afin d’éviter un arrangement géométrique hexagonal très probable pour des grains strictement de même taille, la taille des grains petits et gros est choisie dans un intervalle de diamètres autour du diamètre moyen. Le rapport des diamètres moyen est fixe ; nous imposons $d_L/d_S = 2$.

Afin d’assurer des temps d’écoulements longs, des conditions aux limites périodiques sont implémentées ; la largeur de la cellule de simulation est de $25d_L$. Le plan incliné est fait d’un rang de grains fixes de taille d_S . Dans l’état initial, une couche de grains plus gros est recouverte d’une couche de grains plus petits par déposition aléatoire dans le champ de gravité. Nous notons ξ la fraction volumique de gros grains, ie le rapport du volume de gros grains sur le volume total de grains : $\xi = V_L/(V_S + V_L)$. De façon équivalente, $(1 - \xi)$ est la fraction volumique de petits grains. Dans les simulations présentées ici, ξ varie de 0.08 à 0.93. L’épaisseur des écoulements dans l’état initial est H . Indépendamment de ξ , H est choisi constante et égale à $\simeq 45d_S$ (lorsque l’écoulement se met en place, H peut varier légèrement en réponse au cisaillement et à la ségrégation). La pente du plan incliné θ est variée entre 17.5° et 22° .

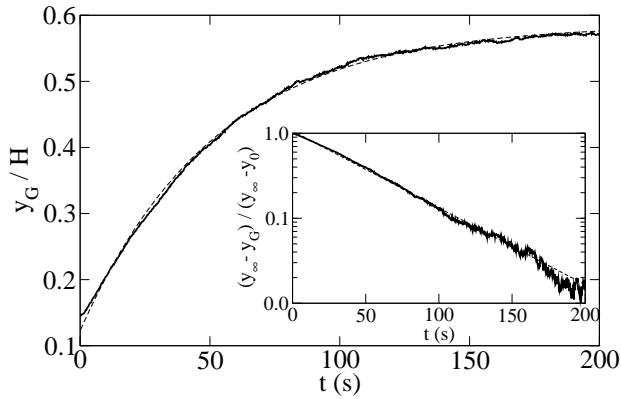


FIGURE 2 – Position du centre de masse des gros grains y_G en fonction du temps t pour l'écoulement illustré en Figure 1, et approximation par une exponentielle (pointillés). Insert : $(y_\infty - y_G)/(y_\infty - y_0)$ en représentation log-lin.

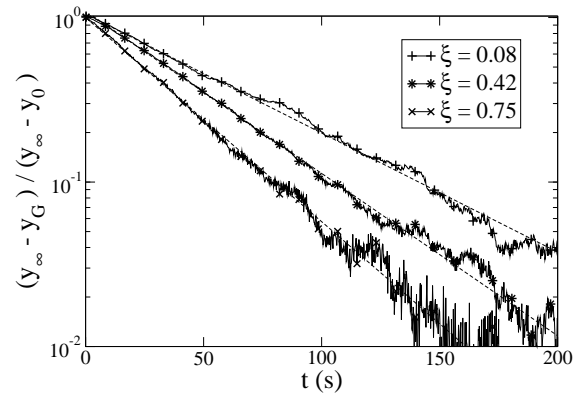


FIGURE 3 – Pour différentes valeur de ξ , $(y_\infty - y_G(t))/(y_\infty - y_0)$ en fonction du temps en représentation log-lin. La pente des différentes exponentielles (pointillés) indique un temps caractéristique τ décroissant pour ξ croissant.

3 Modèle pour le temps caractéristique de ségrégation

Pour toutes les simulations, la position verticale du centre de masse des gros grains y_G est étudiée en fonction du temps. La Figure 2 montre une évolution typique, correspondant à l'écoulement illustré en Figure 1 : nous observons la montée exponentielle des gros grains vers un état saturé correspondant au régime d'écoulement stationnaire. La nature exponentielle de cette évolution est un trait robuste : de façon générale, nous observons

$$y_G(t) = y_0 + (y_\infty - y_0) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right), \quad (1)$$

où y_0 et y_∞ sont respectivement les positions initiale et finale du centre de masse, et τ est l'échelle de temps caractéristique du processus de ségrégation. Variant la fraction volumique de gros grains ξ , nous traçons $(y_\infty - y_G(t))/(y_\infty - y_0)$ en fonction du temps, et observons que τ est une fonction décroissante de ξ (Figure 3).

Les mécanismes qui président au processus de ségrégation restent peu clairs. Cependant nous pouvons formuler des hypothèses simples pour décrire les forces auxquelles les grains les plus gros sont soumis. Supposant l'existence d'une force de poussée, cette dernière dépend du degré de mélange de la couche granulaire bi-disperse : elle sera maximum quand les grains les plus gros sont au fond, mais s'annulera quand ils auront migré à la surface. Le degré de mélange est le mieux décrit par la position du centre de masse des gros grains par rapport à l'état initial et final. Ainsi, une expression plausible pour la force de poussée est :

$$F_{\text{lift}} = C \frac{y_\infty - y_G}{y_\infty - y_0}, \quad (2)$$

où C est une fonction avec les dimensions suivantes : $[C] = \rho L^3 T^{-2}$ en deux dimensions. Nous possédons peu d'informations sur la forme de la force de poussée, en dehors de l'observation qu'elle est produite par le cisaillement. D'un point de vue purement dimensionnel, une dépendance possible est $C \propto \rho d_L^3 \|\dot{\gamma}\|^2$, où ρ est la densité de l'empilement et $\|\dot{\gamma}\|$ le module du taux de cisaillement. Notons qu'une telle expression ne peut avoir de sens que pour des *valeurs limitées* de $\|\dot{\gamma}\|$.

En raison de la poussée F_{lift} exercée sur les grains les plus gros, ceux-ci s'élèvent dans l'écoulement avec une vitesse moyenne donnée par la vitesse de leur centre de masse $\dot{y}_G(t)$. En réponse, ils subissent une force de traînée exercées par les grains plus petits. La vitesse verticale moyenne de l'écoulement étant nulle, et supposant une analogie avec les écoulements visqueux, la force de traînée peut s'exprimer

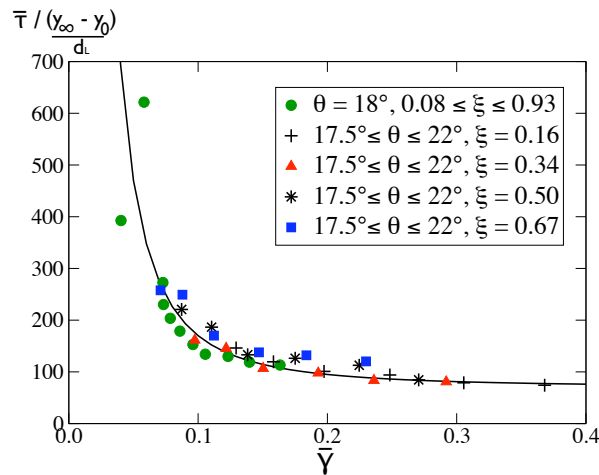


FIGURE 4 – Temps caractéristique du processus de ségrégation renormalisé $\bar{\tau} / \frac{y_\infty - y_0}{d_L}$ en fonction du taux de cisaillement renormalisé $\|\bar{\gamma}\|$ pour l'ensemble des simulations. La ligne en trait plein montre $(\|\bar{\gamma}\|^{-2} + 70)$.

ainsi :

$$F_{\text{drag}} = D \dot{y}_G, \quad (3)$$

où D est une fonction avec les dimensions suivantes $[D] = \rho L^2 \cdot T^{-1}$ en deux dimensions. Comme pour la poussée, nous ne connaissons pas *a priori* la forme de D . Cependant, différentes études expérimentales [1, 11] (quoique réalisées dans des conditions très différentes des conditions présentes d'écoulement), suggèrent que la force de trainée est proportionnelle au coefficient de frottement effectif de l'écoulement. Notant μ_e ce dernier, nous proposons pour D la forme suivante : $D \propto \mu_e \rho g^{1/2} d_L^{3/2}$.

Enfin, petits et gros grains ayant la même densité, et formant un arrangement de même compacité, aucun mouvement n'est induit par des gradients de densité. En supposant que l'accélération verticale subie par les grains les plus gros est négligeable, l'équilibre des forces s'écrit simplement :

$$F_{\text{lift}} - F_{\text{drag}} = 0, \quad (4)$$

$$C \frac{y_\infty - y_G}{y_\infty - y_0} - D \dot{y}_G = 0, \quad (5)$$

ce qui peut se réécrire sous la forme

$$\dot{y}_G + \frac{C}{D(y_\infty - y_0)} y_G - \frac{C y_\infty}{D(y_\infty - y_0)} = 0. \quad (6)$$

La solution de cette équation différentielle est donnée simplement par :

$$y_G(t) = y_0 + (y_\infty - y_0) \left(1 - \exp\left(-\frac{C}{D(y_\infty - y_0)} t\right) \right). \quad (7)$$

Nous retrouvons donc le comportement des écoulements numériques. De plus, le modèle prévoit que le temps caractéristique de ségrégation dépende à la fois des fonctions de trainée et de poussée D et C , ainsi que de la trajectoire du centre de masse des grains les plus gros $y_\infty - y_0$:

$$\tau = \frac{D(y_\infty - y_0)}{C}. \quad (8)$$

En nous fondant sur les arguments dimensionnels énoncés plus tôt pour expliciter la forme des fonctions C et D , le modèle implique pour le temps caractéristique τ la dépendance suivante :

$$\bar{\tau} \propto \mu_e \frac{y_\infty - y_0}{d_L} \|\bar{\gamma}\|^{-2}, \quad (9)$$

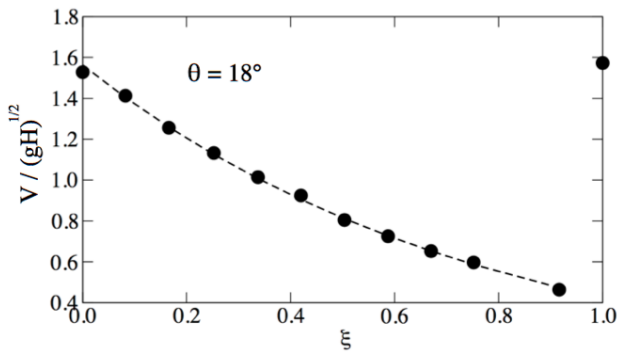


FIGURE 5 – Vitesse stationnaire moyenne V (renormalisée par \sqrt{gH}) pour un écoulement de pente 18° en fonction de la fraction volumique de grains les plus gros ξ .

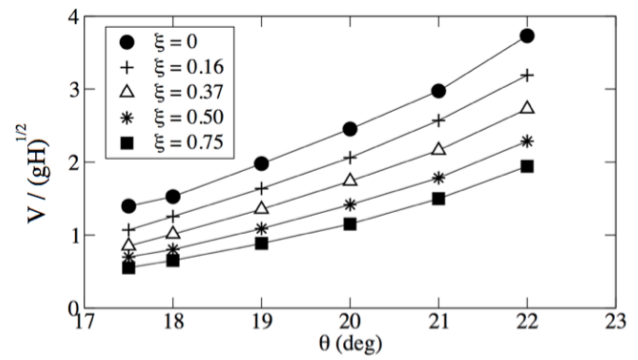


FIGURE 6 – Pour différentes valeurs de ξ , vitesse stationnaire moyenne V (renormalisée par \sqrt{gH}) en fonction de la pente θ .

où $\bar{\tau} = \tau / \sqrt{d_L/g}$ et $\|\bar{\dot{\gamma}}\| = \|\dot{\gamma}\| / \sqrt{g/d_L}$.

Afin de tester cette prédiction, nous calculons, pour chacun des écoulements simulés, le taux de cisaillement sur une durée de 3τ , c'est-à-dire telle que $(y_G - y_0)/(y_\infty - y_0) = 95\%$, τ étant évalué en approximant le comportement de y_G par une exponentielle (Figure 3) ; $\bar{\tau} / \frac{y_\infty - y_0}{d_L}$ est reporté en fonction du taux de cisaillement renormalisé $\|\bar{\dot{\gamma}}\|$ en Figure 4. Nous observons le comportement suivant :

$$\bar{\tau} \simeq \frac{y_\infty - y_0}{d_L} \left(\|\bar{\dot{\gamma}}\|^{-2} + 70 \right),$$

compatible avec le modèle, mais impliquant une valeur minimum pour τ indépendante de la dynamique de l'écoulement, et égale à $70\sqrt{d_L/g}$.

4 Contrôle sur la vitesse de l'écoulement

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les propriétés effectives de frottement des écoulements, décrites par le terme μ_e , sont identiques pour tous les écoulements. Cela n'est pourtant pas le cas, et si les variations de μ_e sont faibles par rapport aux autres quantités, elles sont néanmoins très clairement apparentes dans la dynamique de l'écoulement [12, 15]. La Figure 5 montre la vitesse stationnaire moyenne V (renormalisée par \sqrt{gH}) pour un écoulement de pente 18° et de composition différente ξ . On observe que plus ξ est grand, c'est-à-dire que plus le nombre de grains migrant vers la surface est important, plus l'écoulement est ralenti par rapport au cas mono-disperse ($\xi = 0$). Cette tendance est visible pour toutes les valeurs de pente étudiées, comme cela apparaît sur la Figure 6.

S'il est souvent supposé que la ségrégation par taille de grain dans les écoulements géophysiques est un facteur important d'accroissement de leur mobilité [10, 3, 8, 9], les résultats que nous obtenons ici nous poussent à conclure que pareil accroissement ne peut-être du qu'à des effets de structuration - par exemple, la formation de levées [6] - et à la tendance naturelle des écoulements à tendre vers des états mono-disperses en se débarrassant des grains les plus gros.

5 Conclusions

Dans cette contribution, nous avons présenté le résultat de simulations numériques discrètes reproduisant le phénomène de ségrégation par taille de grains observé dans les écoulements granulaires. Nous proposons un modèle simple introduisant des forces de poussée et de trainée qui nous permet de décrire la nature exponentielle de la ségrégation au cours du temps ; de plus, nous fondant sur des arguments dimensionnels, nous proposons une prédiction pour l'échelle de temps caractéristique de la ségrégation corroborée par les simulations numériques. Il est important de souligner que lors de cette analyse, nous n'avons à aucun moment considéré explicitement le rôle de la pression. La raison en est

que dans la configuration d'écoulement sur plan incliné étudiées ici, pression et taux de cisaillement ne peuvent pas être variés indépendamment ; nous observons au contraire que $\|\dot{\gamma}\|$ se comporte comme $(\sqrt{P/\rho})/d$, où d est le diamètre moyen. L'élaboration d'un modèle plus général nécessite donc une configuration telle que ces deux quantités soient indépendantes [2].

Nous montrons enfin que la nature bi-disperse des systèmes et la ségrégation qui en résulte ne sont pas favorables à l'écoulement, mais ont pour effet de les rendre plus dissipatifs.

Références

- [1] R. Albert, M. A. Pfeifer, A.-L. Barabási, and P. Schiffer 1999, Slow Drag in a Granular Medium, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 205-208
- [2] L. A. Golick and K. E. Daniels 2009, Mixing and segregation rates in sheared granular materials, *Phys. Rev. E*, **80** 042301
- [3] C. Goujon, B. Dalloz-Dubrujeaud, and N. Thomas 2007, Bidisperse granular avalanches on inclined planes : A rich variety of behaviors, *Euro. Phys. J. E*, **23**, 199-215
- [4] J. M. N. T. Gray and A. R. Thornton 2005, A theory for particle size segregation in shallow granular free-surface flows, *Proc. R. Soc. A*, **461**, 1447-1473
- [5] M. Jean and J.-J. Moreau 1992, Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collections. In A. Curnier ed., Proc. of Contact Mech. Int. Symp., pp. 31-48.
- [6] C. G. Johnson, B. P. Kokelaar, R. M. Iverson, M. Logan, R. G. LaHusen, and J. M. N. T. Gray 2012, Grain-size segregation and levee formation in geophysical mass flows, *J. Geophys. Res.*, **117**, F01032
- [7] A. Kudrolli 2004, Size separation in vibrated granular matter, *Rep. Prog. Phys.*, **67** 209-247
- [8] E. Linares-Guerrero, C. Goujon and R. Zenit 2007, Increased mobility of bidisperse granular avalanches, *J. Fluid Mech.*, **593**, 475-504.
- [9] F. Moro, T. Faug, H. Bellot, F. Ousset 2010, Large mobility of dry snow avalanches : Insights from small-scale laboratory tests on granular avalanches of bidisperse materials, *Cold Regions Science and Technology*, **62**, 55-66
- [10] Phillips, J. C. , Hogg, A. J. , Kerswell, R. R. and Thomas, N. H. 2006, Enhanced mobility of granular mixtures of fine and coarse particles, *Earth and Planetary Science Letters*, **246**, 466 - 480
- [11] K. A. Reddy, Y. Forterre, and O. Pouliquen 2011, Evidence of Mechanically Activated Processes in Slow Granular Flows, *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 108301
- [12] P. G. Rognon, J.-N. Roux, M. Naaim, F. Chevoir 2007, Dense flows of bidisperse assemblies of disks down an inclined plane, *Phys. of Fluids*, **19** 058101-1
- [13] S. B. Savage and C. K. K. Lun 1988, Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids, *J. Fluid Mech.*, **189**, 311-335
- [14] A. Tripathi and D. V. Khakhar 2011, Rheology of binary granular mixtures in the dense flow regime, *Phys. Fluids* **23**, 113302
- [15] B. Yohannes and K. M. Hill 2010, Rheology of dense granular mixtures : Particle-size distributions, boundary conditions, and collisional time scales, *Phys. Rev. E*, **82**, 061301
- [16] C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M. S. El Youssoufi 2009, Multiscale Force Networks in Highly Polydisperse Granular Media, *Phys. Rev. Lett.*, **102** 178001