

Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

## Convection thermique mixte à faible nombre de Richardson dans le cadre de la triple couche

Pierre-Yves LAGRÉE

**Résumé** – Les écoulements de convection thermique mixte sur une plaque plane présentent une singularité lorsque la plaque est plus froide que le fluide, aussi nous nous proposons d'examiner la naissance de cette singularité en mettant en œuvre la technique de la « triple couche ». Un terme supplémentaire traduisant le nivellement barométrique et caractérisant l'interaction apparaît alors dans la relation, classique, pression-déviation. La solution linéarisée du « problème canonique » mis en évidence est effectuée, elle montre l'influence de l'amont de l'écoulement sur l'aval.

### Mixed convection at small Richardson number on triple deck scales

**Abstract** – Mixed convection over a horizontal flat plate leads to a breakdown when the fluid is cooled from below, so we propose to investigate the problem in the framework of "triple deck" theory. A new term in the pressure displacement relation, accounting for the hydrostatic pressure change across the main deck, appears from the analysis. The linearized solution given shows upstream influence.

**Abridged English Version** – It has been shown by Schneider and Wasel (1985) and Daniels (1992) (for example) that boundary layer equations, when coupled with energy equation by buoyancy within the framework of the Boussinesq approximation, become abruptly singular at a (relatively small) fixed abscissa; thus, we propose to revisit this problem of "mixed convection" on the basis of "triple deck" interaction. The small parameter is  $J$  [defined by (1.2)] the Richardson number (in fact  $\tilde{J} = J Re^{1/8}$  is more convenient).

The basic flow, driven by the free stream uniform velocity, is a classical Blasius boundary layer with pure thermal convection as long as the transverse gradient (1.1) is small and  $1 \gg J \gg Re^{-1}$ . The classical triple deck tool Neiland (1970) and Brown *et al.* (1975) is applied to cope with a localized disturbance gauged by  $x_3$  longitudinally, so we recover [(2.1), (2.2), (2.3)]. This perturbation of temperature gives the transverse change of pressure through the "main deck" as (4). The match with the "upper deck" gives Hilbert integral, the gauge  $\varepsilon$  and the new pressure displacement relation (6). It is worth noting that if the Richardson number grows in order of magnitude from  $Re^{-1/8}$  up, the perturbations in the upper deck become smaller and smaller and the longitudinal gauge, while remaining much smaller than one, grows as far as order of magnitude is concerned; so we find that for moderate values of  $J$  (8.1) the relation becomes (8.2) [same relation as in hypersonic flows (Brown *et al.*, 1975) for cold wall and (8.3) for hot wall].

There are two possibilities for the lower deck depending on the temperature of the spot. If there is no spot (but a hump) or if the spot is of magnitude  $\varepsilon \Delta T_0$  then we find [(9.1), (9.2), (9.3)]. However, if the spot is hotter (or colder), the temperature in the lower deck must be rescaled by  $T_w$  (12) and a second Richardson number is introduced (11). Now there is a pressure change across the lower deck and we have to solve (13). Depending on the values of the Richardson number we may build six new "fundamental problems of triple deck" (9) with (8.2) or (8.3); or (6); or (13) with (8.2) or (8.3); or (6).

Linearized solutions may be obtained and we find, after Fourier transform in  $x$ , the temperature (15), the shear stress (16) and the displacement (18). The behaviour, computed with those relations may be observed in figure 1 (the bump at  $\tilde{J} = -2, 0, 2$ ) or figure 2

---

Note présentée par Paul GERMAIN.

(the cold spot at  $\tilde{J} = 0, -1, -2$ ). It shows upstream influence [see Gajjar and Smith (1983), who studied self-induced solution with relation (8.2)] which may be interpreted, in stratified flows, as “blocking”, and downstream we observe small oscillations, interpreted as “lee waves”, positive values of  $\tilde{J}$  shows lowering of upstream influence.

As a conclusion, the singularity has not been cleared up, but we show that even at small values of  $\tilde{J}$  there is upstream influence and self induced solutions exist which may be interpreted as the development of some event downstream.

INTRODUCTION. – Est appelée convection mixte, l’interaction, par la force d’Archimède modélisée par le terme de Boussinesq, entre un écoulement et une paroi portée à une température différente de celle du fluide. Il a été montré (Schneider et Wasel, 1985 et Daniels, 1992) que ce problème, traité avec la description de couche limite se terminait, en suivant le flot, par une singularité en une certaine abscisse. Nous proposons, lorsque le nombre de Richardson (qui jauge le couplage entre les aspects thermiques et dynamiques) est très petit, une interaction de « triple couche » (Neiland, 1970 et Brown *et al.*, 1975). Cette interaction provoque des solutions autoinduites et de l’influence amont dans le cas d’une paroi plus froide que le fluide. Mais auparavant, nous proposons les solutions linéarisées, déduites du modèle dégagé, de l’écoulement perturbé par une tache thermique (et/ou une bosse) sur la plaque, maintenue par ailleurs à température constante. La même approche linéarisée, mais instationnaire (Smith, 1979), permet de mettre en évidence les ondes de Tollmien Schlichting et leur modification avec  $J$ .

1. ÉCOULEMENT DE BASE. – L’écoulement de base est celui d’une couche limite de Blasius (avec les notations classiques : la vitesse de l’écoulement amont  $U_\infty$  sert de jauge de vitesse longitudinale, soit  $L$  l’échelle de longueur, la couche limite est jaugée par  $\delta L$  avec  $\delta = Re^{-1/2}$  où  $Re$  est le nombre de Reynolds) générant une couche limite thermique de convection forcée puisqu’il y a un écart de température (noté  $\Delta T_0$ ) entre la paroi maintenue à  $T_0$  et le fluide dont la température amont est  $T_\infty$  (la température de base s’écrit donc :  $T_\infty + (T_0 - T_\infty)\theta_0$ , et on pose  $(T_0 - T_\infty) = \Delta T_0$ . L’échelle de longueur  $L$  a en effet été choisie de manière à ce que le couplage thermique, soit très faible, on a :

$$(1.1) (1.2) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = J\theta \quad \text{avec} \quad J = \frac{g \alpha \Delta T_0}{U_\infty^2} \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad \text{et} \quad 1 \gg J \gg Re^{-1}$$

où  $J$  est le nombre de Richardson. Celui-ci est supposé très petit (mais plus grand que  $Re^{-1}$ ). Cela signifie que nous nous donnons  $L$  (par exemple, c’est la position d’une tache thermique). En général (Schneider et Wasel, 1985), dans le problème de convection mixte strict, il n’y a pas de longueur caractéristique, et celle-ci est justement choisie en prenant  $J$  égal à un. Or Schneider et Wasel (1985) et Daniels (1992) montrent que la singularité se produit pour une valeur petite de leur abscisse adimensionnée (6.E-3 et 0.14, suivant les cas ; paroi isotherme ou athermane), ce qui veut dire, qu’avec cette longueur comme échelle, le nombre de Richardson associé est petit (racine carrée de ces valeurs), il n’est donc pas déraisonnable d’étudier ce qui se passe aux faibles valeurs de  $J$ .

2. INTERACTION DE TRIPLE COUCHE. – 2.1. *Pont principal.* – La démarche classique est adoptée : soit  $\varepsilon U_\infty$  l’ordre de grandeur de la perturbation de vitesse longitudinale localisée en abscisse (soit  $x_3$   $L$  la jauge de triple couche),  $\varepsilon$  est inconnu, dans la couche limite, où  $y$  est mesuré par  $\delta L$  l’épaisseur de couche limite. La conservation de la quantité de

mouvement, et l'incompressibilité nous fournissent immédiatement la vitesse en faisant apparaître la fonction de déplacement, pour l'instant indéterminée,  $-A(x)$ , tandis que l'équation de l'énergie nous permet de déduire que la perturbation de température est résolue *explicitement* ( $\theta_0$  est le profil de base auto semblable) sa jauge étant celle de la perturbation de vitesse, d'où finalement :

$$(2.1) (2.2) (2.3) \quad \begin{cases} U = U_0(y) + \varepsilon A(x) U'_0(y); & v = -\frac{\varepsilon \delta}{x_3} A'(x) U_0(y); \\ \text{et} & \\ T = \theta_0(y) + \varepsilon A(x) \theta'_0(y). \end{cases}$$

On reconnaît (pour T) la même expression que dans le cas de la fonction S de Stewartson [enthalpie totale, cas des écoulements hypersoniques (Brown *et al.*, 1975)].

2.2. « Traversée » du pont principal et pont supérieur. – Le couplage entre la couche limite thermique et la couche limite dynamique s'effectue par l'intermédiaire du gradient transverse de pression. En anticipant sur la suite, la pression dans le pont inférieur est d'ordre  $\varepsilon^2$ , et  $x_3 = \varepsilon^3$ , donc le développement de la pression dans le pont principal [en posant  $J = \varepsilon \tilde{J}$ , avec  $\tilde{J} = O(1)$ ], s'écrit à l'ordre 2 :

$$(3) \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon \tilde{J} (\theta_0(y) + \varepsilon A(x) \theta'_0(y)).$$

Le premier gradient transverse est nul, c'est celui de la couche limite de départ. Le second montre qu'il existe un nivellement de pression associé au profil de température de base  $\left( \tilde{J} \int_0^\infty \theta_0(y) dy \right)$ , cette variation ne dépend pas de  $x$  à l'échelle courte considérée, et donc n'intervient pas dans les équations du pont principal. Enfin, le troisième gradient transverse s'intègre :

$$(4) \quad p(y \rightarrow \infty) - p(y \rightarrow 0) = \tilde{J} A(x) (\theta_0(\infty) - \theta_0(0)) = -\tilde{J} A(x)$$

où  $p(y \rightarrow 0)$  et  $p(y \rightarrow \infty)$  sont les valeurs de la pression qui se raccordent avec celles du pont inférieur, et respectivement du pont supérieur. Pour cette dernière il s'agit de l'intégrale de Hilbert de la fonction de déplacement (dans le cas subsonique).

2.3. Nouvelle relation pression-déviation. – Si le pont principal reste privilégié, par l'interaction de fluide parfait, alors  $\varepsilon = \delta^{-1/4} = Re^{-1/8}$ , et :

$$(6) \quad \frac{1}{\pi} \int \frac{-A'}{x - \xi} d\xi = p - \tilde{J} A,$$

la relation liant A et P est donc affectée d'un nouveau terme qui peut être d'ordre un et qui représente le nivellement de la pression au travers du pont principal.

*Remarque.* – Si le nombre de Richardson relatif augmente, il est judicieux de garder J (en effet, le choix de  $Re^{-1/8}$  privilégie l'interaction de fluide parfait, linéarisée, du pont supérieur ; en hypersonique (Brown *et al.*, 1975) un phénomène similaire se produit), donc  $\varepsilon = |J|$ . Au travers du pont principal, la relation pression-déviation devient alors :

$$(7) \quad (|J|^{-4} Re^{-1/2}) \frac{1}{\pi} \int \frac{-A'}{x - \xi} d\xi = (p \pm A),$$

donc, si J est assez grand, le pont supérieur n'intervient plus, l'interaction est plus étendue longitudinalement, en revanche elle l'est moins transversalement car elle reste confinée

dans la couche limite dont l'épaisseur ne varie plus. Si la paroi est froide  $J$  est négatif : le profil statique est stable (respectivement chaude,  $J$  positif), il vient tout simplement :

$$(8.1) (8.2) (8.3) \quad \text{Re}^{-1/8} \ll |J| \ll 1, \quad p = -A, \quad \text{respectivement } p = A.$$

2.4. *Équations de pont inférieur.* – On rappelle que  $u$  est d'ordre  $\varepsilon$ ,  $p$  d'ordre  $\varepsilon^2$ , la jauge  $x_3$  est, elle, d'ordre  $\varepsilon^3$ . Le raccord de la perturbation de température laisse penser que celle-ci est de même ordre que la vitesse  $u$ . La variable  $y$ , est maintenant  $\varepsilon y$  ( $\varepsilon$  fois la précédente).

2.4.1. *Premier cas, pas de tache thermique.* – On retrouve :

$$(9.1) (9.2) (9.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \\ \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u = - \frac{d}{dx} p + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u, \quad \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) T = \frac{\partial^2}{\partial y^2} T. \end{cases}$$

avec l'adhérence à la paroi, et à l'infini en  $y$  :  $u \rightarrow y+A$ ,  $T \rightarrow y+A$ ,  $A(-\infty) = 0$ .

2.4.2. *Second cas tache thermique.* – Un accident thermique, pour rester cohérent avec les jauges précédentes, doit être d'ordre  $\varepsilon$  dans le pont inférieur, le gradient transverse de pression reste négligeable puisque  $J$  est petit. Mais si la température est perturbée plus fortement, il en est tout autrement. Disons que, localement, sur une échelle  $x_3$  (qui est celle de la triple couche) la température varie et passe de  $T_0$  à  $T_0 + T_w$ , alors il est judicieux d'utiliser la valeur  $[(T_w/\Delta T_0)\Delta T_0] = T_w$ , au lieu de  $(\varepsilon(\Delta T_0))$  comme nouvelle jauge de variation de température (et  $T_w \gg \varepsilon\Delta T_0$ ). L'équation de convection-diffusion de la température reste inchangée (car linéaire, on vérifie bien, dans cette équation, que le gradient initial de température est d'ordre  $\varepsilon$ ), mais le gradient de pression peut ne plus être négligeable si  $j = \tilde{J}T_w/\Delta T_0$  (c'est le *deuxième* nombre de Richardson, ce dernier est associé à l'accident, le premier est associé à l'écoulement de base), est d'ordre un, dans ce cas :

$$(11) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = j\theta, \quad \text{d'où} \quad - \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} = - \frac{dp(x)}{dx} + j \int_y^\infty \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} dy.$$

Où  $p(x)$  est la pression en haut du pont inférieur (en bas du pont principal). La température est jaugée par :

$$(12) \quad T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \left( 1 + \frac{T_w}{T_0 - T_\infty} \theta \right) = T_0 + T_w \theta$$

Le raccord entre les ponts inférieur et supérieur devient

$$1 + \frac{T_w}{T_0 - T_\infty} \theta(y \rightarrow \infty) = 1 + \varepsilon(y+A(x)) \theta'_0,$$

et comme la température est très forte à la paroi ( $T_w \gg \varepsilon\Delta T_0$ ), la température  $\theta$  est donc nulle à l'infini. D'où il vient le problème de pont inférieur suivant (très similaire à Zeytounian, 1991).

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u = - \frac{d}{dx} p + j \int_y^\infty \frac{\partial \theta}{\partial x} dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u, \quad \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta; \end{cases}$$

avec comme conditions aux limites l'adhérence à la paroi, et la température imposée, et à l'infini en  $y$ ,  $u \rightarrow y+A$ , mais,  $\theta \rightarrow 0$ , et  $A(-\infty) = 0$ .

3. PROBLÈMES « CANONIQUES » DÉGAGÉS. – 3.1. *Premier problème.* – Tant que la variation de la température de paroi reste faible, et que le nombre de Richardson reste d'ordre  $Re^{-1/8}$ , on a le problème de triple couche classique (9) où  $\varepsilon = Re^{-1/8}$ , avec un terme de correction d'ordre un dans la relation pression-déviaton (6) (le détail de la température, scalaire passif, est sans importance dans le pont inférieur).

3.2. *Second problème.* – La température de paroi varie brusquement d'une valeur d'ordre un, le second (il y a ici deux effets de température) nombre de Richardson  $j$  (construit avec la température de l'accident thermique) est d'ordre un dans le pont inférieur (dans le pont principal cette température n'a pas encore eu le loisir d'être diffusée), on a donc (13) et (6).

De plus, dans les deux cas, si  $J$  augmente, on prend  $\varepsilon = J$ , et  $p = \pm A$  [au lieu de (6)].

4. RÉOLUTION LINÉARISÉE, SOLUTIONS AUTOINDUITES. – Le système (13) admet la solution de Blasius  $u = y$  comme solution triviale, partant de cette solution de base, la résolution linéarisée fournit après transformation de Fourier en  $x$  :

$$(14) \quad \begin{cases} i\alpha \tilde{u} + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{v} = 0; \\ y i\alpha \tilde{u} + \tilde{v} = -i\alpha \tilde{p} + j \int_y^\infty i\alpha \tilde{T} dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{u}, & y i\alpha \tilde{T} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{T}. \end{cases}$$

La perturbation du frottement pariétal  $\tilde{\tau} = \partial \tilde{u} / \partial y$  vérifie une équation différentielle d'Airy forcée par la température qui est elle-même une fonction d'Airy :

$$(15) \quad \tilde{T} = Ai(y(i\alpha)^{1/3}).$$

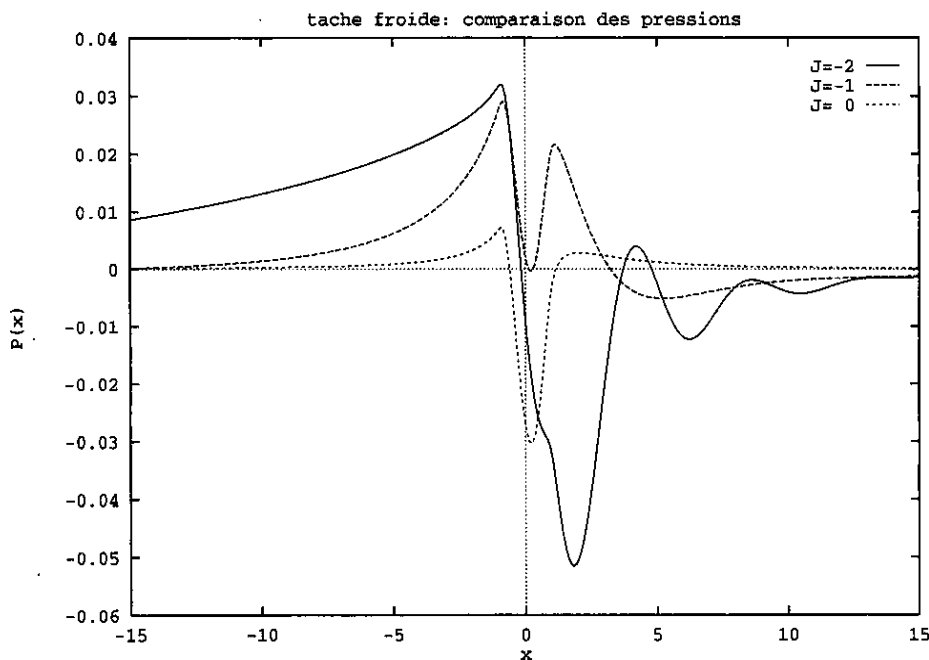


Fig. 1. – Bosse entre -1 et 1 : comparaison des pressions en haut du pont supérieur pour différentes valeurs de  $\tilde{J}$ .

Fig. 1. – Bump between -1 and 1: comparison of pressure at the top of the main deck for different values of  $\tilde{J}$ .

On en déduit d'une part l'expression du frottement pariétal :

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial y} \tilde{u}(0) = 1 + \frac{(i\alpha)^{2/3} \tilde{p}}{Ai'(0)} - j (i\alpha)^{1/3} \left( \frac{Ai(0)}{3 Ai'(0)} - Ai'(0) \right)$$

puis d'autre part, la fonction de déplacement ( $\tilde{F}$  est la transformée de Fourier de la paroi) :

$$(17) \quad \tilde{A} + \tilde{F} = \frac{(i\alpha)^{1/3} \tilde{p}}{3 Ai'(0)} - j \left( Ai(0) + \frac{1}{9 Ai'(0)} \right).$$

Dans cette relation pression-déviation, avec effet de température (écrit ensuite sous la forme  $\tilde{A} + \tilde{F} = \beta^* \tilde{p} + j\beta_j$ ), on constate qu'à un  $j$  négatif correspond donc une diminution de frottement et un déplacement - A positif, donc un épaissement. La relation (6) s'écrit, après transformée de Fourier :

$$(18) \quad \tilde{p} = (|\alpha| + \tilde{J}) \tilde{A}.$$

On en déduit la solution pour la pression (attention il s'agit de la pression à l'infini en haut du pont inférieur) :

$$(19) \quad \tilde{p} = \frac{(|\alpha| + \tilde{J})}{1 - (|\alpha| + \tilde{J})\beta^*} (j\beta_j - \tilde{F}).$$

4.1. *Solution autoinduites.* – Dans le cas de la paroi froide, la relation obtenue ( $p = -A$ ) est la même qu'en régime hypersonique (Brown *et al.*, 1975 et Gajjar et Smith, 1983), aussi des solutions autoinduites, au comportement amont en exponentielle croissante, peuvent

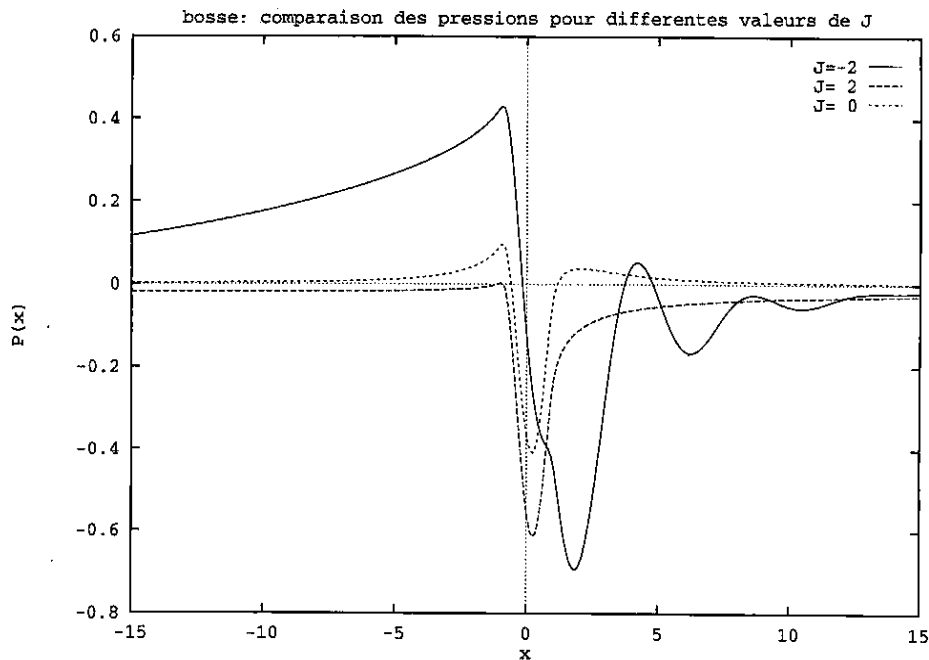


Fig. 2. – Tache froide entre -1 et 1 : comparaison des pressions en haut du pont supérieur pour différentes valeurs de  $\tilde{J}$ .

Fig. 2. – Cold spot between -1 and 1: comparison of pressure at the top of the main deck for different values of  $\tilde{J}$ .

être générées :  $p = ae^{kx}$ ,  $k = (-3 Ai'(0))^3$  leur interprétation est celle du phénomène de blocage (forte influence amont observée dans les écoulements stratifiés se traduisant par une déviation des lignes de courant sur une distance grande devant l'obstacle perturbateur).

4.2. *Stabilité.* – Le cas de la paroi chaude ( $p = A$ ) est quant à lui propice aux instabilités, et la courbe de stabilité marginale est donc (par analogie avec les ondes de Tollmien Schlichting mises en évidence par Smith (1979) telle que  $\omega = 2, 29 \alpha^{2/3}$ , avec  $\tilde{J} = 1, 001 \alpha^{-1/3} - |\alpha|$ , on a donc un mode non visqueux pour  $\tilde{J}$  très négatif, et un mode visqueux de grande longueur d'onde pour  $\tilde{J}$  positif et grand (qui correspond à  $p = A$ ).

5. *RÉSOLUTION NUMÉRIQUE.* – Une résolution linéarisée est proposée grâce à la relation (18). Pour fixer les idées les courbes de pression pour différents nombres de Richardson réduits  $\tilde{J}$  sont proposées (fig. 1) dans le cas de la bosse [de forme  $(1-x^2)^2$ ] pour  $\tilde{J} = -2, 0, 2$ , puis (fig. 2) dans le cas d'une tâche froide (de même forme) pour  $\tilde{J} = 0, -1, -2$ . En amont, pour la paroi froide, le phénomène de blocage peut être observé, il augmente avec  $-\tilde{J}$ . En aval, des ondes sous le vent sont observées.

*CONCLUSION.* – L'étude est à poursuivre notamment du point de vue de la stabilité, et du point de vue numérique. L'interprétation physique du comportement de la couche limite n'est pas encore élucidée, s'agit-il ici de la naissance d'un ressaut hydraulique interne comme le montrent certaines expériences numériques en convection naturelle (Le Quere *et al.*, 1985), auquel cas la relation  $p = -A$  est une bonne description de la naissance du ressaut (Bowles et Smith, 1992), mais cette relation ne permet pas de jauger son amplitude.

Je remercie MM. J.-P. Guiraud, S. Zaleski et R. Zeytounian.

Note remise le 22 février 1994, acceptée le 23 mars 1994.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- R. I. BOWLES et F. T. SMITH, The standing hydraulic jump: theory, computations and comparisons with experiments, *JFM*, 242, 1992, p. 145-168.  
 S. N. BROWN, K. STEWARTSON et P. G. WILLIAMS, Hypersonic self induced separation, *The Phys. of Fluids*, 18, n° 6, June 1975.  
 P. G. DANIELS, A singularity in thermal boundary-layer flow on a horizontal surface, *Fluid. Mech.*, 242, 1992, p. 419-440.  
 J. GAJJAR et F. T. SMITH, On hypersonic self induced separation, hydraulic jumps and boundary layer with algebraic growth, *Mathematika*, 30, 1983, p. 77-93.  
 P. LE QUERE, T. ALZIARY DE ROQUEFORT, Computation of natural convection in Two dimensional cavities with Chebyshev Polynomials, *J. of Comp. Physics*, 57, 1985, p. 210-228.  
 V. Ya NEILAND, Propagation of perturbation upstream with interaction between a hypersonic flow and a boundary layer, *Mekh. Zhid. Gaz.*, 4, 1969, p. 53-57.  
 W. SCHNEIDER et M. G. WASEL, Breakdown of the boundary layer approximation for mixed convection above an horizontal plate, *Int. J. Heat Mass Transfert*, 28, n° 12, 1985, p. 2307-2313.  
 F. T. SMITH, On the non parallel flow stability of the blasius boundary layer, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A366, 1979, p. 91-109.  
 R. ZEYTOUNIAN, Meteorological fluid dynamics, *Lecture notes in physics m5*, Springer Verlag, 1991.

Laboratoire de Modélisation en Mécanique,

URA-CNRS 229, Université Paris-VI, Boîte n° 162, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 5, France.

