

# **Disparition de la singularité de convection thermique mixte sur une plaque horizontale refroidie**

**Pierre-Yves LAGRÉE**

Laboratoire de Modélisation en Mécanique  
U.M.R. 7607  
Université PARIS VI, Boîte 162  
4, Place Jussieu, F-75252 Paris  
messe: pyl@ccr.jussieu.fr  
ouaibe: [www.lmm.jussieu.fr/~lagree/lagree.html](http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/lagree.html)

**Résumé** - La solution du problème de convection thermique mixte sur une plaque plane est présentée, la singularité qui apparaissait dans les résolutions précédentes est levée. En fait les équations ne sont pas paraboliques et doivent être résolues par une procédure globale. Suivant la condition de sortie une solution différente est calculée, certaines présentant une zone de recirculation, la structure mise en évidence est une sorte de ressaut hydrodynamique.

Quel rapport ?

🍏 entre la couche limite supersonique?

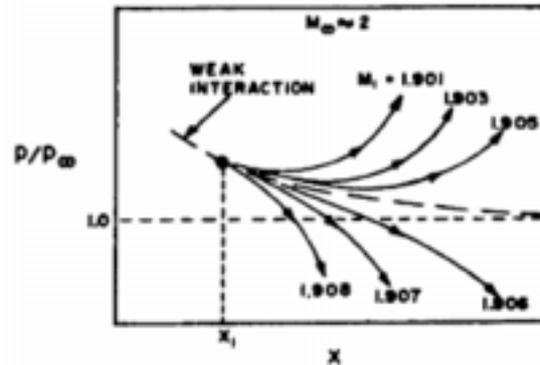


Fig. 1 Typical branching solution behavior.

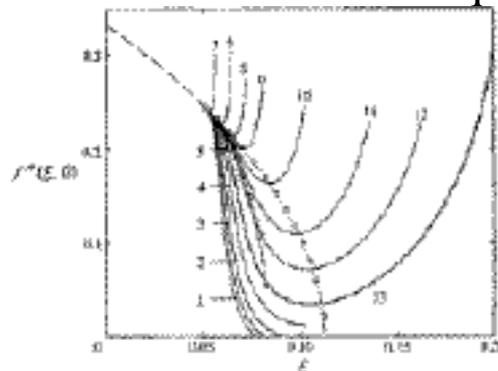
Pression sur une plaque plane en régime compressible. Branchements...  
Werle, Dwoyer & Hankey, AIAA J. 11 (4) (1973) 525-530.

🍏 entre un ressaut hydraulique créé dans un évier par le jet du robinet?



jet d'eau issu du robinet tombant sur une plaque plane, formation d'un bourrelet. (PYL)

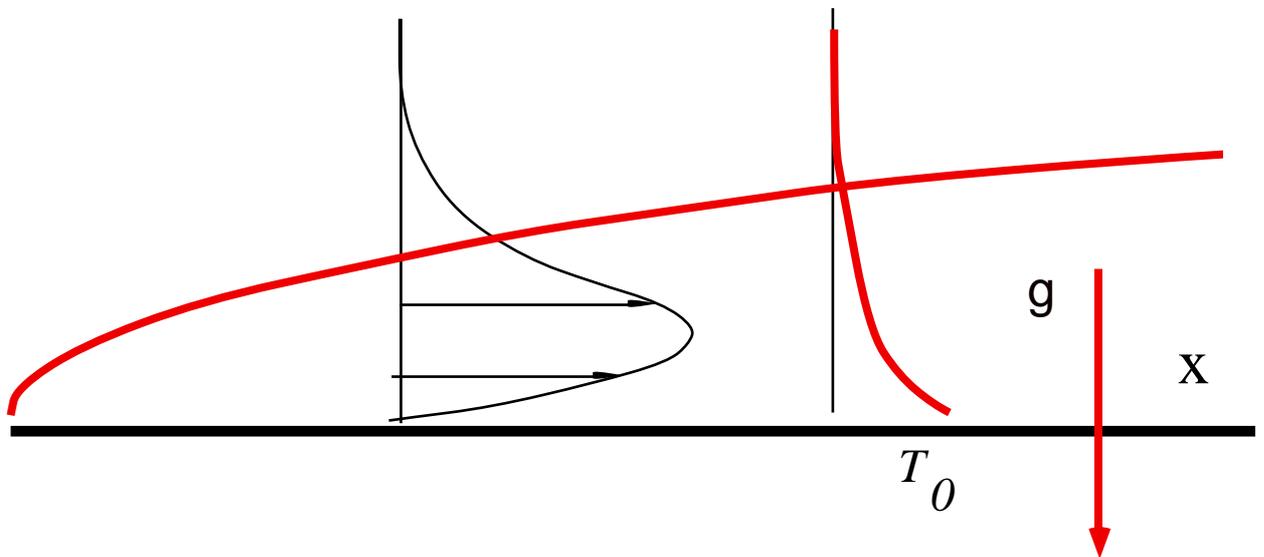
🍏 et la couche limite de convection thermique mixte?



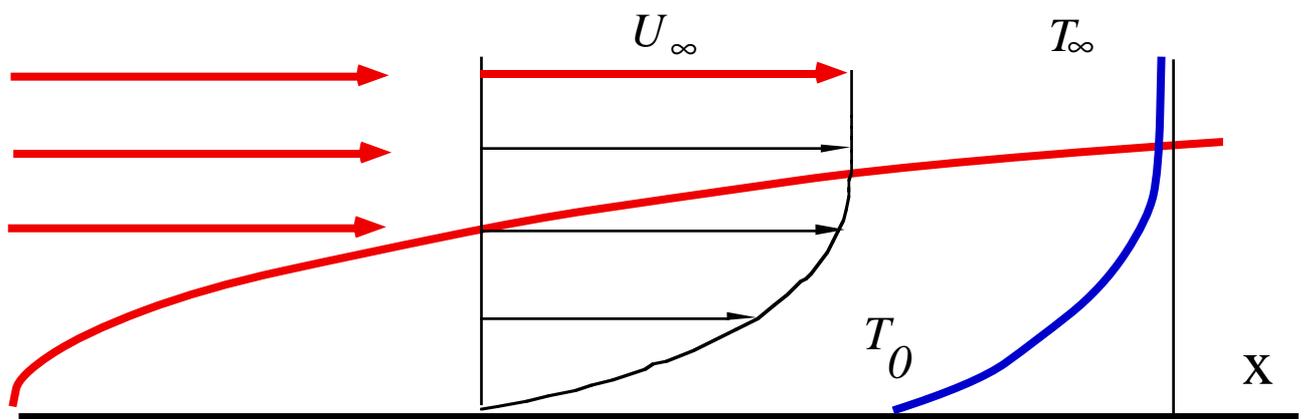
Frottement pariétal réduit Steinruck, J. Fluid Mech. 278 (1994) 251-265.

La triple couche et les solutions propres autoinduites en  $e^{kx}$  !!!

**convection naturelle**



**+ convection forcée**



**= convection mixte:**

Wilks 73, Schneider & Wasel 85, Daniels 92, Steinrück 94... ont montré que la solution explosait lorsque l'on résolvait en "**marchant en x**" les équations.

**convection mixte:**

équations de couche limite avec couplage thermique jaugé par:

$$J = \frac{g\alpha\Delta T_0}{U_\infty^2} \frac{L}{\sqrt{Re}} \text{ et } Re^{-1} \ll J \sim O(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y})u = +J \int_y^\infty \frac{\partial \theta}{\partial x} dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u;$$

$$(\frac{\partial p}{\partial y} = J\theta);$$

$$(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y})\theta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta;$$

en  $y=0$                        $u=v=0$                        $\theta = 1$

en  $y \rightarrow \infty$                        $u \rightarrow 1$                        $\theta \rightarrow 0$

en  $x \rightarrow 0$                        $u \rightarrow u_{Blasius}$                        $\theta \rightarrow 1 - u_{Blasius}$

Lorsque le nombre de Richardson  $J = \frac{g\alpha(T_0 - T_\infty)}{U_\infty^2} \frac{L}{\sqrt{Re}}$  est d'ordre unité

et négatif (paroi froide), il se produit une singularité dans les équations de couche limite

(cf. SCHNEIDER & WASEL 85, DANIELS 92, DANIELS & GARGARO 93...)

### Introduction d'un terme instationnaire.

nouveau problème

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right)u = +J \int_y^{\infty} \frac{\partial \theta}{\partial x} dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u;$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} = J\theta\right);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right)\theta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta;$$

t = 0	u = 1, v = 0	$\theta = 1$ pour tout x, y > 0
en y = 0	u = v = 0	$\theta = 1$ pour tout x, t > 0
en y → ∞	u → 1	$\theta \rightarrow 0$ pour tout x, t > 0
en x → 0	u → uBlasius	$\theta \rightarrow 1 - uBlasius$

si J=0

Transition entre le Problème de Rayleigh instationnaire x/t → ∞ et le Problème de Blasius x/t → 0

si J≠0

Condition supplémentaire ∂p/∂x=0 (compatible avec Rayleigh)

### Discretisation

- explicite en temps et en x, implicite en y
- différences finies décentrées aval pour les termes u∂u/∂x, u∂θ/∂x, et ∂p/∂x.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{3 f_i - 4 f_{i-1} + f_{i-2}}{2 \Delta x}$$

- sauf pour l'incompressibilité (centré):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2 \Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2 \Delta y}$$

- cas test T<sub>w</sub>=x<sup>1/2</sup>, et J=0

## Résultats:

influence de la taille du domaine sur  $(-J) \frac{\partial u}{\partial y} \sqrt{x}$ : ( $t \rightarrow \infty$ )

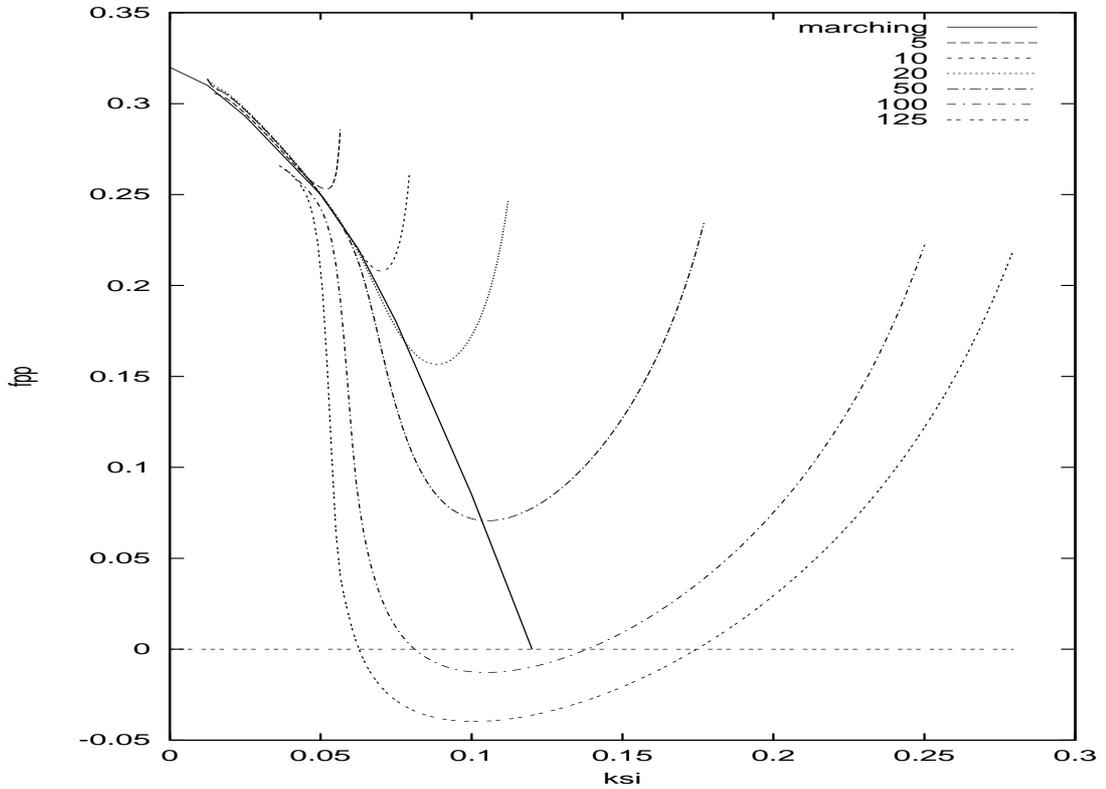


Figure: Résolution numérique par le schéma instationnaire avec résolution globale, solution stationnarisée. On voit la séparation de la couche limite, chaque courbe est associée à une longueur de domaine différente  $x_{out}$ .

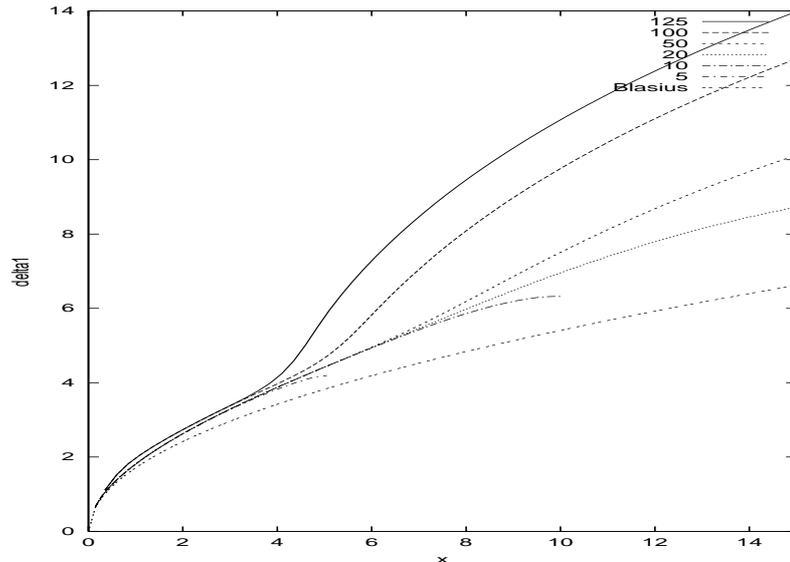


Figure: Résolution numérique par le schéma instationnaire avec résolution globale. Associé à la séparation de couche limite, l'épaississement de l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  suggère une analogie avec le ressaut hydrodynamique. Chaque courbe est associée à une longueur de domaine différente  $x_{out}$ .

## un modèle simple issu de SCHNEIDER & WASEL 85 .

- mécanisme simplifié:

la couche limite thermique s'épaissit, à y fixé  $\partial T/\partial x < 0$

donc  $\partial p/\partial x = \int \partial T/\partial x dy > 0$  gradient de pression adverse.

$p \sim -\int T dy \sim -(T_\infty - T_0)\delta_1$  pression proportionnelle à l'épaisseur de couche limite

La méthode intégrale donne:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \left[ u(1-u) - \int_y^\infty \theta dY \right] dy = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\delta_1 = \int_0^\infty (1-u) dy \quad \text{et} \quad f_2 = \delta_2 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

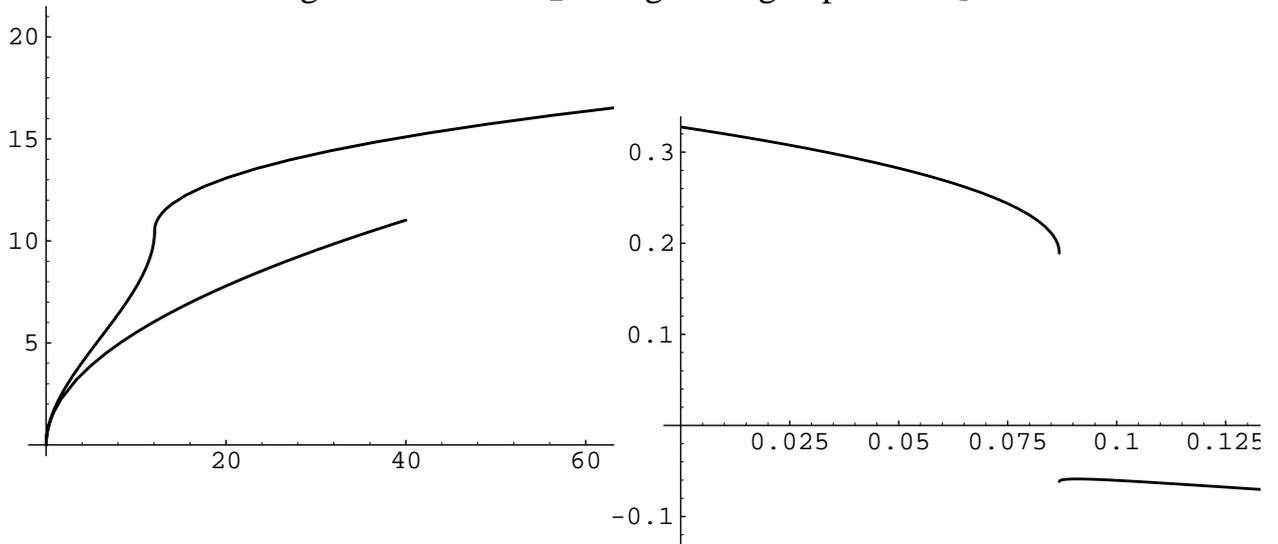
fermeture: profil en sinus!!

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\delta_1}{H} + J A \delta_1^2 \right) = \frac{f_2 H}{\delta_1}$$

$J=0 \Rightarrow$  Blasius

$J \neq 0$  S'intègre  $\Rightarrow$  singularité  $\frac{d}{dx} \delta_1 \rightarrow \infty$  en  $x=x_s$  fini

Pour contourner la singularité: astuce  $f_2$  change de signe pour  $x > x_s$



$\delta_1$  fonction de x

$(-J) \frac{\partial u}{\partial y} \sqrt{x}$  fonction de  $(-J)\sqrt{x}$ .

$\neq$  de nos calculs où on a imposé  $\partial p/\partial x = 0$  à la sortie.

## Une interprétation générale simple

### Équations de couche limite interactive: "Interacting Boundary Layer Theory" (IBL)

Les équations de couche limite se réduisent à

$$p \rightarrow \delta_1$$

Et le fluide parfait se réduit à

$$\delta_1 \rightarrow p$$

Les équations de couche limite se réduisent i.e.: von Kármán.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\delta_1}{H} \right) + \delta_1 \left( 1 + \frac{2}{H} \right) \left( -\frac{dp}{dx} \right) = \frac{f_2 H}{\delta_1} \Rightarrow \delta_{10} \left( 1 + \frac{2}{H} \right) \frac{dp}{dx} \sim \left( \frac{f_2 H}{\delta_{10}^2} \right) \delta_1 + \frac{1}{H} \frac{d\delta_1}{dx}$$

tout dépend de la réponse du fluide parfait aux modifications de l'épaisseur de déplacement.

- "fluide parfait" cas supersonique

$$p = \frac{\gamma M^2}{\sqrt{M^2-1}} \frac{d\delta_1}{dx} \text{ donc } p = e^{kx}$$

- "fluide parfait" cas hypersonique/ Ressaut  $p = \rho g h$  (h hauteur d'eau  $\leftrightarrow \delta_1$ )/...

$$p = -K \delta_1$$

$$0 \sim \left( \frac{f_2 H}{\delta_{10}^2} \right) \delta_1 + \left( \frac{1}{H} + K \delta_{10} \left( 1 + \frac{2}{H} \right) \right) \frac{d\delta_1}{dx}$$

$$K > 0 \quad p = e^{-kx} \qquad K < 0 \quad p = e^{+kx}$$

On lève le problème en autorisant le facteur de forme H à dépendre du gradient de pression...  $H(\delta_1^2 dp/dx)$

## Steinrück JFM 94

Décomposition en solution semblable

$$2f''' + ff'' = \xi(f'f''_{\xi} - f''f'_{\xi} + g)$$

$$2\theta'' + f\theta' = \dots$$

...

puis décomposition en série

$$f(\xi, \eta) = \sum \xi^n f(\eta) \dots$$

puis perturbation de la solution sous la forme  $F(\eta)e^{\lambda\xi}$  en  $\xi_0$  petit, il trouve:

$$\lambda = 2U_0'(0) (-3Ai'(0))^3 \xi_0^4$$

il trouve aussi d'autres valeurs propres plus grandes.

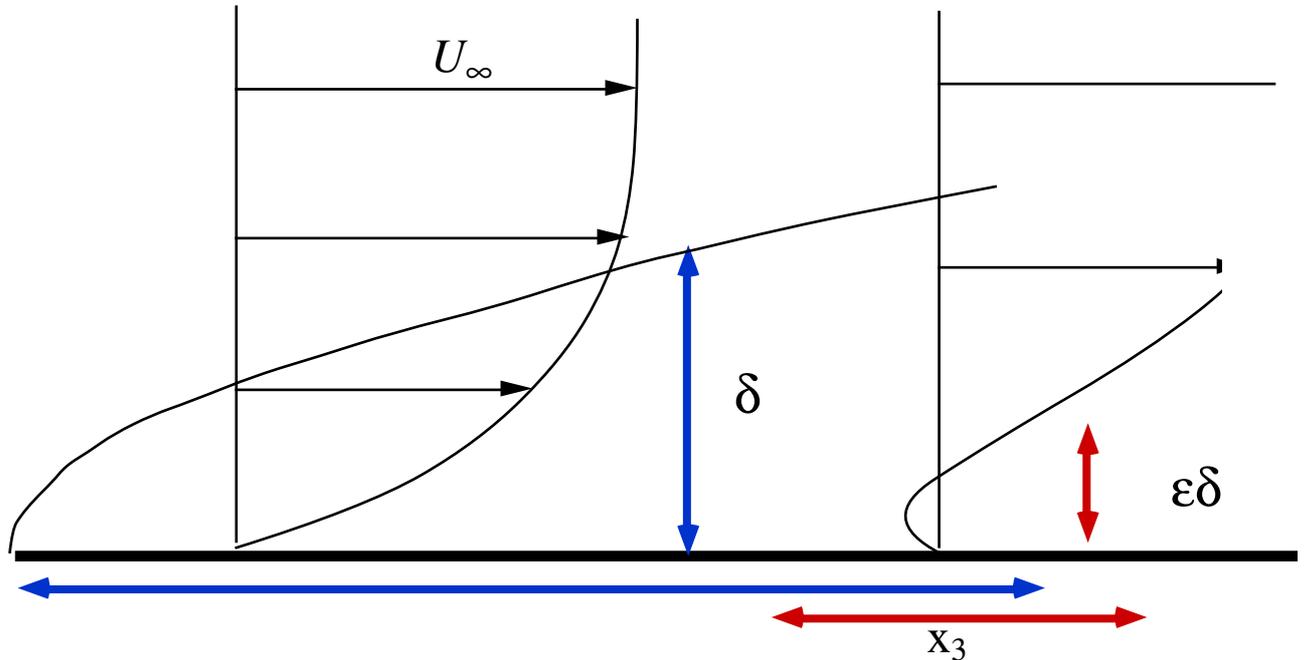
Il conclut que:

... les erreurs numériques **sélectionnent** des valeurs propres (**solutions de branchement**)... Le calcul se termine par une singularité numérique... Toutes les solutions calculées sont solutions des équations de couche limite, et on ne peut pas choisir la "bonne" solution physique".



## Écoulement de Base Main Deck: (Main Deck = Pont Principal)

On suppose que le nombre de Richardson est petit, on prend comme profil de base la couche limite de Blasius



échelle longitudinale  $x_3$

on suit Neiland 70, Brown Stewartson & Williams 75,  
Brown Cheng & Lee 90 ... , et on trouve

$$U = U_0(y) + \varepsilon A(x) U'_0(y); \quad v = -\frac{\varepsilon \delta}{x_3} A'(x) U_0(y); \quad T = \theta_0(y) + \varepsilon A(x) \theta'_0(y).$$

au travers du pont principal il y a donc une stratification de pression :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = J\theta \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon(\theta_0(y) + \varepsilon A(x) \theta'_0(y))$$

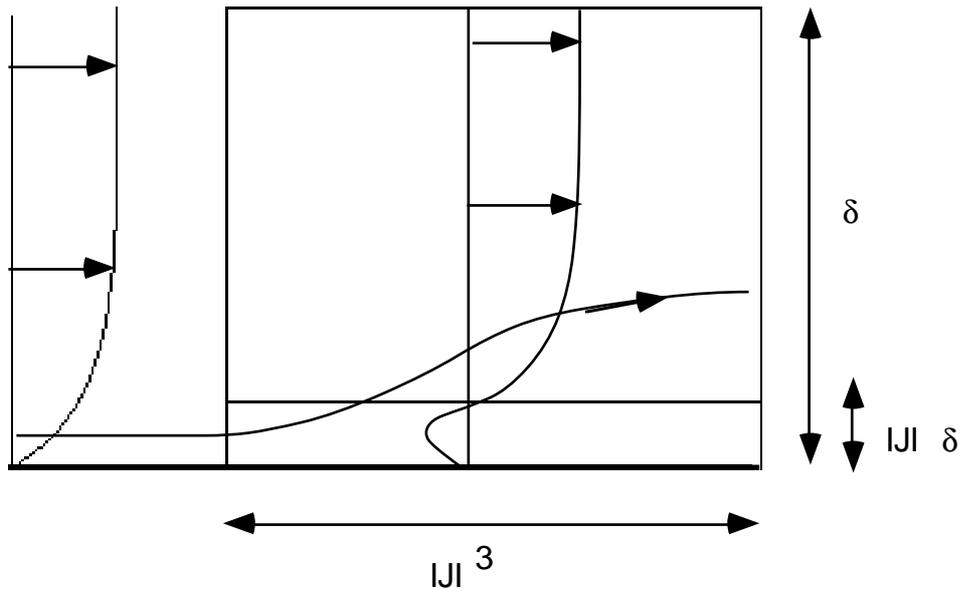
Le nombre de Richardson est le petit paramètre

$$J = \varepsilon.$$

le saut de pression:

$$p(x, y \rightarrow \infty) - p(x, y \rightarrow 0) = A(x)(\theta_0(\infty) - \theta_0(0)) = -A(x).$$

raccord upper deck/ lower deck



aux petites échelles considérées:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ;$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u=v=0 \text{ en } y=0$$

$$u \rightarrow y+A \text{ pour } y \rightarrow \infty.$$

et

$$p = \pm A$$

*idem* en hypersonique!!!

*idem* pour la naissance d'un ressaut hydrodynamique

**solutions en  $\exp(-3Ai'(0))^3 x$**

## Conclusion sur la convection mixte de plaque plane horizontale:

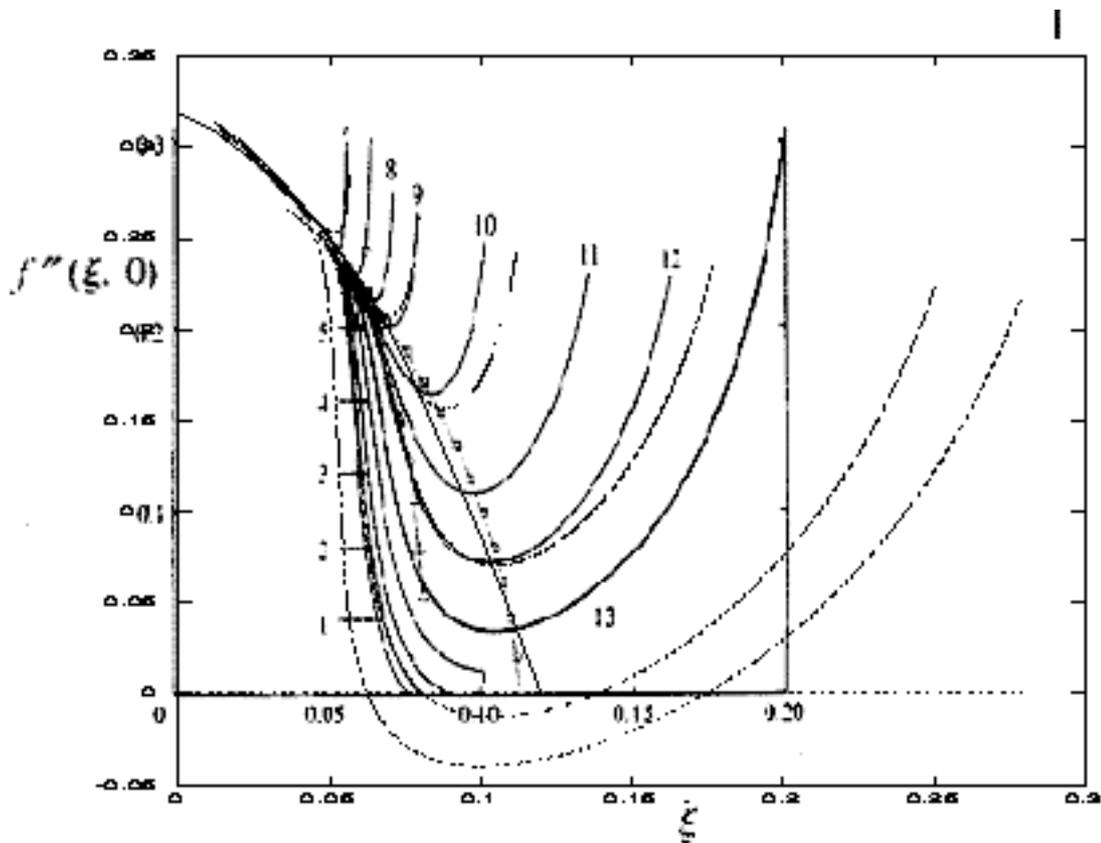
- paroi chaude:

numériquement on observe des oscillations: le couplage  $p=A$  est instable.

- paroi froide:

apparition de la solution de "branchement" en exponentielle croissante (retrouvé par Steinrück) associée au couplage  $p=-A$ . On observe un déplacement vers le haut des lignes de courant (le gaz froid "pousse vers le haut" le gaz chaud) et la séparation de la couche limite.

résolution numérique par l'introduction d'un terme instationnaire permettant la remontée de l'information par une discrétisation centrée de l'équation de l'incompressibilité...



frottement pariétal réduit en fonction de l'abscisse réduite, ré interprétation des résultats classiques. Pour résoudre, il faut savoir ce qui se passe à la sortie, il peut y avoir séparation de la couche limite. Ces deux phénomènes ne pouvaient être compris que par la triple couche.

L'écoulement développe une zone de recirculation, peut elle être infinie?  
Résolution NS complète?

## Références

- [1] K. Gersten, H. Hervig, *Strömungsmechanik: Grundlagen der Impuls-Wärme-und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*, Vieweg, Wiesbaden, 1992.
- [2] H. Schlichting, *Boundary layer theory*, 7th ed Mc Graw Hill, 1987.
- [3] W. Schneider & M.G. Wasel, Breakdown of the boundary layer approximation for mixed convection above an horizontal plate", *Int. J. Heat Mass Transfert*, Vol. 28, No 12, pp. 2307-2313, 1985.
- [4] H. Steinrück, Mixed convection over a cooled horizontal plate: non-uniqueness and numerical instabilities of the boundary layer equations', *J. Fluid Mech.*, vol 278, pp. 251-265, 1994.
- [5] M. Van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, The Parabolic press, Standford, 1962.
- [6] P.-Y. Lagrée, Upstream influence in mixed convection at small Richardson Number on triple, double and single deck scales, *Asymptotic Modelling in Fluid Mechanics*, Bois, Dériat, Gatignol & Rigolot (Eds.), *Lecture Notes in Physics*, Springer, pp. 229-238. 1994.
- [7] P.-Y. Lagrée, Removing the marching breakdown of the boundary layer equations for mixed convection above a horizontal plate, accepté par *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [8] F. J. Higuera, The hydraulic jump in a viscous laminar flow, *J. Fluid Mech.*, vol 274, pp. 62-92, 1994.